УДК 519.214 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 60-03, 62-03

К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. III. Распределения функционалов от процессов, стохастическая геометрия и экстремумы*

А. Н. Бородин[1,2], *Ю. А. Давыдов*[1], *В. Б. Невзоров*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН,
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27

Для цитирования: *Бородин А. Н., Давыдов Ю. А., Невзоров В. Б.* К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. III. Распределения функционалов от процессов, стохастическая геометрия и экстремумы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 572–596. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.404

Третья статья из серии обзоров о научных достижениях Ленинградской — Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики в период с 1947 по 2017 г. посвящена работам в области изучения функционалов от случайных процессов, некоторым задачам стохастической геометрии и вопросам, связанным с упорядоченными системами случайных величин. В первых разделах статьи речь идет о задачах вычисления распределений различных функционалов от броуновского движения и рассматриваются так называемые принципы инвариантности для броуновских локальных времен и случайных блужданий. Вторая часть посвящена предельным теоремам для слабозависимых случайных величин и локальным предельным теоремам для стохастических функционалов. Там же рассказывается о методе расслоений и локальном принципе инвариантности. Рассматривается также асимптотическое поведение выпуклых оболочек случайных выборок при растущем объеме и предельные теоремы для случайных зонотопов. Объясняется важная связь между точечными пуассоновскими процессами и устойчивыми распределениями. В заключительной части приводится обширная информация об исследованиях, связанных с изучением упорядоченных систем случайных величин. Детально рассмотрены максимумы последовательных сумм, порядковые статистики и рекордные величины.

Ключевые слова: броуновское движение, распределение функционалов, броуновское локальное время, случайные блуждания, принцип инвариантности, метод расслоений, локальный принцип инвариантности, предельные теоремы для случайных зонотопов и выпуклых оболочек, порядковые статистики, экстремумы, рекорды.

Данная статья продолжает серию обзоров, посвященных достижениям Ленинградской и Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики (см. [1, 2]). Разделы 1 и 2 подготовлены А. Н. Бородиным, разделы 3–5 — Ю. А. Давыдовым, а раздел 6 — В. Б. Невзоровым.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СПбГУ-ННИО (грант № 6.65.37.2017) и РФФИ (грант № 18-01-00393).

1. Распределения функционалов от броуновского движения. ***1.1. Распределения функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к интегральному функционалу.*** Основу теории распределений функционалов от броуновского движения составили результаты А. Н. Колмогорова [3] и М. Каца [4]. В 1931 г. появились знаменитые прямое и обратное уравнения Колмогорова. Толчком для появления вероятностных представлений для решений параболических уравнений при наличии потенциала послужил результат из диссертации нобелевского лауреата по физике Р. Фейнмана. Он дал описание волновых функций, которые являются решениями уравнения Шредингера, через континуальные интегралы. В свою очередь, М. Кац увидел в этом результате аналогию с теорией распределений интегральных функционалов от броуновского движения и заложил основы теории распределений функционалов от броуновского движения. Близкий к излагаемому в данном обзоре материал, связанный с распределением функционалов от броуновского движения, был изложен в монографии А. Н. Бородина и И. А. Ибрагимова [5]. Приведенные ниже результаты взяты из монографии А. Н. Бородина [6]. Огромный набор явных формул распределений различных функционалов от броуновского движения можно найти в [7].

Пусть $W(s)$, $s \geq 0$, — процесс броуновского движения. Рассмотрим интегральный функционал $\int_0^t g(W(s))\,ds$, $t > 0$, где g — неотрицательная кусочно непрерывная функция, не равная нулю тождественно. Для определенности полагаем, что в точках разрыва она принимает значения правосторонних пределов ($g(z) = g(z+0)$).

Хорошо известно, что

$$\int_0^\infty g(W(s))\,ds = \infty \qquad \text{п. н.} \tag{1}$$

Рассмотрим метод вычисления распределений функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в *момент, обратный к интегральному функционалу*. Этот момент определяется по формуле

$$\nu(t) := \min\Big\{s : \int_0^s g(W(v))\,dv = t\Big\}, \qquad t \geq 0.$$

В силу (1) для броуновского движения этот момент с вероятностью единица конечен. Он является моментом остановки относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, порожденных броуновским движением: $\mathcal{F}_t = \sigma(W(v), 0 \leq v \leq t)$. Возможно, что $\nu(0+) > 0$.

Пусть τ — случайный момент времени, не зависящий от броуновского движения W и имеющий экспоненциальное распределение: плотность этого распределения имеет вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau < t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t), \ \ \lambda > 0.$$

Рассмотрение момента τ вместо t соответствует преобразованию Лапласа по t с параметром λ. При решении задач теории распределений функционалов от броуновского процесса, рассмотренного до момента времени t, такое преобразование Лапласа позволяет избежать появления уравнений в частных производных. В связи с этим все основополагающие результаты выводятся для момента τ вместо t. Для того чтобы получить соответствующее распределение для фиксированного момента t, нужно в полученном выражении для τ обратить преобразование Лапласа по λ. Объяснение этому см. в [6, гл. III]. Там же изложен общий подход к задачам вычисления распределений функционалов от броуновского движения. В [6, гл. IV] этот подход распространен на диффузионные процессы.

Следующий результат является ключевым для вычисления распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к интегральному функционалу.

Теорема 1.1. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, — кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geq 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$U_\nu(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(W(\nu(\tau)))\exp\Big(-\int_0^{\nu(\tau)} f(W(s))\,ds\Big)\Big\}$$

является единственным непрерывным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda g(x) + f(x))U(x) = -\lambda g(x)\Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Для кусочно непрерывных функций $g(x)$, $f(x)$ и $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, уравнение (2) надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций $g(x)$, $f(x)$ и $\Phi(x)$, а в точках разрыва функций $g(x)$, $f(x)$ и $\Phi(x)$ его решение непрерывно вместе с первой производной.

Уравнение (2) имеет только одно ограниченное решение в $\mathbf{R}$. Это следует из того, что у соответствующего однородного уравнения нет ограниченных решений на всей прямой.

1.2. Распределения функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху. *Размахом процесса* будем называть разность между его максимальным и минимальным значениями на конечном интервале времени. Рассмотрим результаты, позволяющие вычислять распределения некоторых функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху броуновского движения $W(s)$, $s \in [0, \infty)$.

Пусть

$$\theta_v = \min\Big\{t : \sup_{0\leq s\leq t} W(s) - \inf_{0\leq s\leq t} W(s) = v\Big\}$$

— первый момент, когда размах процесса W достигает заданного значения $v > 0$. Момент остановки θ_v называется *моментом, обратным к размаху броуновского движения.*

Оказывается, что задача о вычислении распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент θ_v, который является обратным к размаху процесса W, может быть трансформирована в задачу о вычислении распределений таких же функционалов от процесса W, остановленного в момент первого выхода из конечного интервала, т. е. в момент $H_{a,b} = \min\{s : W(s) \notin (a, b)\}$. Этот факт является основополагающим при доказательстве многих результатов о распределении функционалов, в которых присутствует момент θ_v.

Рассмотрим задачу о распределении интегральных функционалов

$$A(t) := \int_0^t f(W(s))\,ds,$$

когда вместо t берется момент θ_v.

Следующий результат является ключевым для вычисления условных распределений функционала $A(t)$ для момента θ_v при условии $W(\theta_v) = z$.

Для кусочно непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v)}; W(\theta_v) < z\big\} =$$
$$= \begin{cases} \frac{d}{dv}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(H_{z,z+v})}; W(H_{z,z+v}) = z\big\} & \text{при} \quad x - v < z < x, \\ \frac{d}{dv}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(H_{z-v,z})}; W(H_{z-v,z}) = z\big\} & \text{при} \quad x < z < x + v. \end{cases} \tag{3}$$

Правую часть (3) можно выразить через фундаментальные решения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ уравнения

$$\frac{1}{2}\phi''(x) - f(x)\phi(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Положим $w := \psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)$ — вронскиан, который является неотрицательной постоянной величиной. Определим

$$\rho(x, y) := \psi(x)\varphi(y) - \psi(y)\varphi(x).$$

Тогда

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v)}; W(\theta_v) < z\big\} = \begin{cases} \frac{w\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)}, & x - v < z \le x, \\ \frac{w\rho(z,x)}{\rho^2(z,z-v)}, & x \le z < x + v. \end{cases}$$

В результате для произвольной кусочно непрерывной функции $\Phi(z)$ имеем

$$\mathbf{E}_x\big\{\Phi(W(\theta_v))\, e^{-A(\theta_v)}\big\} = w\int_x^{x+v} \frac{\Phi(z)\rho(z,x) + \Phi(z-v)\rho(x,z-v)}{\rho^2(z,z-v)}\, dz.$$

1.3. Распределения функционалов от броуновского локального времени в экспоненциальный момент времени. Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от броуновского локального времени:

$$\ell(t,x) := \lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\delta+\varepsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{[x-\delta,x+\varepsilon)}(W(s))ds \qquad \text{п. н.}$$

Интегральный функционал от броуновского локального времени по пространственной переменной имеет вид

$$B(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(t,y))\, dy,$$

где $f(v)$, $v \in [0, \infty)$, — некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция, $f(0) = 0$. В силу того, что носитель локального времени ограничен, этот интеграл конечен. Для преобразования Лапласа распределения такого функционала получены явные формулы, выраженные в терминах решений дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих некоторым граничным условиям.

Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума. Так, например, для вычисления супремума произвольного непрерывного процесса $X(y)$, $y \in [a, b]$, можно воспользоваться соотношением

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{a\le y\le b} X(y) \le h\Big) = \lim_{\gamma\to\infty}\mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int_a^b \mathbf{1}_{(h,\infty)}(X(y))\, dy\Big).$$

Как уже отмечалось, вычисление распределений функционалов в фиксированный момент времени t сводится к вычислению распределений таких же функционалов, остановленных в случайный момент времени τ, который не зависит от броуновского движения W и имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Тем самым, основным результатом для вычисления совместных распределений функционала $B(t)$ и супремума броуновского локального времени является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть $f(v)$, $v \in [0, h]$, — неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_x \Big[\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\tau, y))\, dy \Big); \sup_{y \in \mathbf{R}} \ell(\tau, y) < h \Big] = 2\lambda \int_0^h R(v)Q(v)\, dv,$$

где для $v \in [0, h]$ функции R и Q являются единственными ограниченными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v) - (\lambda v + f(v))R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \tag{4}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda v + f(v))Q(v) = -R(v), \tag{5}$$

$$R(h) = 0, \qquad Q(h) = 0. \tag{6}$$

В случае $h = \infty$ граничные условия (6) должны быть заменены следующими:

$$\limsup_{v \to \infty} e^{v\sqrt{\lambda/2}} R(v) < \infty, \qquad \limsup_{v \to \infty} e^{v\sqrt{\lambda/2}} Q(v) < \infty.$$

Для кусочно непрерывной функции f уравнения (4), (5) должны пониматься точно так же, как уравнение (2).

Пусть $I_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, — модифицированные функции Бесселя порядка l.

Из теоремы 1.2 можно вывести, что при $h \geq 0$

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y \in \mathbf{R}} \ell(\tau, y) \geq h \Big) = \frac{4h\sqrt{2\lambda}\, e^{h\sqrt{2\lambda}} I_1(h\sqrt{\lambda/2})}{(e^{h\sqrt{2\lambda}} - 1)^2 I_0(h\sqrt{\lambda/2})}. \tag{7}$$

В силу пространственной однородности броуновского движения, вероятность (7) не зависит от начального значения броуновского процесса.

Рассмотрим асимптотическое поведение локального времени $\ell(t, x)$ при больших значениях t. Приводимое ниже утверждение можно в нестрогой форме сформулировать так: при $t \to \infty$ основная составляющая скорости роста экстремальных значений почти всех траекторий процесса броуновского локального времени является неслучайной функцией, которая имеет вид $\sqrt{2t \log\log t}$. Утверждения подобного типа объединяются общим названием *закон повторного логарифма*. Предположим для определенности, что $W(0) = 0$, хотя, как следует из доказательства, начальное значение броуновского движения роли не играет.

С вероятностью единица

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\ell(t, 0)}{\sqrt{2t \log\log t}} = \limsup_{t \to \infty} \frac{\sup_{x \in \mathbf{R}} \ell(t, x)}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1.$$

Следующий результат утверждает, что функция

$$h(t) := \sqrt{2t \log(1/t)}, \qquad 0 < t < e^{-1},$$

является равномерным по x точным модулем непрерывности броуновского локального времени $\ell(t,x)$ по переменной t.

Для любого $T>0$ с вероятностью единица

$$\limsup_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\Delta\log(1/\Delta)}}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}(\ell(t+\Delta,x)-\ell(t,x))=1.$$

Принципиальное отличие модуля непрерывности по переменной x от модуля непрерывности по переменной t заключается в том, что он является случайной величиной. По порядку малости, однако, эти модули совпадают.

Для любого $t>0$ с вероятностью единица

$$\limsup_{\Delta\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{\sup_{0\le s\le t}|\ell(s,x+\Delta)-\ell(s,x)|}{2\sqrt{(\ell(t,x)+\ell(t,x+\Delta))\Delta\log 1/\Delta}}=1. \tag{8}$$

В формуле (8) под знаком корня стоит сумма

$$\ell(t,x)+\ell(t,x+\Delta),$$

а не $2\ell(t,x)$. Это по сути обеспечивает выполнение требования, чтобы числитель и знаменатель обращались в ноль одновременно, так как локальное время $\ell(t,x)$ может равняться нулю, в то время как $\ell(t,x+\Delta)$ уже нулем не будет.

2. Принцип инвариантности для случайных блужданий и локальных времен. ***2.1. Слабый принцип инвариантности для случайных блужданий и локальных времен.*** Пусть ν_k, $k=0,1,2,\ldots,$ — возвратное случайное блуждание с единичной дисперсией, т. е. $\nu_0=0$, $\nu_k=\sum_{l=1}^k\xi_l$, где ξ_l, $l=1,2,\ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}\xi_1=0$, $\mathbf{E}\xi_1^2=1$. Классический *принцип инвариантности для случайного блуждания* ν_k можно сформулировать следующим образом.

По процессу броуновского движения $W(t)$, $t\ge 0$, при каждом фиксированном n можно так построить последовательность случайных блужданий ν_k^n, $k=0,1,\ldots,$ что их конечномерные распределения совпадают с конечномерными распределениями блуждания ν_k, $k=0,1,\ldots,$ а процесс $W_n(t):=\frac{1}{\sqrt{n}}\nu_{[nt]}^n$ при любых $\varepsilon>0$ и $T>0$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|W_n(t)-W(t)|>\varepsilon\Big)=0. \tag{9}$$

Здесь и далее $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Не ограничивая общности, в качестве отрезка времени, на котором рассматривается процесс броуновского движения W, можно взять интервал $[0,1]$, т. е. положить $T=1$.

Укажем пространство функций, которому принадлежат процессы W_n и процесс W, и в котором меры, порожденные процессами W_n, будут сходиться к мере, порожденной броуновским процессом W. Это $B_r[0,1]$ — пространство функций, определенных на $[0,1]$, непрерывных справа, имеющих левосторонние пределы и допускающих разрывы лишь в рациональных точках интервала $[0,1]$. Наделенное равномерной метрикой

$$\rho(x,y):=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$$

пространство $B_r[0,1]$ превращается в полное сепарабельное метрическое пространство.

Поскольку равномерная сходимость по вероятности эквивалентна тому, что из любой последовательности можно выбрать такую подпоследовательность, для которой будет иметь место равномерная сходимость с вероятностью единица, то из (9) следует, что для любого непрерывного в $B_r[0,1]$ функционала $\wp$ распределения величин $\wp(W_n(t), 0 \le t \le 1)$ сходятся к распределению величины $\wp(W(t), 0 \le t \le 1)$.

Сформулируем принцип инвариантности для локальных времен случайных блужданий. Термин *локальное время случайного блуждания* применяется для обозначения функционалов, описывающих поведение случайного блуждания вблизи некоторого выделенного уровня.

Принцип инвариантности для случайного блуждания является составной частью более широкого круга задач, которые можно объединить под названием «предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий». Начало интенсивному развитию данной проблематики было положено в монографии А. В. Скорохода и Н. П. Слободенюка [8]. Значительное продвижение в данном направлении было сделано в монографии А. Н. Бородина и И. А. Ибрагимова [5].

Пусть $\varphi(v) = \mathbf{E}\exp(iv\xi_1)$ — характеристическая функция шага случайного блуждания с нулевым средним и единичной дисперсией. Мы будем рассматривать только целочисленные (Ц) и непрерывные (Н) случайные блуждания, предполагая, что:

(Ц) $|\varphi(v)| = 1$ тогда и только тогда, когда v кратно 2π,

(Н) $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)|\,dv < \infty$.

Изложение мы начнем с особого и наиболее естественного случая, когда под локальным временем целочисленного случайного блуждания понимается нормированное число попаданий блуждания в выделенный уровень.

Положим

$$\ell_n(t,x) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{1}_{\{0\}}\big(\nu_{k-1}^n - [x\sqrt{n}]\big), \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}.$$

Величина $\ell_n(t,x)$ — нормированное на $\sqrt{n}$ число попаданий целочисленного случайного блуждания ν_k^n в точку $[x\sqrt{n}]$ до момента времени $[nt]$.

Особая роль процесса $\ell_n(t,x)$ при изучении аддитивных функционалов от случайных блужданий определяется следующим соотношением. Для произвольной функции f целочисленного аргумента и $t_n := [nt]/n$

$$\int_0^{t_n} f(W_n(s))\,ds = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} f\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\nu_{k-1}^n\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\big(\frac{l}{\sqrt{n}}\big)\mathbf{1}_{\{0\}}\big(\nu_{k-1}^n - l\big) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{[x\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}\Big)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{1}_{\{0\}}\big(\nu_{k-1}^n - [x\sqrt{n}]\big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{[x\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}\Big)\ell_n(t,x)\,dx.$$

Теорема 2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbf{R}} |\ell_n(t,x) - \ell(t,x)| > \varepsilon\Big) = 0.$$

Сформулируем теперь результат, касающийся локальных времен случайных блужданий, в более общей ситуации. Обозначим

$$h(v) := \mathbf{E}f(v, v+\xi_1), \qquad\qquad h := \sum_{v=-\infty}^{\infty} h(v),$$

$$q_n(t,x) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} f\big(\nu_{k-1}^n - [x\sqrt{n}], \nu_k^n - [x\sqrt{n}]\big), \qquad (t,x) \in [0,1] \times \mathbf{R}.$$

Теорема 2.2. *Предположим, что*

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|f(l, l+\xi_1)| < \infty,$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}f^2(l, l+\xi_1) < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |W_n(t) - W(t)| > \varepsilon\Big) = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbf{R}} |q_n(t,x) - h\ell(t,x)| > \varepsilon\Big) = 0. \tag{11}$$

В формулировке теоремы 2.2 содержится принцип инвариантности для случайных блужданий (соотношение (10)). То, что он выполняется вместе с (11), значительно усиливает результат. Важно здесь то, что процессы $W_n(t)$ и $q_n(t,x)$, $(t,x) \in [0,1] \times \mathbf{R}$, определяются по одной и той же серии случайных блужданий, построенных по процессу броуновского движения $W(t)$, $t \in [0,1]$, с использованием схемы вложения Скорохода.

Сформулируем аналог теоремы 2.2 для непрерывного блуждания. При этом в выражении для процесса $q_n(t,x)$ нужно заменить $[x\sqrt{n}]$ на $x\sqrt{n}$ и положить

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\, dv.$$

В этом случае на функцию $f(y,z)$ налагаются дополнительные ограничения.

Предположим, что при всех $(y,z) \in \mathbf{R}^2$, всех достаточно малых $\delta > 0$ и фиксированных α_j, β_j, $j = 1, 2, \ldots, r$,

$$\sup_{-\delta<v<\delta} |f(y+v, z+v) - f(y,z)| \le C(y,z)\delta + \\ + \sum_{j=1}^{r} D_j(y,z)\big(\mathbf{1}_{(\alpha_j-\delta,\alpha_j+\delta)}(y) + \mathbf{1}_{(\beta_j-\delta,\beta_j+\delta)}(z)\big), \tag{12}$$

где $C(y,z)$ и $D_j(y,z)$, $j = 1, \ldots, r$, — некоторые неотрицательные функции.

Условие (12) налагает на функцию $f(y,z)$ ограничение, при котором f может иметь разрывы, но лишь параллельные координатным осям.

Теорема 2.3. *Пусть выполнено* (12). *Предположим, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bigl(1+\sqrt{|v|}\bigr)\, \mathbf{E}|f(v,v+\xi_1)|\,dv<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} f^2(v,v+\xi_1)\,dv<\infty,$$

$$\mathbf{P}\Bigl(\sup_{v\in\mathbf{R}}|f(v,v+\xi_1)|>L\Bigr)\to 0 \qquad \text{при } L\to\infty.$$

Пусть, кроме того, при всех $(y,z)\in\mathbf{R}^2$ *и* $j=1,\dots,r$

$$|\mathbf{E}f(y,y+\xi_1)|\le Q, \qquad C(y,z)\le Q, \qquad D_j(y,z)\le Q \tag{13}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bigl(1+\sqrt{|v|}\bigr)\, \mathbf{E}C(v,v+\xi_1)\,dv<\infty, \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}C^2(v,v+\xi_1)\,dv<\infty, \tag{15}$$

где Q *— некоторая константа.*

Тогда для любого $\varepsilon>0$ *справедливы соотношения* (10) *и* (11).

2.2. Сильный принцип инвариантности для случайных блужданий и локальных времен. К *сильному принципу инвариантности для локальных времен* мы относим результаты, которые не просто устанавливают слабую сходимость процессов, а дают явный вид порядка скорости сходимости. В этом параграфе при условии, что у блуждания ν_k существует восьмой момент, приведены оценки скорости сходимости разностей $q_n(t,x)-h\ell(t,x)$ к нулю с вероятностью единица.

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие* (Ц), $\mathbf{E}|\xi_1|^8<\infty$,

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}f^2(v,v+\xi_1)<\infty$$

и

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\bigl[\bigl(|v|+|\xi_1|\bigr)|f(v,v+\xi_1)|\bigr]<\infty.$$

Предположим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\sup_{1\le k\le n}\sup_{v}|f(v,v+\xi_k)|>n^{1/4}\bigr)<\infty. \tag{16}$$

Тогда с вероятностью единица

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n^{1/4}}{\log n}\sup_{0\le t\le 1}|W_n(t)-W(t)|<\infty, \tag{17}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n^{1/4}}{\log n}\sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbf{R}}|q_n(t,x)-h\ell(t,x)|<\infty. \tag{18}$$

Достаточным для (16) является условие

$$\mathbf{E}\sup_{v} f^8(v, v+\xi_1) < \infty.$$

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (H), (12)–(16). *Предположим, что* $\mathbf{E}|\xi_1|^8 < \infty$, *функция* $\mathbf{E}f^2(y, y+\xi_1)$ *ограничена,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}f^2(v, v+\xi_1)\,dv < \infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\bigl\{\bigl(1+|v|+|\xi_1|\bigr)|f(v, v+\xi_1)|\bigr\}dv < \infty.$$

Тогда с вероятностью единица справедливы соотношения (17) *и* (18).

2.3. Предельные теоремы для полиаддитивных функционалов от случайных блужданий, шаг которых принадлежит области притяжения устойчивого закона. Пусть ν_k, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — случайное блуждание, т. е. $\nu_0 = 0$, $\nu_k = \sum_{l=1}^{k}\xi_l$, где ξ_l, $l = 1, 2, \ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $\varphi(v) = \mathbf{E}\exp(iv\xi_1)$, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Предположим, что эти величины принадлежат области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha > 1$ и нормирующими постоянными $b_n = n^{1/\alpha}h(n)$, где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция.

Пусть $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$, — интегрируемая по Риману функция. Положим

$$\eta_n(\vec{t}) = n^{-r}b_n^r \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{[n\vec{t}]} f(\nu_{k_1},\ldots,\nu_{k_r}), \qquad \vec{t} \in [0,1]^r,$$

где $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_r)$, а $[\vec{x}]$ — вектор с целочисленными координатами $[x_l]$, $l = 1,\ldots,r$, $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

Теорема 2.6. *Пусть* $\varphi(v) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $v = 0$. *Предположим, что при некотором* $c > 0$

$$|f(\vec{x})| < K(1+|\vec{x}|^{-r-c}).$$

Тогда распределения случайного поля $\eta_n(\vec{t})$, $\vec{t} \in [0,1]^r$, *сходятся к соответствующим распределениям поля*

$$\eta(\vec{t}) = \ell_\alpha(t_1, 0)\cdots\ell_\alpha(t_r, 0)\int_{\mathbf{R}^r} f(\vec{x})\,d\vec{x},$$

где $\ell_\alpha(t,0)$, $t \in [0,1]$, — *локальное время устойчивого процесса с показателем* $\alpha > 1$.

Рассмотрим случай решетчатого случайного блуждания. Пусть случайные величины ξ_l, $l = 1, 2, \ldots,$ принимают значения на решетке $\mathbb{Z}_d = \{kd\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Пусть $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{Z}^r$, такова, что

$$\sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{\infty} |f(k_1 d,\ldots,k_r d)| < \infty.$$

Теорема 2.7. *Пусть случайные величины* ξ_l, $l = 1, 2, \ldots$, *принадлежат области притяжения устойчивого закона с показателем* $\alpha > 1$.

Тогда распределения случайного поля $\eta_n(\vec{t})$, $\vec{t} \in [0,1]^r$, *сходятся к соответствующим распределениям поля* $\eta(\vec{t})$, $\vec{t} \in [0,1]^r$.

3. Процессы со слабой зависимостью. ***3.1. Предельные теоремы для процессов с перемешиванием.*** Естественным развитием результатов И. А. Ибрагимова, относящихся к центральной предельной теореме для стационарно связанных величин (см. [2]), явились работы Ю. А. Давыдова о принципе инвариантности для слабо зависимых процессов.

В течение 1966–1970 гг. им были изучены различные свойства процессов с перемешиванием. Он получил в [9, 10] несколько ковариационных неравенств максимального типа и на их базе доказал принцип инвариантности типа Донскера—Прохорова для стационарных процессов, имеющих свойство сильного или равномерно сильного перемешивания, и для процессов, являющихся функционалами от таких процессов.

В работе [10] было замечено, и это был первый результат такого типа, что в случае зависимых величин предельный процесс в принципе инвариантности может быть процессом дробного броуновского движения.

В эти же годы им изучались условия перемешивания для цепей Маркова [11, 12] и были сконструированы примеры, показывающие оптимальность вышеупомянутых классических результатов И. А. Ибрагимова, относящихся к центральной предельной теореме.

Стоит отметить, что ряд теорем, аналогичных результатам Ю. А. Давыдова о принципе инвариантности, был независимо получен П. Биллингсли (см. гл. 4 в книге «Сходимость вероятностных мер»).

3.2. Процессы кристаллизации. Первая математическая модель кристаллизации была введена А. Н. Колмогоровым в 1937 году в короткой, но фундаментальной заметке [13]. В современных терминах эту модель можно описать следующим образом: центры кристаллизации g появляются в фазовом пространстве $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}^d$ — пространство, где происходит кристаллизация, $\mathbf{R}_+$ — время) в соответствии с пространственно однородным точечным пуассоновским процессом $\mathcal{N}$, мера интенсивности которого имеет вид $\Lambda = \lambda^d \times m$. Кристаллы растут из центров в свободном пространстве, а в точках встречи рост прекращается.

Указанная модель интенсивно изучалась многими авторами (см., например, [14], где содержится обширная библиография). Однако основное внимание уделялось геометрическим характеристикам финальной мозаики полностью закристаллизованного пространства, а эргодические свойства оставались неисследованными.

Этот пробел был закрыт работой [15]. Авторы заметили, что процесс кристаллизации может быть адекватно описан с помощью случайного поля

$$\xi(x) = \inf_{g \in \mathcal{N}} A_g(x),$$

где $A_g(x)$ — время, за которое свободный кристалл, рожденный в точке g, достигает x. Они доказали, что при широких предположениях относительно скорости роста кристаллов поле A_g не только эргодично (его эргодичность непосредственно следует из эргодичности точечного процесса $\mathcal{N}$), а обладает гораздо более сильным свойством полной регулярности. В терминах меры m и скорости роста были получены близкие к оптимальным оценки коэффициента полной регулярности. Эти результаты дают солидную базу для статистических приложений (таких, как проверка состоятельности и асимптотической нормальности оценок параметров модели), а также дают возможность конструировать примеры полей с заданным порядком убывания коэффициента полной регулярности.

4. Локальные предельные теоремы для стохастических функционалов. ***4.1. Метод расслоений.*** Важный цикл работ Ю. А. Давыдова посвящен изучению локальной структуры образов мер и локальным предельным теоремам для стохастических функционалов. В работе [16] им был предложен новый метод «расслоений», основанный на представлении изучаемого распределения в виде смеси одномерных или конечномерных мер. С помощью этого метода были получены, в частности, следующие результаты.

— Получены достаточные условия для абсолютной непрерывности распределений гауссовских функционалов [17, 18].

— Доказано существование ограниченной плотности у распределения нормы гауссовского вектора в пространстве $\mathbf{L}_p (p > 1)$ [19]. Этот результат впоследствии был обобщен М. Талаграном на случай банаховых пространств с равномеро выпуклой нормой.

— Получены условия абсолютной непрерывности совместных распределений кратных стохастических интегралов Ито—Винера [20].

Важные результаты в этом направлении были получены также М. А. Лифшицем и Н. В. Смородиной [21].

4.2. Локальный принцип инвариантности. Метод расслоений и его модификации оказываются весьма полезными для доказательства локальных предельных теорем. В этом направлении были получены следующие результаты.

— Показано, что слабая сходимость гауссовских мер автоматически влечет сходимость в метрике L_1 плотностей распределений для функционалов из широкого класса, который определяется только предельной мерой [22].

— Получен «локальный принцип инвариантности», а именно, было установлено, что в условиях классического принципа инвариантности Донскера—Прохорова локальная предельная теорема справедлива для любого функционала, принадлежащего обширному классу, полностью определяемому предельной винеровской мерой [17, 22, 23].

— Разработан «метод надстройки» — модификация метода расслоений, который позволил существенно расширить класс функционалов в локальном принципе инвариантности [21].

— Установлена сильная сходимость распределений для кратных стохастических интегралов [20] и сильная сходимость для сверток [24].

— Найден один вариант бесконечномерной локальной предельной теоремы [25].

Основные из перечисленных результатов вошли в совместную с М. А. Лифшицем и Н. В. Смородиной монографию [21].

Работа в этом направлении была продолжена в 2006 г. В совместной с Ж.-К. Бретоном статье [26] был получен новый вариант локального принципа инвариантности для независимых и одинаково распределенных величин (X_k), а именно, за счет незначительного сужения класса функционалов удалось заменить весьма ограничительное условие конечности информации Фишера на почти оптимальное условие: существование плотности у общего распределения величин (X_k) и конечность момента порядка $2+\delta$; $\delta > 0$.

5. Стохастическая геометрия. ***5.1. Случайные зонотопы.*** В начале 1990-х годов А. М. Вершиком была поставлена задача найти естественную с вероятностной точки зрения процедуру предельного перехода, которая приводила бы в пределе к нетривиальным случайным выпуклым множествам. Первая попытка [27] была связана с так называемыми выпуклыми перестройками случайных блужданий. Она не дала окончательного решения, так как в пределе возникали детерминированные выпуклые множества, — их границей были проинтегрированные лоренцевы кривые. В то же время в этой работе была осознана связь выпуклых перестроек с суммированием множеств по Минковскому и получены первые важные результаты, показавшие, что нормированные суммы по Минковскому независимых одинаково распределенных отрезков могут сходиться по распределению к случайному выпуклому множеству, обладающему интересными свойствами: оно является устойчивым случайным элементом конуса $\mathcal{K}_d$ компактных выпуклых подмножеств и имеет нетривиальную структуру границы канторовского типа.

Результаты Вершика—Давыдова были развиты и обобщены в нескольких направлениях в работе [28].

1. Было показано, что нормированные суммы по Минковскому

$$Z_n = \frac{1}{B_n}\sum_1^n [0, X_i],$$

где X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, $X_i \in \mathbf{R}^d$, слабо сходятся к невырожденному пределу Z_α тогда и только тогда, когда их общее распределение удовлетворяет условию регулярного изменения с показателем α, $0 < \alpha < 1$, и некоторой спектральной мерой σ.

2. Было установлено, что предельное случайное множество Z_α является устойчивым и допускает представление в виде ряда ЛеПажа:

$$Z_\alpha = \sum_1^\infty \Gamma_k^{-1/\alpha}\varepsilon_k,$$

где (Γ_k) — моменты скачков стандартного пуассоновского процесса, а (ε_k) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, независящая от (Γ_k), с общим распределением σ, сосредоточенным на единичной сфере S^{d-1}.

3. Было показано, что в отличие от классического случая устойчивых распределений в $\mathbf{R}^d$ распределения множеств Z_α являются взаимно сингулярными при различных α.

4. Установлено, что если конус, порожденный носителем меры σ, совпадает с $\mathbf{R}^d$, то с вероятностью 1 множество крайних точек границы ∂Z_α является канторовским лебеговой меры нуль.

5.2. Устойчивые законы в конусах. Классическое условие строгой устойчивости: *для любых* $a, b \geq 0$

$$a^{1/\alpha}X_1 + b^{1/\alpha}X_2 = (a+b)^{1/\alpha}X,$$

где X_1, X_2 — независимые копии X, имеет смысл всякий раз, когда в области значений K элемента X определено сложение и умножение на неотрицательные константы, т. е. когда K — выпуклый конус.

Результаты [28], в которых появляется устойчивый элемент в конусе компактных выпуклых множеств и его разложение в ряд ЛеПажа, послужили одной из отправных точек для фундаментальной работы [29] о строго устойчивых распределениях в абстрактных выпуклых конусах. Приведем некоторые из основных достижений этой работы.

1. Показано, что техника, основанная на точечных процессах, является мощным инструментом для изучения устойчивых распределений в K. В частности, она позволяет доказать существование таких распределений, что совершенно неочевидно.

2. Установлено, что первичным, базовым, понятием устойчивости следует считать устойчивость пуассоновских точечных процессов, и найдены все такие процессы.

3. Доказано, что множество E тех значений α, при которых существует случайный α-устойчивый элемент K, определяется структурой конуса и связано, в основном, со сходимостью рядов ЛеПажа в этом конусе. Так, например, в случае $K = \mathbf{R}^d$ мы получаем $E = (0, 2]$, в случае $K = \mathcal{K}_d$ имеем $E = (0, 1)$, а в случае конуса $K = (\mathbf{R}^1_+, \max)$, в котором в качестве сложения берется максимум, получаем $E = \mathbf{R}_+$.

4. Показано, что классическая устойчивость и макс-устойчивость — это два частных случая указанной общей схемы.

5.3. Выпуклые оболочки. Одной из важных задач стохастической геометрии является изучение предельного поведения выпуклой оболочки $C_n = \mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_n)$ выборки случайных элементов $X_1, \ldots, X_n$ при росте ее объема.

В гауссовском случае исчерпывающий ответ был получен в [30].

Пусть (X_n) — независимые одинаково распределенные случайные элементы сепарабельного банахового пространства B с общим гауссовским распределением $\mathcal{P}$. Предположим, что $\mathbf{E}X_1 = 0$. Тогда с вероятностью 1 при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2 \log n}} C_n \to C,$$

где C — эллипсоид рассеивания распределения $\mathcal{P}$, а сходимость понимается в смысле расстояния Хаусдорфа ρ. Более того, было показано, что с вероятностью 1

$$\rho\left(\frac{1}{\sqrt{2 \log n}} C_n,\, C\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right).$$

Впоследствии (см. [31]), этот результат получил глубокое обобщение на случай стационарных гауссовских процессов и полей, удовлетворяющих условию слабой зависимости.

Характер поведения последовательности C_n резко меняется, когда мы переходим к негауссовским выборкам. В работе [32] было показано, что если последовательность (X_n) независимых одинаково распределенных случайных элементов сепарабельного банахового пространства B удовлетворяет условию регулярного изменения с показателем α, спектральной мерой σ и нормирующими константами B_n, то тогда имеет место слабая сходимость

$$\frac{1}{B_n} C_n \Rightarrow C,$$

где $C = \mathrm{conv}(\Pi_\alpha)$, а Π_α — пуассоновский точечный процесс с мерой интенсивности $\sigma \times m_\alpha$, m_α — мера на $\mathbf{R}_+$ с плотностью $\alpha x^{-1-\alpha}$.

В частном случае, когда $B = \mathbf{R}^d$, а конус, порожденный носителем меры σ, совпадает с $\mathbf{R}^d$, предельное множество с вероятностью 1 является случайным политопом, содержащим 0 в своей внутренности.

6. Упорядоченные случайные величины. На протяжении многих лет в Ленинграде — Санкт-Петербурге неизменный интерес вызывали исследования, связанные с изучением поведения сумм различных случайных величин. Со временем появилась необходимость работать и с более сложными случайными конструкциями. В частности, за последние 50 лет здесь на кафедре теории вероятностей и математической статистики достаточно много внимания было уделено изучению различных видов упорядоченных случайных величин.

Выделим здесь три классических вида: максимумы последовательных сумм, порядковые статистики и рекордные величины.

6.1. Максимумы последовательных сумм. Рассмотрим исходную последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и их последовательные суммы
$$S_0 = 0, \quad S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$
Пусть также
$$\bar{S}_n = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Видим, что рассматриваемые максимумы сумм связаны соотношением
$$\bar{S}_1 \le \bar{S}_2 \le \ldots \le \bar{S}_n \le \ldots$$
и представляют собой последовательность упорядоченных по возрастанию случайных величин.

Работая с исходными суммами S_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, можно использовать независимость разностей $(S_n - S_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ Это удобное свойство теряется при переходе к величинам $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots$ При их изучении требуются уже другие подходы.

Интересно отметить, что если в классической постановке, когда исходные величины X_1, X_2, … независимы, одинаково распределены, имеют математические ожидания $a = \mathbf{E}X_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и дисперсии $\sigma^2 > 0$, гарантируется сходимость при $n \to \infty$ распределений сумм $(S_n - an)/\sigma n^{1/2}$ к стандартному $N(0,1)$-нормальному закону с функцией распределения
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\} dt$$
и этот предел не зависит от параметра сдвига a, то в аналогичной ситуации надлежащим образом центрированные и нормированные максимумы $\bar{S}_n$ уже имеют различные предельные распределения, зависящие от величины математического ожидания a. Такого рода ситуации были рассмотрены В. В. Петровым, В. Б. Невзоровым, Т. В. Араком, И. С. Ахундовым (см., например, В. Б. Невзоров и В. В. Петров [33], В. Б. Невзоров [34–38], Т. В. Арак и В. Б. Невзоров [39], И. С. Ахундов [40, 41]). В частности, в случае, когда $a = 0$, был получен ряд различных оценок скорости сходимости распределения величин $\bar{S}_n/\sigma n^{1/2}$ к предельной функции распределения $H(x) = \max\{0, 2\Phi(x) - 1\}$. При значениях

$a > 0$ предельным уже становилось стандартное $N(0,1)$-нормальное распределение.

И. С. Ахундов [40] исследовал также асимптотическое поведение несколько иных максимальных сумм вида

$$V(n) = \max_{1 \le k \le n} (S_k/k).$$

Рассматривались также (В. Б. Невзоров [42], И. С. Ахундов [41]) предельные распределения членов вариационных рядов $S_{m,n}$, построенных по суммам $S_1, S_2, \dots, S_n$.

6.2. Порядковые статистики. Имеем исходный набор случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ и строим по ним вариационный ряд $X_{1,n} \le X_{2,n} \le \dots \le X_{n,n}$, элементы которого называются порядковыми статистиками. Имеется множество причин, которые делают эти величины популярными. Особенно в этом отношении всегда выделялись крайние члены вариационных рядов — экстремальные порядковые статистики $X_{1,n}$ и $X_{n,n}$.

Даже то, что часто, имея дело с удобными в обращении независимыми исходными величинами, переходят все-таки к работе с заведомо зависимыми порядковыми статистиками, говорит о необходимости иметь всевозможные специальные теоретические результаты для различных членов вариационных рядов. Имеется множество статей и книг, в которых приводятся для них специфические факты и нужные формулы. Тем не менее, появляются новые и новые схемы и результаты, описывающие поведение различных типов порядковых статистик.

Не остались в стороне от их изучения и представители петербургской вероятностной школы. Например, В. А. Егоровым и В. Б. Невзоровым [43–46] был получен ряд предельных теорем для порядковых статистик, для сумм так называемых индуцированных порядковых статистик, для линейных комбинаций абсолютных порядковых статистик. Изучались, в частности, упорядоченные спейсинги порядковых статистик и исследовались большие уклонения средних членов вариационных рядов. Ряд результатов (В. Б. Невзоров [47, 48]) был получен для порядковых статистик, построенных по различным наборам неодинаково распределенных исходных случайных величин.

Большое внимание было уделено характеризациям многих вероятностных распределений свойствами порядковых статистик. Такие результаты получены С. М. Ананьевским, В. О. Зыковым, Н. М. Марудовой, В. Б. Невзоровым, В. К. Сагателяном. Можно привести здесь ряд соответствующих статей: С. М. Ананьевский и В. Б. Невзоров [49], А. Берред и В. Б. Невзоров [50], В. О. Зыков и В. Б. Невзоров [51], Н. М. Марудова и В. Б. Невзоров [52], В. Б. Невзоров [53–59], В. К. Сагателян [60].

Различные свойства порядковых статистик позволили получить не только сравнительно простые характеризации экспоненциальных, логистических распределений, распределения Стьюдента с двумя степенями свободы, но и некоторые характеризации других, достаточно сложных и не очень распространенных, вероятностных распределений.

Приведем здесь лишь некоторые простейшие частные варианты существенно более сложных соотношений, характеризующих то или иное семейство вероятностных распределений.

Исследовались, в частности, такие регрессионные равенства, в которых фигурируют выборочные медианы и середины квази-размахов:

$$\mathbf{E}((X_{k,2k+1} + X_{k+2,2k+1})/2 \mid X_{k+1,2k+1} = x) = x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Приводились характеризации распределений различными соотношениями вида

$$\mathbf{E}(M_{k-j} + M_{k+r} \mid M_k = x) = ax + b,$$

где $M_n = X_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a > 0$, $-\infty < b < \infty$, и равенствами по распределению различных порядковых статистик $X_{r,n}$ и $X_{s,m}$.

Можно также отметить ряд характеризаций, в которых фигурировали экспоненциальные сдвиги порядковых статистик. Например, рассматривались независимые $E(1)$-экспоненциально распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и соответствующие экспоненциальные максимумы

$$\xi_{m,m} = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

В этом случае различные результаты были получены для распределений, характеризуемых, например, соотношениями вида

$$X_{n,n} - \xi_{r,r} \stackrel{d}{=} X_{m,m} - \xi_{r-1,r-1}$$

и некоторыми другими.

6.3. Рекордные моменты и рекордные величины. Рекордные величины тесно связаны с порядковыми статистиками и, в первую очередь, с крайними членами вариационных рядов.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (X_n). Определим для этой последовательности рекордные моменты $L(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots$ следующим образом:

$$L(1) = 1, \quad X(1) = X_1, \quad L(n+1) = \min\{j : X_j > X_{L(n)}\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$X(n) = X_{L(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Аналогичным образом можно определить для исходной последовательности случайных величин слабые рекордные моменты $l(n)$ и слабые рекордные величины $\tilde{X}(n)$:

$$l(1) = 1, \quad \tilde{X}(1) = X_1, \quad l(n+1) = \min\{j > l(n) : X_j \geq X_{l(n)}\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{X}(n) = X_{l(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Слабые рекорды отличаются от введенных в (19) рекордов лишь тем, что в этом случае повторение (не обязательно превышение!) предыдущего рекордного значения также засчитывается как новое рекордное достижение. Имеет смысл рассматривать слабые рекорды только для дискретных случайных величин, так как в случае непрерывных распределений совпадение двух каких-то случайных величин в исходной последовательности имеет нулевую вероятность.

Если быть более точными, то следует указать, что в (19) и (20) приведены определения *верхних рекордных моментов* $L(n)$, *верхних рекордных величин* $X(n)$, *слабых верхних рекордных моментов* $l(n)$ и *слабых верхних рекордных величин* $\tilde{X}(n)$.

Дело в том, что аналогичным образом определяются и соответствующие *нижние рекордные моменты* и *нижние рекордные величины.* Для этого в соотношениях (19) и (20) знаки неравенств $>$ и $\geq$ достаточно заменить, соответственно, знаками $<$ и $\leq$. Результаты, полученные для верхних рекордов в последовательностях $X_1, X_2, \ldots$, практически сразу переносятся на нижние рекорды для последовательностей $W_1 = -X_1, W_2 = -X_2, \ldots$ Поэтому, как правило, если речь не идет о какой-то специальной ситуации, когда интерес представляют исключительно нижние рекордные величины, ограничиваются исследованием различных схем, связанных с верхними рекордными моментами и верхними рекордными величинами, которые и называют просто *рекордными моментами* и *рекордными величинами.*

Приведенные схемы, когда в качестве исходных берутся независимые одинаково распределенные случайные величины, соответствуют классической теории рекордов, подробное изложение которой можно найти в книге В. Б. Невзорова [61]. Наряду с исследованием таких классических рекордных схем, для которых был также получен ряд новых результатов, большое внимание уделялось изучению существенно более сложных схем, в которых фигурировали зависимые и неодинаково распределенные исходные величины. Такого рода рекордные модели рассматривались в работах В. А. Балабекяна и В. Б. Невзорова [62], В. Б. Невзорова [63–66], В. Б. Невзорова и М. Ранне [67], М. Ранне [68].

Среди таких рекордных конструкций можно выделить одно из важных обобщений классической рекордной модели — так называемую F^α-схему (П. Деовельс и В. Б. Невзоров [69, 70], В. Б. Невзоров [71]), которая интересна тем, что в ней сохраняется важное свойство независимости рекордных индикаторов, указывающих, является ли рекордом очередная в последовательности $X_1, X_2, \ldots$ случайная величина X_k, $k = 1, 2, \ldots$

Естественным обобщением классических рекордов являются k-е верхние и k-е нижние рекорды, которые фиксируются, если очередное наблюдение становится, соответственно, одной из k максимальных (не обязательно единственной максимальной!) или одной из k минимальных наблюдаемых величин. Такого рода рекорды изучались П. Деовельсом и В. Б. Невзоровым [72] и В. Б. Невзоровым [73, 74].

Рассматривались также некоторые новые рекордные конструкции, среди которых, в первую очередь, нужно выделить рекорды с подтверждением, рекорды с ограничениями, индуцированные рекорды (В. К. Сагателян [75], В. Б. Невзоров и С. А. Товмасян [58], В. Б. Невзоров и А. В. Степанов [76], В. Б. Невзоров [57]).

И. В. Бельков и В. Б. Невзоров [77] рассматривали рекордные значения в последовательностях выборочных размахов $W_n = X_{n,n} - X_{1,n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Различные результаты для моментных характеристик рекордных величин приводятся в работах В. Б. Невзорова и С. А. Товмасяна [58], В. Б. Невзорова [56], А. В. Степанова [78, 79], В. Б. Невзорова и А. В. Степанова [80].

Заключение. Таким образом, Ленинградская — Санкт-Петербургская школа теории вероятностей внесла значительный вклад в развитие теории суммирования зависимых случайных величин и теории случайных процессов.

О достижениях ее представителей в других разделах вероятностно-статистической науки будет рассказано в последующих выпусках данной серии статей. В частности, следующий выпуск будет посвящен характеризационным задачам математической статистики, построению критериев согласия на их основе, а также результатам по асимптотическому сравнению разнообразных статистических критериев.

Литература

1. *Зайцев А. Ю., Зингер А. А., Лифшиц М. А., Никитин Я. Ю., Петров В. В.* К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. I. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 201–232.

2. *Запорожец Д. Н., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., Назаров А. И.* К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. II. Случайные процессы и зависимые величины // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 367–401.

3. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей (пер. статьи 1931 г.) // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.

4. *Кас М.* On distribution of certain Wiener functionals // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 65. P. 1–13.

5. *Бородин А. Н., Ибрагимов И. А.* Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 195. СПб.: Наука, 1994.

6. *Бородин А. Н.* Случайные процессы. СПб.: Лань, 2013.

7. *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2016.

8. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наукова думка, 1970.

9. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными процессами // Теор. вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13, № 4. С. 730–737.

10. *Давыдов Ю. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15, № 3. С. 498–509.

11. *Давыдов Ю. А.* О свойстве сильного перемешивания для счетных цепей Маркова // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. С. 2.

12. *Давыдов Ю. А.* Условия перемешивания для цепей Маркова // Теор. вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18, № 2. С. 321–338.

13. *Колмогоров А. Н.* К статистической теории кристаллизации металлов // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 1, № 3. 1937. С. 355–359.

14. *Møller J.* Generation of Johnson—Mehl crystals and comparative analysis of models for random nucleation // Adv. Appl. Probab. 1995. Vol. 27. P. 367–383.

15. *Davydov Yu., Illig A.* Mixing properties of crystallization processes // North-Western European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. P. 169–191.

16. *Давыдов Ю. А.* Об абсолютной непрерывности распределений стохастических функционалов // Теор. вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 1. С. 228–229.

17. *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А.* Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1984. Т. 22. С. 61–157.

18. *Давыдов Ю. А.* Замечание об абсолютной непрерывности распределений гауссовских функционалов // Теор. вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33, № 1. С. 170–172.

19. *Давыдов Ю. А.* О распределении нормы гауссовских функционалов // Теор. вероятн. и ее примен. 1984.

20. *Давыдов Ю. А.* О распределениях кратных интегралов Винера—Ито // Теор. вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35, № 1. С. 51—62.

21. *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А., Смородина Н. В.* Локальные свойства распределений стохастических функционалов. М.: Наука, 1995. 255 с. (Английский перевод: Local properties of distributions of stochastic functionals. New-York: AMS, 1998. 184 с.)

22. *Давыдов Ю. А.* Локальные предельные теоремы для функционалов от гауссовских процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 4. С. 870–871.

23. *Давыдов Ю. А.* О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов. I // Теор. вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 4. С. 782–799.

24. *Davydov Yu. A.* On the rate of strong convergence for convolutions // J. Math. Sci. 1997. Vol. 83, N 3. P. 393–396.

25. *Давыдов Ю. А.* О бесконечномерной локальной предельной теореме // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 177. С. 46–50.

26. *Breton J.-Ch., Davydov Yu.* Local invariance principle for i.i.d. random variables // Теор. вероятн. и ее примен. 2007. Vol. 51, N 2. P. 256–278.

27. *Davydov Yu., Vershik A.* Réarrangements convexes des marches aléatoires // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1998. Vol. 34, N 1. P. 73–95.

28. *Davydov Yu., Paulauskas V., Rackauskas A.* More on p-stable convex random sets in Banach spaces // J. Theor. Probab. 2000. Vol. 13, N 1. P. 39–64.

29. *Davydov Yu., Molchanov I., Zuev S.* On strictly stable laws on convex cones // Electronic J. Probab. 2008. Vol. 13. P. 259–321.

30. *Davydov Yu.* On convex hulls of Gaussian samples // Lithuanian Math. J. 2011. Vol. 51, N 2. P. 171–179.

31. *Davydov Yu., Paulauskas V.* On the asymptotic form of convex hulls of Gaussian fields // Central Europ. J. Math. 2014. Vol. 12, N 5. P. 711–720.

32. *Davydov Yu., Dombry C.* Convex hulls of regularly varying processes // J. Math. Sci. 2014. Vol. 199, N 2. P. 150–161.

33. *Невзоров В. Б., Петров В. В.* О распределении максимума последовательных сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14, № 4. С. 708–715.

34. *Невзоров В. Б.* О сходимости распределения максимума последовательных сумм независимых симметричных случайных величин к предельному закону // Теория вероятн. и матем. статистика. 1970. № 3. С. 105–116.

35. *Невзоров В. Б.* О скорости сходимости распределения максимума последовательных сумм независимых случайных величин к нормальному закону // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16, № 2. С. 379–386.

36. *Невзоров В. Б.* О сходимости распределения максимума последовательных сумм независимых случайных величин к нормальному закону // Вестник Ленингр. ун-та. 1972. Вып. 1. С. 34–44.

37. *Невзоров В. Б.* О распределении максимальной суммы независимых слагаемых // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208, № 1. С. 43–45.

38. *Невзоров В. Б.* О максимуме последовательных сумм для распределения Коши // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 85. С. 169–174.

39. *Арак Т. В., Невзоров В. Б.* Некоторые оценки для максимума последовательных сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18, № 2. С. 402–405.

40. *Ахундов И. С.* О распределении максимума нормированных сумм // Вестник Ленингр. ун-та. 1987. Вып. 2(8). С. 99–102.

41. *Ахундов И. С.* Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для членов вариационного ряда, построенного по суммам случайных величин // Вестник Ленингр. ун-та. 1987. Вып. 2(8). С. 120–121.

42. *Невзоров В. Б.* Порядковые статистики, построенные по суммам случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30, № 1. С. 193–194.

43. *Егоров В. А., Невзоров В. Б.* Некоторые оценки скорости сходимости сумм порядковых статистик к нормальному закону // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 41. С. 105–128.

44. *Егоров В. А., Невзоров В. Б.* Сходимость к нормальному закону линейных комбинаций абсолютных порядковых статистик // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20, № 1. С. 207–215.

45. *Егоров В. А., Невзоров В. Б.* Асимптотические разложения функции распределения сумм абсолютных порядковых статистик // Вестник Ленингр. ун-та. 1975. Т. 19. С. 18–25.

46. *Егоров В. А., Невзоров В. Б.* Некоторые теоремы для индуцированных порядковых статистик // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, № 3. С. 592–599.

47. *Невзоров В. Б.* Скорость сходимости к нормальному закону порядковых статистик для неодинаково распределенных величин // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 130. С. 137–146.

48. *Невзоров В. Б.* Представления для порядковых статистик, построенных по разномасштабным экспоненциальным величинам // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 136. С. 162–164.

49. *Ананьевский С. М., Невзоров В. Б.* О семействах распределений, характеризуемых некоторыми свойствами упорядоченных случайных величин // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 345–354.

50. *Берред А., Невзоров В. Б.* Выборки без возвращения: дискретные аналоги некоторых непрерывных распределений // Записки научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 40–50.

51. *Зыков В. О., Невзоров В. Б.* О некоторых характеризациях семейств распределений, включающих логистическое или экспоненциальное, свойствами порядковых статистик // Записки научн. сем. ПОМИ. 2010. Т. 384. С. 176–181.

52. *Марудова Н. М., Невзоров В. Б.* Об одном семействе, содержащем t_2-распределение Стьюдента // Записки научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 361. С. 57–65.

53. *Невзоров В. Б.* Об одном свойстве распределения Стьюдента с двумя степенями свободы // Записки научн. сем. ПОМИ. 2002. Т. 294. С. 148–157.

54. *Невзоров В. Б.* О характеризациях распределения Стьюдента с двумя степенями свободы // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 3. С. 38–42.

55. *Невзоров В. Б.* Экстремумы и t_2-распределение Стьюдента // Записки научн. сем. ПОМИ. 2007. Т. 351. С. 232–237.

56. *Невзоров В. Б.* О среднем числе рекордов в последовательностях неодинаково распределенных случайных величин // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 28–32.

57. *Невзоров В. Б.* Рекордные величины с ограничениями // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 70–74.

58. *Невзоров В. Б., Товмасян С. А.* О максимальном значении среднего числа рекордов // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 2. С. 196–200.

59. *Невзоров В. Б.* О некоторых регрессионных соотношениях, связывающих выборочные средние и порядковые статистики // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Вып. 3. С. 364–368.

60. *Сагателян В. К.* Характеризация распределений равенством порядковых статистик // Записки научн. сем. ПОМИ. 2007. Т. 341. С. 168–173.

61. *Невзоров В. Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.

62. *Балабекян В. А., Невзоров В. Б.* О числе рекордов в последовательности серий неодинаково распределенных случайных величин. В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. Вып. 1. С. 147–153.

63. *Nevzorov V. B.* Asymptotic distributions of records in nonstationary schemes // Journal of Statistical Planning and Inference. 1995. Vol. 44. P. 261–273.

64. *Невзоров В. Б.* Рекордные моменты в случае неодинаково распределенных случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29, № 4. С. 808–809.

65. *Невзоров В. Б.* О рекордных моментах и межрекордных временах для последовательностей неодинаково распределенных случайных величин // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1985. Т. 142. С. 109–118.

66. *Невзоров В. Б.* Рекордные моменты и их обобщения // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 31, № 3. С. 629–630.

67. *Невзоров В. Б., Ранне М.* О рекордных моментах в последовательностях неодинаково распределенных дискретных случайных величин // Записки научн. сем. ПОМИ. 1992. Т. 194. С. 124–133.

68. *Ранне М.* Рекорды в последовательностях серий неодинаково распределенных случайных величин // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1991. Вып. 1. С. 79–83.

69. *Деовельс П., Невзоров В. Б.* Рекорды в F^{α}-схеме. I. Мартингальные свойства // Записки научн. сем. ПОМИ. 1993. Т. 207. С. 19–36.

70. *Деовельс П., Невзоров В. Б.* Рекорды в F^{α}-схеме. II. Предельные теоремы // Записки научн. сем. ПОМИ. 1994. Т. 216. С. 42–51.

71. *Невзоров В. Б.* Аналог рекордной F^{α}-схемы для дискретных распределений // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2 (60). Вып. 3. С. 48–53.

72. *Deheuvels P., Nevzorov V. B.* Limit laws for k-record times // Journal of Statistical Planning and Inference. 1994. Vol. 38, N 3. P. 273–308.

73. *Невзоров В. Б.* K-е рекордные моменты и их обобщения // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1986. Т. 153. С. 115–121.

74. *Невзоров В. Б.* Производящие функции для k-х рекордных моментов — мартингальный подход // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1990. Т. 184. С. 208–214.

75. *Сагателян В. К.* Об одной новой модели рекордных величин // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 144–147.

76. *Nevzorov V. B., Stepanov A. V.* Records with confirmations // Statistics and Probability Letters. 2014. Vol. 95. P. 39–47.

77. *Бельков И. В., Невзоров В. Б.* О рекордных величинах в последовательностях выборочных размахов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 535–540. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.401

78. *Степанов А. В.* О логарифмических моментах для межрекордных времен // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32, № 4. С. 708–710.

79. *Степанов А. В.* Характеризации геометрического класса распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 41, № 1. С. 133–136.

80. *Невзоров В. Б., Степанов А. В.* Рекорды: мартингальный подход к нахождению моментов. В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. Вып. 2. С. 171–181.

Статья поступила в редакцию 22 мая 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Бородин Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; borodin@pdmi.ras.ru
Давыдов Юрий Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; davydov.youri@gmail.com
Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; valnev@mail.ru

To the history of Saint-Petersburg school of Probability and Statistics. III. Functional distributions, stochastic geometry and extrema

A. N. Borodin[1,2], *Yu. A. Davydov*[1], *V. B. Nevzorov*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] St. Petersburg Department of V. A. Steklov Mathematical Institute of RAS,
nab. reki Fontanki, 27, St. Petersburg, 191023, Russian Federation

For citation: Borodin A. N., Davydov Yu. A., Nevzorov V. B. To the history of Saint-Petersburg school of Probability and Statistics. III. Functional distributions, stochastic geometry and extrema. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 572–596. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.404 (In Russian).

This is the third article in a series of surveys dedicated to the scientific achievements of the Leningrad — Saint-Petersburg school of Probability and Statistics in the period from 1947 to 2017. It is devoted to some studies of functionals of random processes, some problems of stochastic geometry and some questions connected with ordered systems of random variables. In the first section of the article, we talk about problems of calculation of distributions for various functionals of Brownian motion. The so-called invariance principles are also considered for Brownian local times and random walks. The second section is devoted to limit theorems for weakly dependent random variables and to local limit theorems for stochastic functionals. A method of stratifications and the local invariance principle are also mentioned. In the following section, we consider the asymptotic behavior of convex hulls of random samples and limit theorems for random zonotopes. An important relation between Poisson point processes and stable distributions is discussed. In the final part, we provide exhaustive information on research related to ordered systems of random variables. The maxima of consecutive sums, order statistics and record values are considered in detail.

Keywords: Brownian motion, distribution of functionals, Brownian local time, random walk, invariance principle, fibering method, local invariance principle, limit theorems, random zonotopes, convex hulls, order statistics, extrema, records.

References

1. Lifshits M. A., Nikitin Ya. Yu., Petrov V. V., Zaitsev A. Yu., Zinger A. A., "Toward the History of the Saint Petersburg School of Probability and Statistics. I. Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51**, issue 2, 144–163 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118020115

2. Ibragimov D. N., Lifshits M. A., Nazarov A. I., Zaporozhets D. N., "On the History of Saint Petersburg School of Probability and Statistics. II. Random Processes and Dependent Variables", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**, issue 3, 213–236 (2018).

3. Kolmogorov A. N., "On the analytic methods of probability theory", *Uspekhi Mat. Nauk* **5**, 5–41 (1938).

4. Kac M., "On distribution of certain Wiener functionals", *Trans. Amer. Math. Soc.* **65**, 1–13 (1949).

5. Borodin A. N., Ibragimov I. A., "Limit Theorems for Functionals of Random Walks", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **195**(2) (Amer. Math. Soc., 1995).

6. Borodin A. N., *Stochastic Processes* (Springer Cham, Switzerland, 2017).

7. Borodin A. N., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion — Facts and Formulae* (corrected 2nd ed., Springer Basel, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015).

8. Skorokhod A. V., Slobodenyuk N. P., *Limit theorems for random walks* (Naukova dumka, Kiev, 1970) [in Russian].

9. Davydov Yu. A., "Convergence of Distributions Generated by Stationary Stochastic Processes", *Theory Probab. Appl.* **13**(4), 691–696 (1968).

10. Davydov Yu. A., "The Invariance Principle for Stationary Processes", *Theory Probab. Appl.* **15**(3), 487–498 (1970).

11. Davydov Yu. A., "On strong mixing condition for countable Markov chains", *Soviet. Math. Dokl.* **187**, 2 (1969).

12. Davydov Yu. A., "Mixing Conditions for Markov Chains", *Theory Probab. Appl.* **18**(2), 312–328 (1974).

13. Kolmogorov A. N., "On The Statistical Theory of Metal Crystallization", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **1**(3), 355–360 (1937).

14. Møller J., "Generation of Johnson—Mehl crystals and comparative analysis of models for random nucleation", *Adv. Appl. Probab.* **27**, 367–383 (1995).

15. Davydov Yu., Illig A., "Mixing properties of crystallization processes", *North-Western European Journal of Mathematics* **1**, 169–191 (2015).

16. Davydov Yu. A., "On absolute continuity for distributions of stochastic functionals", *Theory Probab. Appl.* **23**(1), 228–229 (1978).

17. Davydov Yu. A., Lifshits M. A., "Fibering method in some probabilistic problems", *Journal of Soviet Mathematics* **31**(2), 2796–2858 (1985).

18. Davydov Yu. A., "A Remark on the Absolute Continuity of Distributions of Gaussian Functionals", *Theory Probab. Appl.* **33**(1), 158–161 (1989).

19. Davydov Yu. A., "On distribution of the norm for Gaussian functionals", *Theory Probab. Appl.* **29**(4), 809 (1984).

20. Davydov Yu. A., "On Distributions of Multiple Wiener–Ito Integrals", *Theory Probab. Appl.* **35**(1), 27–37 (1991).

21. Davydov Yu. A., Lifshits M. A., Smorodina N. V., *Local properties of distributions of stochastic functionals* (AMS, New York, 1998, 184 p.).

22. Davydov Yu. A., "Local limit theorems for functionals of Gaussian processes", *Theory Probab. Appl.* **26**(4), 859–860 (1982).

23. Davydov Yu. A., "On Strong Convergence of Distributions of Functionals of Random Processes. I", *Theory Probab. Appl.* **25**(4), 772–789 (1981).

24. Davydov Yu. A., "On the rate of strong convergence for convolutions", *J. Math. Sci.* **83**(3), 393–396 (1997).

25. Davydov Yu. A., "A variant of an infinite-dimensional local limit theorem", *Journal of Soviet Mathematics* **61**(1), 1853–1856 (1992).

26. Breton J.-Ch., Davydov Yu. A., "Local Invariance Principle for Independent and Identically Distributed Random Variables", *Theory Probab. Appl.* **51**(2), 256–278 (2007).

27. Davydov Yu., Vershik A., "Réarrangements convexes des marches aléatoires", *Ann. Inst. Henri Poincaré* **34**(1), 73–95 (1998).

28. Davydov Yu., Paulauskas V., Rackauskas A., "More on p-stable convex random sets in Banach spaces", *J. Theor. Probab.* **13**(1), 39–64 (2000).

29. Davydov Yu., Molchanov I., Zuev S., "On strictly stable laws on convex cones", *Electronic J. Probab.* **13**, 259–321 (2008).

30. Davydov Yu., "On convex hulls of Gaussian samples", *Lithuanian Math. J.* **51**(2), 171–179 (2011).

31. Davydov Yu., Paulauskas V., "On the asymptotic form of convex hulls of Gaussian fields", *Central Europ. J. Math.* **12**(5), 711–720 (2014).

32. Davydov Yu., Dombry C., "Convex hulls of regularly varying processes", *J. Math. Sci.* **199**(2), 150–161 (2014).

33. Nevzorov V. B., Petrov V. V., "On the distribution of the maximum of the sequential sums of independent random variables", *Theory Probab. Appl.* **14**(4), 708–715 (1969).

34. Nevzorov V. B., "On the convergence of the distribution of the maximum of the sequential sums of independent symmetrical random variables to the limit law", *Theory Probab. Appl.* **15**(3), 105–116 (1970).

35. Nevzorov V. B., "On the rate of convergence of the distribution of the maximum of the sequential sums of independent random variables to the normal law", *Theory Prob. Appl.* **16**(2), 379–386 (1971).

36. Nevzorov V. B., “On the convergence of the distribution of the maximum of the sequential sums of independent random variables to the normal law”, *Vestnik of Leningrad University* issue 1, 34–44 (1972).

37. Nevzorov V. B., “On the distribution of the maximal sum of independent summands”, *Reports of Academy of Sciences of USSR* **208**(1), 43–45 (1973).

38. Nevzorov V. B., “On the maximum of sequential sums for Cauchy distribution”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **85**, 169–174 (1979).

39. Arak T. V., Nevzorov V. B., “Some estimates for the maximum of sequential sums of independent random variables”, *Theory Probab. Appl.* **18**(2), 402–405 (1973).

40. Akhundov I. S., “On the distribution of the maximum of the normed sums”, *Vestnik of Leningrad University* issue 2(8), 99–102 (1987).

41. Akhundov I. S., “On the estimate of the rate of convergence in the central limit theorem for elements of the variational series, based on sums of random variables”, *Vestnik of Leningrad University* issue 2(8), 120–121 (1987).

42. Nevzorov V. B., “Record and interrecord times for sequences of nonidentically distributed random variables”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **142**, 109–118 (1985).

43. Egorov V. A., Nevzorov V. B., “Some estimates of the convergence rate of the sums of order statistics to the normal law”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **41**, 105–128 (1974).

44. Egorov V. A., Nevzorov V. B., “Convergence of the linear combinations of absolute order statistics to the normal law”, *Theory Probab. Appl.* **20**(1), 207–215 (1975).

45. Egorov V. A., Nevzorov V. B., “Asymptotical decompositions of the distribution functions of sums of the absolute order statistics”, *Vestnik of Leningrad University* issue 19, 18–25 (1975).

46. Egorov V. A., Nevzorov V. B., “Some theorems for induced order statistics”, *Theory Probab. Appl.* **27**(3), 592–599 (1982).

47. Nevzorov V. B., “Representations of order statistics, based on exponential variables with different scaling parameters”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **136**, 162–164 (1984).

48. Nevzorov V. B., “The rate of the convergence to the normal law of order statistics for nonidentically distributed variables”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St.Petersburg Mathematical Institute* **130**, 137–146 (1983).

49. Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B., “On families of distributions which are characterized by some properties of ordered random variables”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **49**, issue 3, 197–203 (2016).

50. Berred A., Nevzorov V. B., “Sampling without replacement: discrete analogues of some continuous distributions”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **311**, 40–50 (2004).

51. Zykov V. O., Nevzorov V. B., “On some characterizations of families of distributions, including logistic or exponential, by properties of order statistics”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **384**, 176–181 (2010).

52. Marudova N. M., Nevzorov V. B., “On one family including the t_2-distribution of Student”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **361**, 57–65 (2008).

53. Nevzorov V. B., “On one property of Student’s distribution with two degrees of freedom”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **294**, 148–157 (2002).

54. Nevzorov V. B., “On characterizations of Student distribution with two degrees of freedom”, *Vestnik of St. Petersburg State University. Ser. 1* issue 1, 38–42 (2005).

55. Nevzorov V. B., “Extremes and Student t_2-distribution”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **351**, 232–237 (2007).

56. Nevzorov V. B., “On the average number of records for sequences of nonidentically distributed random variables”, *Vestnik St. Petersburg State University. Mathematics* **45**, issue 4, 164–167 (2012).

57. Nevzorov V. B., “Record values with restrictions”, *Vestnik St. Petersburg State University. Mathematics* **46**, issue 3, 70–74 (2013).

58. Nevzorov V. B., Tovmasjan S. A., “On the maximal value of the average number of records”, *Vestnik St. Petersburg State University. Mathematics* **47**, issue 2, 64–67 (2014).

59. Nevzorov V. B., “On some regressional relations connecting sample means and order statistics”, *Vestnik St. Petersburg State University. Mathematics* **48**, issue 3, 164–167 (2015).

60. Sagateljan V. K., “Characterization of distributions by equalities of order statistics”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **341**, 168–173 (2007).

61. Nevzorov V. B., *Records. Mathematical theory* (Phazis, Moscow, 2000, 244 p.) [in Russian].

62. Balabekyan V. A., Nevzorov V. B., “On number of records in a sequence of series of nonidentically distributed random variables”, in *Rings and Modules. Limit Theorems of Probability Theory* **1**, 147–153 (1986) [in Russian].

63. Nevzorov V. B., “Asymptotic distributions of records in nonstationary schemes”, *Journal of Statistical Planning and Inference* **44**, 261–273 (1995).

64. Nevzorov V. B., “Record times in the case of nonidentically distributed random variables”, *Theory Prob. Appl.* **29**(4), 808–809 (1984).

65. Nevzorov V. B., “Order statistics based on the sums of random variables”, *Theory Probab. Appl.* **30**(1), 193–194 (1985).

66. Nevzorov V. B., “Record times and their generalizations”, *Theory Probab. Appl.* **31**(3), 629–630 (1986).

67. Nevzorov V. B., Rannen M., “On record moments in sequences of nonidentically distributed discrete random variables”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **194**, 124–133 (1992).

68. Rannen M., “Records in sequences of series of nonidentically distributed random variables”, *Vestnik St. Petersburg State University. Mathematics* **24**(1), 79–83 (1991).

69. Deheuvels P., Nevzorov V. B., “Records in F^{α}-scheme. I. Martingale properties”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **207**, 19–36 (1993).

70. Deheuvels P., Nevzorov V. B., “Records in F^{α}-scheme. II. Martingale properties”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **216**, 42–51 (1994).

71. Nevzorov V. B., “Analogue of the record F^{α}-scheme for discrete distributions”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48**, issue 1, 18–25 (2015).

72. Deheuvels P., Nevzorov V. B., “Limit laws for k-record times”, *Journal of Statistical Planning and Inference* **38**(3), 273–308 (1994).

73. Nevzorov V. B., “On k-th record times and their generalizations”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **153**, 115–121 (1986).

74. Nevzorov V. B., “Generating functions for k-th record values — a martingale approach”, *Lect. Notes of Sci. Seminars of St. Petersburg Mathematical Institute* **184**, 208–214 (1990).

75. Sagateljan V. K., “On one new model of record values”, *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **41**, issue 3, 282–285 (2008).

76. Nevzorov V. B., Stepanov A. V., “Records with confirmations”, *Statistics and Probability Letters* **95**, 39–47 (2014).

77. Belkov I. V., Nevzorov V. B., “On record values in sequences of sample ranges”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **50**, issue 4, 325–328 (2017).

78. Stepanov A. V., “On logarithmic moments for inter-record times”, *Theory Probab. Appl.* **32**(4), 708–710 (1987).

79. Stepanov A. V., “Characterizations of geometrical type of distributions”, *Theory Probab. Appl.* **41**(1), 133–136 (1989).

80. Nevzorov V. B., Stepanov A., “Records: martingale approach to finding of moments”, in *Rings and Modules. Limit Theorems of Probability Theory* issue 2, 171–181 (1988) [in Russian].

Received: May 22, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author’s information:

Andrey N. Borodin — borodin@pdmi.ras.ru
Yuriy A. Davydov — davydov.youri@gmail.com
Valeriy B. Nevzorov — valnev@mail.ru