УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 39A30

Синтез стабилизирующих управлений по выходам для некоторого класса непрерывных и импульсных неопределенных систем*

И. Е. Зубер[1], *А. Х. Гелиг*[2]

[1] Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Зубер И. Е., Гелиг А. Х.* Синтез стабилизирующих управлений по выходам для некоторого класса непрерывных и импульсных неопределенных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 597–605. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.405

Рассматривается система: $\dot{x}_1 = \varphi_1(\cdot) + \rho_1 x_{l+1}, \ldots \dot{x}_m = \varphi_m(\cdot) + \rho_m x_n$, $\dot{x}_{m+1} = \varphi_{m+1}(\cdot) + u_1, \ldots \dot{x}_n = \varphi_n(\cdot) + u_l$, где $x_1, \ldots, x_n$ — состояние системы, $u_1, \ldots, u_l$ — управления, $m = n - l$, $\frac{n}{l}$ не является целым числом и $l \geq 2$. Предполагается, что доступны измерению лишь выходы $x_1, \ldots, x_l$ $(l < n)$. Функции $\varphi_i(\cdot)$ являются неупреждающими функционалами произвольной природы, а $\rho_i = \rho_i(t, x_1, \ldots, x_l)$, причем $0 < \rho_- \leq \rho_i(t, x_1, \ldots, x_l) \leq \rho_+$. С помощью метода backstepping строится квадратичная функция Ляпунова и синтезируются управления, при которых замкнутая система становится глобально экспоненциально устойчивой. Рассмотрена также стабилизация с помощью синхронных модуляторов при достаточно высокой частоте импульсации.

Ключевые слова: неопределенные системы, стабилизация по выходам, глобальная экспоненциальная устойчивость.

1. Введение. В [1–3] с помощью аналитических методов было построено стабилизирующее управление по скалярному выходу для систем, матрица которых содержит неопределенные элементы, расположенные ниже первой наддиагонали, состоящей из единичных элементов. В [4] были построены стабилизирующие как непрерывные, так и импульсные управления по двумерному выходу для неопределенных систем с единичной второй наддиагональю. В [5] были синтезированы непрерывные и импульсные управления по l-мерному выходу для неопределенных систем с единичной l-й наддиагональю. В предлагаемой статье рассматриваются неопределенные системы, у которых l-я наддиагональ состоит из знакоопределенных элементов, являющихся функциями от времени и наблюдаемых координат. С помощью построения функций Ляпунова методом backstepping получены стабилизирующие как непрерывные, так и импульсные управления по l-мерному выходу.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00102а).

2. Постановка задачи. Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(\cdot) + \rho_1 x_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_m = \varphi_m(\cdot) + \rho_m x_n, \\ \dot{x}_{m+1} = \varphi_{m+1}(\cdot) + u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(\cdot) + u_l, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1, \dots, x_n$ — состояние системы, $u_1, \dots, u_l$ — управления, $m = n - l$, $\frac{n}{l}$ не является целым числом и $l \geq 2$. Предполагается, что доступны измерению лишь выходы $x_1, \dots, x_l$ ($l < n$). В (1) $\varphi_i(\cdot)$ — неупреждающие функционалы произвольной природы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} |\varphi_i(\cdot)| \leq c(|x_1| + \dots + |x_l|), \quad i \in \overline{1, l}, \\ |\varphi_i(\cdot)| \leq c(|x_1| + \dots + |x_{2l}|), \quad i \in \overline{l+1, 2l}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |\varphi_i(\cdot)| \leq c(|x_1| + \dots + |x_{pl}|), \quad i \in \overline{(p-1)l, pl}, \\ |\varphi_i(\cdot)| \leq c(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|), \quad i \in \overline{pl+1, n}, \end{cases} \tag{2}$$

где $n = pl + \tau$, $< \tau < l$, c — постоянная. В (1) $\rho_i = \rho_i(t, x_1, \dots, x_l)$, причем

$$0 < \rho_- \leq \rho_i(t, x_1, \dots, x_l) \leq \rho_+, \tag{3}$$

где ρ_-, ρ_+ — известные константы. Ставится задача синтеза непрерывных и импульсных управлений $u_1, \dots, u_l$, при которых замкнутая система становится глобально асимптотически устойчивой.

3. Непрерывное управление. Обозначим через $\hat{x}_i$ ($i = 1, \dots, n$) координаты наблюдателя и введем ошибки наблюдения

$$\varepsilon_i = \frac{x_i - \hat{x}_i}{\lambda^{q_i}}, \tag{4}$$

где $\lambda \gg 1$, а величины q_i определяются формулой

$$q_{lk-l+1} = q_{lk-l+2} = \ldots = q_{lk} = k - 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то есть $q_1 = \ldots = q_l = 0$, $q_{l+1} = \ldots = q_{2l} = 1$ и т. д. Выберем управления $u_2, \dots, u_l$ по формулам

$$u_i = \lambda^{q_{i+m}+1} x_i, \quad i \in \overline{2, l}, \tag{6}$$

и определим следующие уравнения наблюдателя:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \lambda^{q_i+1} a_{i,1} \hat{x}_1 + \rho_i \hat{x}_{i+l} \quad (i \in \overline{1, m}), \\ \dot{\hat{x}}_{m+1} = \lambda^{q_{m+1}+1} a_{m+1,1} \hat{x}_1 + u_1, \\ \dot{\hat{x}}_{m+i} = \lambda^{q_{m+i}+1} a_{m+i,1} \hat{x}_1 + \lambda^{q_{m+i}+1-q_i} \hat{x}_i \quad (i \in \overline{2, l}). \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $a_{k,1}$ — элементы матрицы A, у которой первый столбец состоит из элементов $a_{k,1}$, l-я наддиагональ состоит из элементов $\rho_1, \dots, \rho_m$, $(m+1)$-я поддиагональ состоит из элементов $a_{m+1,1}, 1, \dots, 1$. Остальные элементы матрицы нулевые.

Легко проверить, что вектор ε с координатами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon} = \lambda A\varepsilon + b + z, \tag{8}$$

где $b_i = -\lambda a_{1,i} x_1$, $z_i = \frac{\varphi_i(\cdot)}{\lambda^{q_i}}$, b_i и z_i — координаты векторов b и z.

Найдем постоянную и положительно определенную матрицу H, удовлетворяющую неравенству

$$A^* H + HA \leq -\gamma I, \tag{9}$$

где $\gamma > 0$, I — единичная матрица, $*$ — знак транспонирования (все величины вещественные). Представим матрицу A в следующем виде:

$$A = Q + M,$$

где Q получается из A при $\rho_1 = \ldots = \rho_m = 1$. У матрицы M l-я наддиагональ состоит из элементов $\rho_i - 1$ $(i \in \overline{1,m})$, все остальные ее элементы равны нулю. Очевидно, что $Q = A_0 + se_1^*$, где $e_1^* = (1, 0, \dots, 0)$, $s^* = (a_{1,1} - 1, a_{2,1}, \dots, a_{m,1}, a_{m+1,1}, a_{m+2,1}, \dots, a_{n,1})$. Матрица A_0 имеет следующий вид. У первого столбца первый и $(m+1)$-й элементы равны 1, остальные элементы нулевые; l-я наддиагональ и m-я поддиагональ состоят из единиц.

Рассмотрим матрицу $Q^* = A_0^* + e_1 s^*$. Пара (A_0^*, e_1) управляемая, поскольку у $\det(e_1, A_0^* e_1, \dots, (A_0^*)^{n-1} e_1)$ каждый столбец отличается от предыдущего наличием еще одного ненулевого элемента и, следовательно, все его столбцы линейно независимы. Выберем различные числа $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \ldots < \lambda_1 < 0$, отделимые от спектра матрицы A_0^*, и определим s из системы уравнений

$$s^* d_i = -1, \quad i \in \overline{1,n}, \tag{10}$$

где $d_i = (A_0^* - \lambda_i I)^{-1} e_1$. Разрешимость этой системы вытекает из управляемости пары (A_0^*, e_1) [6]. Покажем, что λ_i являются собственными числами матрицы Q^*. Рассмотрим равенство $Q^* - \lambda_i I = M(A_0^* - \lambda_i I)$, где $M = e_1 s^* (A_0^* - \lambda_i I)^{-1} + I$. Поскольку $\det(A_0^* - \lambda_i I) \neq 0$, то достаточно убедиться в справедливости равенства $\det M = 0$, которое вытекает из соотношения $Me_1 = 0$.

Рассмотрим спектральное разложение матрицы Q^*:

$$Q^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i g_i^*,$$

где

$$d_i^* g_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{11}$$

d_i — собственные векторы матрицы Q^*, g_i — собственные векторы матрицы Q, и положим

$$H = \sum_{i=1}^{n} d_i d_i^*. \tag{12}$$

Очевидно, что $H > 0$, поскольку $x^* H x = \sum\limits_{i=1}^{n} (d_i, x)^2 > 0$ при $x \neq 0$ ввиду линейной независимости векторов d_i. Из (11) следуют соотношения

$$Q^* H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i g_i^* \sum_{j=1}^{n} d_j d_j^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i d_i^*.$$

Поэтому в силу (12) получим

$$Q^*H + HQ = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i d_i^* < 2\lambda_1 H. \tag{13}$$

Оценим $D = M^*H + HM$. Положим $H = P^2$, где $P = P^*$. Очевидно соотношение

$$P^{-1}DP = P^{-1}M^*P + PMP^{-1}.$$

Обозначим через $||\cdot||$ спектральную норму матрицы. Тогда справедливы неравенства

$$||P^{-1}M^*P|| \le ||P^{-1}||||M^*||||P||, \quad ||PMP^{-1}|| \le ||P||||M||||P^{-1}||.$$

Поскольку $||P^{-1}|| = \frac{1}{||P||}$, то $||P^{-1}DP^{-1}|| \le 2||M||$. У матрицы M^*M на диагонали стоят элементы $(1-\rho_i)^2$, остальные элементы равны нулю. Поэтому $||M|| = \max\limits_{i\in\overline{1,m}} |1-\rho_i|$. Из (3) следует оценка $||M|| \le 1 + \rho_+$. Следовательно, имеем $||P^{-1}DP^{-1}|| \le 2(1+\rho_+)$ и $P^{-1}DP^{-1} \le 2(1+\rho_+)I$. Из последнего неравенства вытекает оценка $D \le 2(1+\rho_+)H$. Учитывая (13), приходим к соотношению $A^*H + HA \le 2(\lambda_1 + 1 + \rho_+)H$. Выбрав $\lambda_1 = -\rho_+ - 1.5$, получаем оценку $A^*H + HA < -H$, из которой в силу неравенства Рэлея следует формула

$$A^*H + HA < -\mu_- I, \tag{14}$$

где μ_- — минимальное собственное число матрицы H. Итак, доказано, что матрица (12) удовлетворяет неравенству (9).

Рассмотрим функцию Ляпунова $V_0 = \varkappa\varepsilon^* H\varepsilon$, где $\varkappa$ — положительная константа. В [5] было показано, что ввиду свойства (2) для ее производной, взятой в силу системы (8), справедлива оценка

$$\dot{V}_0 \le -\lambda\beta_0|\varepsilon|^2 + \varkappa_{0,1}\lambda x_1^2 + \varkappa_{0,R}R, \tag{15}$$

где

$$R = \sum_{k=2}^{n} \frac{\hat{x}_k^2}{\lambda^{2q_k}}, \tag{16}$$

β_0 пропорциональна $\varkappa$, а $\varkappa_{ij}$ здесь и далее — абсолютные константы, не зависящие от λ.

Введем обозначение $\xi_1 = x_1$ и рассмотрим функцию Ляпунова $V_1 = V_0 + \frac{\xi_1^2}{2}$. Очевидно, что

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 + \xi_1\dot{\xi}_1. \tag{17}$$

В силу (1) и (4) имеет место соотношение

$$\dot{\xi}_1 = \varphi_1 + \rho_1(\hat{x}_{l+1} + \lambda\varepsilon_{l+1}). \tag{18}$$

Положим

$$\xi_2 = \hat{x}_{l+1} + \lambda\beta_1\xi_1, \quad \text{где } \beta_1 > 0. \tag{19}$$

Тогда

$$\xi_1\dot{\xi}_1 = \xi_1\varphi_1 + \rho_1(\xi_1\xi_2 - \lambda\beta_1\xi_1^2 + \lambda\xi_1\varepsilon_{l+1}). \tag{20}$$

Очевидно неравенство $\xi_1\varphi_1 \le \xi_1^2 + \varphi_1^2$. В силу (2) справедлива оценка

$$\varphi_1^2 \le c\left(\xi_1^2 + \sum_{i=2}^{l} \hat{x}_i^2 + |\varepsilon|^2\right). \qquad (21)$$

Воспользовавшись свойством (3), получаем соотношения

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1\xi_1\xi_2 \le \lambda\rho_+^2\xi_1^2 + \frac{\xi_2^2}{\lambda}, \quad \lambda\rho_1\xi_1\varepsilon_{l+1} \le \rho_1^+\lambda(\xi_1^2 + \varepsilon_{l+1}^2), \\ -\lambda\rho_1\beta_1\xi_1^2 \le -\lambda\overline{\beta_1}\xi_1^2, \overline{\beta_1} = \beta_1\min(\rho_1, 1). \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Из (15), (17), (20), (22) вытекает оценка

$$\dot{V}_1 \le -\lambda(\beta_0 - \varkappa_{0,1})|\varepsilon|^2 - \lambda(\overline{\beta_1} - \varkappa_{1,1})\xi_1^2 + \frac{\xi_2^2}{\lambda} + \varkappa_{1,R}R. \qquad (23)$$

Введем последовательности

$$j_k = kl + 1(\mathrm{mod}\ n) \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (24)$$

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} \tau_k, \quad \text{если } j_{k+1} = j_k + l \le n, \\ \tau_k + q_{j_k} + 1, \quad \text{если } j_k + l > n \text{ и } j_{k+1} = j_k + l - \overline{q_k}n. \end{cases} \qquad (25)$$

Отметим, что $j_{n-1} = m + 1$, если $\overline{q}_{n-2} = l - 1$. Эти последовательности обладают следующим свойством.

Лемма L.

$$\tau_k + q_{j_k} - k = 0. \qquad (26)$$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi_k = \tau_k + q_{j_k} - k$. Очевидно, что $\varphi_1 = \tau_1 + q_{l+1} - 1 = 0$. Предположим, что $\varphi_k = 0$, и рассмотрим $\varphi_{k+1} = \tau_{k+1} + q_{j_{k+1}} - (k+1)$. Если $j_{k+1} > j_k$, то согласно (22), (23) имеем $\tau_{k+1} = \tau_k$, $j_{k+1} = j_k + l$ и $\varphi_{k+1} = \tau_k + q_{j_k+l} - (k+1)$. Ввиду (5) $q_{j_k+l} = q_{j_k} + 1$ и поэтому $\varphi_{k+1} = 0$. Если $j_{k+1} = j_k + l - \overline{q_k}n$, то $q_{j_{k+1}} = 0$ и, согласно (25), $\tau_{k+1} = \tau_k + q_{j_k} + 1$ и $\varphi_{k+1} = \varphi_k = 0$.

Введем новые переменные

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_{k+1} = \lambda^{\tau_k}\hat{x}_{j_k} + \lambda\beta_k\xi_k \quad (k \in \overline{1, n-1}), \text{ где } \beta_k > 0, \qquad (27)$$

и докажем справедливость при $k \le n - 1$ соотношения

$$\dot{\xi}_k = \lambda^{q_{l+k-1}+1}a_{l+k-1,1}\hat{x}_1 + (\xi_{k+1} - \lambda\beta_k\xi_k)\rho_{j_{k-1}}^* + \lambda\beta_{k-1}\dot{\xi}_{k-1}, \qquad (28)$$

где

$$\rho_{j_{k-1}}^* = \begin{cases} \rho_{j_{k-1}}, \quad \text{если } j_{k-1} \le m, \\ 1, \quad \text{если } j_{k-1} > m. \end{cases}$$

Из (27) следует равенство

$$\dot{\xi}_k = \lambda^{\tau_{k-1}}\dot{\hat{x}}_{j_{k-1}} + \lambda\beta_{k-1}\dot{\xi}_{k-1}. \qquad (29)$$

Предположим, что $j_{k-1} \le m$. Тогда в силу (7) будем иметь

$$\dot{\hat{x}}_{j_{k-1}} = \lambda^{q_{j_{k-1}}+1}a_{j_{k-1},1}\hat{x}_1 + \rho_{j_{k-1}}\hat{x}_{j_{k-1}+l}$$

и, следовательно,

$$\dot{\xi}_k = \lambda^{\tau_{k-1}+q_{j_{k-1}}+1} a_{j_{k-1},1}\hat{x}_1 + \rho_{j_{k-1}}\lambda^{\tau_{k-1}}\hat{x}_{j_{k-1}+l} + \lambda\beta_{k-1}\dot{\xi}_{k-1}.$$

Поскольку $j_{k-1}+l = j_k$, $\tau_{k-1} = \tau_k$, то второе слагаемое в правой части этого равенства имеет вид $\rho_{j_{k-1}}(\xi_{k+1} - \lambda\beta_k\xi_k)$, и соотношение (28) доказано.

Пусть теперь $j_{k-1} = m + r$, $1 < r \leq l$. Тогда согласно (7) имеем $\dot{\hat{x}}_{m+r} = \lambda^{q_{m+r+1}} a_{m+r,1}\hat{x}_1 + \lambda^{q_{m+r+1}-q_r}\hat{x}_r$. Поэтому ввиду (29) можем записать

$$\dot{\xi}_k = \lambda^{\tau_{k-1}+q_{m+r}+1} a_{m+r,1}\hat{x}_1 + \lambda^{\tau_{k-1}+q_{m+r}+1-q_r}\hat{x}_r + \lambda\beta_{k-1}\dot{\xi}_{k-1}.$$

Поскольку $r \leq l$, то $q_r = 0$, поэтому $\tau_{k-1} + q_{m+r} + 1 = \tau_k$. Кроме того, $j_k = j_{k-1} + l(\mathrm{mod}\ n) = m + r + l(\mathrm{mod}\ n) = n + r(\mathrm{mod}\ n) = r$. Итак, соотношение (28) доказано.

Рассмотрим последовательность функций Ляпунова

$$V_k = V_{k-1} + \frac{\xi_k^2}{2\lambda^{2(k-1)}}, \quad k \in \overline{1,n}.$$

Очевидно равенство

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{\xi_2\dot{\xi}_2}{\lambda^2}. \tag{30}$$

Из (28) при $k = 2$ следует соотношение

$$\dot{\xi}_2 = \lambda^{q_{l+1}+1} a_{l+1,1}\hat{x}_1 + (\xi_3 - \lambda\beta_2\xi_2)\rho_{j_1}^* + \lambda\beta_1\dot{\xi}_1.$$

Поэтому справедливо равенство

$$\frac{\xi_2\dot{\xi}_2}{\lambda^2} = a_{l+1,1}\hat{x}_1\xi_2 + \frac{\rho_{j_1}^*\xi_2\xi_3}{\lambda^2} - \frac{\rho_{j_1}^*\beta_2\xi_2^2}{\lambda} + \frac{\beta_1\xi_2\dot{\xi}_1}{\lambda}. \tag{31}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства оценивается суммой $\frac{\xi_2^2}{\lambda} + \eta$, где величина $\eta = \lambda a_{l+1,1}^2(\xi_1^2 + \xi_1^2)$ поглощается правой частью неравенства (23) в том смысле, что она мажорируется ею за счет увеличения $\varkappa_{01}$ и $\varkappa_{11}$. Справедливы соотношения

$$\frac{\rho_{j_1}^*\xi_2\xi_3}{\lambda^2} = \frac{\rho_{j_1}^*\xi_2}{\lambda^{0.5}}\frac{\xi_3}{\lambda^{1.5}} \leq \frac{(\rho_{j_1}^*\xi_2)^2}{\lambda} + \frac{\xi_3^2}{\lambda^3}.$$

Ввиду (18) имеет место равенство

$$\frac{\beta_1\xi_2\dot{\xi}_1}{\lambda} = \frac{\beta_1\xi_2\varphi_1}{\lambda} + \frac{\beta_1\rho_{j_1}\xi_2\hat{x}_{l+1}}{\lambda} + \beta_1\rho_1\xi_2\varepsilon_{l+1}.$$

Очевидна оценка $\frac{\beta_1\xi_2\varphi_1}{\lambda} \leq \frac{\beta_1^2\xi_2^2}{\lambda} + \frac{\varphi_1^2}{\lambda}$. В силу (21) $\frac{\varphi_1^2}{\lambda} \leq \frac{c\xi_1^2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=2}^{l}\hat{x}_i^2 + |\varepsilon|^2$. Поскольку $\hat{x}_{l+1} = \xi_2 - \lambda\beta_1\xi_1$, то

$$\frac{\beta_1\rho_{j_1}\xi_2\hat{x}_{l+1}}{\lambda} = \frac{\beta_1\rho_{j_1}\xi_2^2}{\lambda} - \beta_1^2\rho_{j_1}\xi_2\xi_1 \leq \frac{\beta_1\rho_+\xi_2^2}{\lambda} + \lambda\xi_1^2 + \frac{\beta_1^4\rho_+^2\xi_2^2}{\lambda}.$$

Из полученных оценок, а также (23), (30) с учетом поглощений вытекает неравенство

$$\dot{V}_2 \le -\lambda(\beta_0 - \varkappa_{0,2})|\varepsilon|^2 - \lambda(\overline{\beta_1} - \varkappa_{1,2})\xi_1^2 - \frac{(\overline{\beta_2} - \varkappa_{2,2})\xi_2^2}{\lambda} + \frac{\xi_3^2}{\lambda^3} + \varkappa_{2,R}R,$$

где $\overline{\beta_2} = \beta_2 \max(\rho_-, 1)$.

Продолжая этот процесс построения функций Ляпунова, приходим к оценке

$$\dot{V}_{n-1} \le W(\varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) + \frac{\xi_n^2}{\lambda^{2n-3}} + \varkappa_{n-1,R}R, \tag{32}$$

где

$$W(\varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = -\lambda(\beta_0 - \varkappa_{0,n-1})|\varepsilon|^2 - \lambda(\overline{\beta_1} - \varkappa_{1,n-1})\xi_1^2 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(\overline{\beta}_{k+1} - \varkappa_{k+1,k+1})\xi_{k+1}^2}{\lambda^{2k-1}}.$$

Отметим, что $\varkappa_{k,k}$ зависит от $\overline{\beta_i}$ $(i < k)$ и не зависит от $\overline{\beta_k}$. Поэтому, выбрав последовательно $\overline{\beta_k} > \varkappa_{k,n-1}$, убеждаемся в отрицательной определенности квадратичной формы W.

Покажем, что R поглощается положительными членами в правой части неравенства (32). Из (27) следует формула $\hat{x}_{j_k} = \lambda^{-\tau_k}\xi_{k+1} - \lambda^{1-\tau_k}\beta_k\xi_k$. Поэтому для содержащегося в R члена $\hat{x}_{j_k}^2/\lambda^{2q_{j_k}}$ справедлива оценка

$$\frac{\hat{x}_{j_k}^2}{\lambda^{2q_{j_k}}} \le \frac{\xi_{k+1}^2}{\lambda^{2k}} + \frac{\beta_k^2\xi_k^2}{\lambda^{2k-2}}, \tag{33}$$

поскольку в силу леммы L $\tau_k + q_{j_k} = k$.

Очевидно, что содержащиеся в правой части неравенства (33) слагаемые поглощаются членами $-\overline{\beta}_{k+1}\xi_{k+1}^2/\lambda^{2k-1}$ и $-\overline{\beta_k}\xi_k^2/\lambda^{2k-3}$, стоящими в правой части неравенства (32). Поэтому далее будем полагать $R = 0$.

Рассмотрим $\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + \frac{\xi_n\dot{\xi}_n}{\lambda^{2(n-1)}}$. Ввиду (29) $\dot{\xi}_n = \lambda^{\tau_{n-1}}\dot{\hat{x}}_{j_{n-1}} + \lambda\beta_{n-1}\dot{\xi}_{n-1}$. Поскольку $j_{n-1} = m+1$, то согласно (7) $\dot{\hat{x}}_{j_{n-1}} = \lambda^{q_{m+1}+1}a_{m+1,1}\hat{x}_1 + u_1$. Ввиду леммы L имеем $\tau_{n-1} + q_{j_{n-1}} = n-1$, поэтому $\dot{\xi}_n = \lambda^n a_{m+1,1}\hat{x}_1 + u_1 + \lambda\beta_{n-1}\dot{\xi}_{n-1}$. Согласно (28) $\dot{\xi}_{n-1}$ является линейной формой относительно $\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_1$ и $\dot{\xi}_1$. Член $\xi_n\dot{\xi}_1$ оценивается с помощью (18) и (21). В результате приходим к оценке

$$\dot{V}_n \le W_1(\varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \xi_n(u_1 - L_1),$$

где W_1 — отрицательно определенная квадратичная форма, а L_1 — линейная форма относительно $\hat{x}_1, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Полагая

$$u_1 = L_1, \tag{34}$$

приходим к следующему результату.

Теорема. *Если выполнены условия* (2), (3), *и управления выбраны по формулам* (6), (34), *то система* (1) *становится глобально экспоненциально устойчивой.*

4. Импульсное управление. Рассмотрим теперь систему (1), в которой

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}(\cdot)x_k, \quad i \in \overline{1,l},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{2l} a_{ik}(\cdot)x_k, \quad i \in \overline{l+1,2l},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{pl} a_{ik}(\cdot)x_k, \quad i \in \overline{(p-1)l,pl},\\
&\varphi_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}(\cdot)x_k, \quad i \in \overline{pl+1,n},
\end{aligned}
$$

где $a_{ik}(\cdot)$ — неупреждающие функционалы произвольной природы, удовлетворяющие условию равномерной ограниченности $|a_{ik}(\cdot)| \leq c$. Предполагая, что управления u_i являются сигналами на выходах модуляторов $\mathfrak{M}_i\colon u_i = \mathfrak{M}_i[\zeta_i]$. Требуется синтезировать сигналы ζ_i на входах этих модуляторов таким образом, чтобы система стала глобально асимптотически устойчивой. Будем считать, что модуляторы работают синхронно, и последовательность $\{t_n\}$ моментов импульсации обладает свойством $\delta T \leq t_{k+1} - t_k \leq T$, где $\delta \in (0,1)$, $T > 0$. Предполагаем, что $u_i(t)$ не зависит от $\zeta_i(\tau)$ при $\tau > t$ и на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ не меняет знака. Кроме того, существует такая непрерывная и монотонно возрастающая функция $\varphi_i(\zeta)$, удовлетворяющая условию $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(\zeta) \to +\infty(-\infty)$ при $\zeta \to +\infty(-\infty)$, что при всех k существует $\tilde{t}_{i,k} \in [t_k, t_{k+1})$, при котором

$$
\frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} u_i(t)dt = \varphi_i(\zeta(\tilde{t}_{i,k})).
$$

Возьмем в качестве ζ_i функции $\zeta_i = \varphi_i^{-1}[\eta_i]$, где φ_i^{-1} — обратная к φ_i функция, а η_i — выражения, стоящие в правых частях уравнений (6) и (34). Тогда согласно лемме С из [5] при достаточно малом T система будет глобально асимптотически устойчива.

Литература

1. *Jia R., Qian C., Zhai J.* Semi-global stabilization of uncertain non-linear systems by homogeneous output feedback controllers // IET Control Theory and Application. 2012. Vol. 6. Iss 1. P. 165–172.
2. *Zhai Jun-yong, Li Wei-ging, Fei Shu-min.* Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory and Application. 2013. Vol. 7. Iss 2. P. 305–313.
3. *Man Yongchao, Liu Yungang.* Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems // System and Control Letters. 2016. Vol. 90. P. 20–30.
4. *Зубер И. Е., Гелиг А. Х.* Стабилизация по выходу непрерывных и импульсных неопределенных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 577–585.
5. *Гелиг А. Х., Зубер И. Е.* Стабилизация по многомерному выходу некоторого класса неопределенных систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 9. С. 3–17.
6. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Зубер Ирина Ефремовна — вед. науч. сотр.; zuber.yanikum@gmail.com
Гелиг Аркадий Хаимович — проф.; agelig@yandex.ru

The synthesis of stabilization control by output for certain class of continuous and pulse modulated undefined systems

I. E. Zuber[1], *A. Kh. Gelig*[2]

[1] Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Bolshoy pr., V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zuber I. E., Gelig A. Kh. The synthesis of stabilization control by output for certain class of continuous and pulse modulated undefined systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 597–605. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.405 (In Russian).

Consider the system $\dot{x}_1 = \varphi_1(\cdot) + \rho_1 x_{l+1}, \dots \dot{x}_m = \varphi_m(\cdot) + \rho_m x_n$, $\dot{x}_{m+1} = \varphi_{m+1}(\cdot) + u_1, \dots \dot{x}_n = \varphi_n(\cdot) + u_l$, where $x_1, \dots, x_n$ is state of the system, $u_1, \dots, u_l$ are controls, $\frac{n}{l}$ is not integer and $l \geq 2$. It is supposed that only outputs $x_1, \dots, x_l$ are measurable $(l < n)$, $\varphi_i(\cdot)$ are non-anticipating arbitrary functionals, $0 < \rho_- \leq \rho_i(t, x_1, \dots, x_l) \leq \rho_+$. With the help of backstepping method, we construct the square Lyapunov function and stabilize control for global exponential stability of closed loop system. The stabilization with the help of modulators with sufficiently elevated frequency of impulsation is also considered.

Keywords: uncertain systems, output stabilization, global exponential stability.

References

1. Jia R., Qian C., Zhai J., “Semi-global stabilization of uncertain non-linear systems by homogeneous output feedback controllers”, *IET Control Theory and Application* **6**(1), 165–172 (2012).
2. Zhai Jun-yong, Li Wei-ging, Fei Shu-min, “Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems”, *IET Control Theory and Application* **7**(2), 305–313 (2013).
3. Man Yongchao, Liu Yungang, “Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems”, *System and Control Letters* **90**, 20–30 (2016).
4. Zuber I. E., Gelig A. Kh., “Stabilization by Output of Continuous and Pulse-Modulated Uncertain Systems”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **50**(4), 342–348 (2017).
5. Gelig A. Kh., Zuber I. E., “Stabilization by multi-dimensional output for certain class of undefined systems”, *Avtomation and Remote Control* **79**(9), 1543–1555 (2018).
6. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh., *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities* (World Scientific, London, 2004, 334 p.).

Received: March 10, 2018
Accepted: July 2, 2018

A u t h o r’s i n f o r m a t i o n:

Irina E. Zuber — zuber.yanikum@gmail.com
Arkadiy Kh. Gelig — agelig@yandex.ru