УДК 517.965 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 39B22, 26B99

Связь уравнения Бетхера с параметризованным интегралом Пуассона

В. С. Кальницкий, А. Н. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кальницкий В. С., Петров А. Н.* Связь уравнения Бетхера с параметризованным интегралом Пуассона // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 614–622. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.407

В статье рассматривается функциональное уравнение Бетхера и одно из его вещественных обобщений. Показано, что в некоторых ситуациях после нахождения частного решения обобщенного уравнения удается получить и другие его решения. В качестве примера описано трехпараметрическое семейство вещественных функциональных уравнений на функцию двух аргументов, для которого найдены частные решения. Описанное обобщение имеет широкую область применения. Многие величины после надлежащим образом введенной параметризации удовлетворяют обобщенному уравнению Бетхера как функции параметров. В качестве иллюстрации приведены двухпараметрические семейства, порожденные определителем линейной комбинации матриц второго порядка. Показано, что параметризованный интеграл Пуассона, как функция своих параметров, удовлетворяет обобщенному уравнению Бетхера. Это позволило вычислить интеграл Пуассона и интеграл Эйлера новым способом. В качестве дополнения излагается вычисление интеграла Пуассона методом интегральных сумм.

Ключевые слова: уравнение Бетхера, интеграл Пуассона.

1. Введение. Рассмотрим аналитическое преобразование комплексной плоскости в окрестности точки a

$$f : z \mapsto a + c(z-a)^k + O((z-a)^{k+1}),$$

где $k \geqslant 2$. В терминологии теории итераций аналитических преобразований неподвижная точка a преобразования f называется суперпритягивающей. Вопрос о конформной сопряженности этого преобразования с преобразованием $z \mapsto z^k$ полностью решается теоремой Бетхера [1].

Теорема 1. *В окрестности неподвижной точки существует однолистное решение $\varphi(z)$ уравнения*

$$\varphi(f(z)) = (\varphi(z))^k. \tag{1}$$

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ функция $\varepsilon\varphi^n(z)$ также является решением, где ε — любой корень из единицы степени $k-1$. Этими решениями исчерпываются все мероморфные в окрестности точки a решения уравнения (1).

Существует прямой метод поиска решений этого уравнения в виде ряда Тейлора [2], который приводит, как правило, к громоздким выражениям, и явные решения получены лишь для некоторых f (см. [3]).

Пример 1. Для $k = 2$ и $f(z) = z^2/(1-2z^2)$ частным решением уравнения (1) в окрестности 0 будет функция $\varphi(z) = (1-\sqrt{1-4z^2})/2z$.

Рассмотрим вещественно-аналитическую функцию $f(x)$. Из аналитического построения решения (см., например, [4]) $\varphi(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k^n]{f^n(z)}$, где f^n обозначает n-ю итерацию отображения f, следует, что на множестве положительности f среди решений можно выбрать вещественно-аналитичное, соответствующее вещественным корням k^n-й степени. Это решение будет сужением решения уравнения (1) на вещественную ось, и для четных k все значения этой функции будут положительны.

Пример 2. Рассмотрим частный случай уравнения Бетхера в вещественном случае

$$\varphi^2(x) = \varphi(a + b(x-a)^2).$$

Заменой $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(\frac{x}{b} + a)$ оно приводится к простейшему виду

$$\tilde{\varphi}^2(x) = \tilde{\varphi}(x^2).$$

Это уравнение подробно исследовано для различных классов функций и различных областей определения. Отметим сразу, что $\tilde{\varphi}(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$.

А. Если потребовать, чтобы функция $\tilde{\varphi}(x)$ была аналитична в окрестности $x = 0$, то общее решение доставляет теорема Бетхера: общее решение имеет вид $\tilde{\varphi}(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, или $\tilde{\varphi} = 0$ либо 1.

Б. Если потребовать, чтобы функция $\tilde{\varphi}(x)$ была определена на интервале $(0,\infty)$ и была там дифференцируема, то общее решение имеет вид $\tilde{\varphi}(x) = x^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, или $\tilde{\varphi} = 0$.

В. Общее решение уравнения (2) без каких-либо ограничений на функцию, но на области определения $x > 1$ имеет вид [5]

$$\tilde{\varphi} = \exp\left(\ln x \cdot \omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln 2}\right)\right),$$

где ω — произвольная периодическая функция, для которой 1 является периодом.

Уравнение Бетхера допускает различные обобщения на функции нескольких комплексных переменных. Например, можно рассматривать преобразования $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ (см. обзор в [6]).

В данной статье мы введем вещественное обобщение уравнения Бетхера.

2. Обобщение уравнения Бетхера. Запишем уравнение Бетхера (1) для многочлена $f(z) = \alpha + \beta(z-\alpha)^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Не умаляя общности можно считать, что $\beta > 0$,

$$\varphi^2(z) = \varphi(\alpha + \beta(z-\alpha)^2). \tag{2}$$

Обозначим $z = a + ib$ и положим $F(a,b) = |\varphi(a+ib)|$. Мы получили уравнение, записанное в иной форме:

$$F^2(a,b) = F(\beta a^2 - 2\alpha\beta a - \beta b^2 + \beta\alpha^2 + \alpha, 2b\beta(a-\alpha)). \tag{3}$$

Если положить $b = 0$, $F(a,0) = |\varphi(a)| = \varphi(a)$ (в силу положительности), то мы получим исходное уравнение $\varphi^2(a) = \varphi(\alpha + \beta(a-\alpha)^2)$. Прямой проверкой легко убедиться, что $\varphi(z) = \beta(z-\alpha)$ является решением (2). В силу теоремы Бетхера все аналитические с вещественными коэффициентами решения уравнения (2) окрестности точки $(\alpha, 0)$ имеют вид $\varphi(z) = \beta^n(z-\alpha)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, либо $\varphi(z) = 0$. Эти решения задают серию решений уравнения (3):

$$F(a,b) = \beta^n((a-\alpha)^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}.$$

Для уравнения (3) легко указать более широкий класс решений:

$$F(a,b) = \beta^\gamma((a-\alpha)^2 + b^2)^{\frac{\gamma}{2}},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$.

Таким образом, решая уравнение (3), мы можем свести его к уравнению Бетхера (2) и все вещественные решения последнего будут задавать решения уравнения (3) по формуле $F(a,b) = |\varphi(a+ib)|$. С другой стороны, если есть вещественно-аналитическое в окрестности точки $(\alpha, 0)$ решение уравнения (3), то его сужение на первую переменную дает аналитическое решение уравнения Бетхера, а, значит, их сужения на вещественную ось совпадают. Например, очевидно, что функция $\varphi(z) = \beta(\bar{z} - \alpha)$ также является решением уравнения (2), но порождает ту же серию решений уравнения (3).

Теорема 2. *Рассмотрим вещественное функциональное уравнение*

$$F^2(a,b) = F\left(C_1a^2 + C_2a + C_3b^2 + C_4, 2C_1ab + C_2b\right)$$

и предположим, что выполнены соотношения

$$C_1 \neq 0; \quad \frac{C_3}{C_1} < 0; \quad C_4 = \frac{C_2^2 - 2C_2}{4C_1}.$$

Каждое аналитическое решение $\varphi(z)$ уравнения Бетхера (2) для полинома $f(z) = C_0 + C_1(z - C_0)^2$, $C_0 = -C_2/(2C_1)$, порождает решение рассматриваемого уравнения. Решения получаются в форме

$$F(a,b) = \left|\varphi\left(a + \sqrt{-\frac{C_3}{C_1}}bi\right)\right|.$$

Доказательство. Сделаем замену $G(a,b) = F(a, \mu b)$. Тогда данное уравнение перепишется с другой константой при b^2:

$$G^2(a,b) = G\left(C_1a^2 + C_2a + \mu^2C_3b^2 + C_4, 2C_1ab + C_2b\right).$$

Полученное уравнение сведем к (3), для этого найдем параметры μ, α, β:

$$\mu = \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}}; \quad \alpha = -\frac{C_2}{2C_1}; \quad \beta = C_1.$$

Первые два условия в теореме гарантируют возможность определения параметров μ, α. Третье условие гарантирует, что уравнение приводится к виду (3).

Получив какое-либо решение $G(a,b) = |\varphi(a+bi)|$, обратной заменой найдем $F(a,b) = G(a, b/\mu)$, где параметр $\mu = \sqrt{-C_1/C_3}$. $\square$

Доказанная теорема мотивирует следующую конструкцию.

Определение. Для многочленов второй степени $p_1(a), p_2(a,b), p_3(a,b)$ рассмотрим функциональное уравнение на неизвестную функцию $F(a,b)$ от двух переменных:

$$p_1(F(a,b)) = F(p_2(a,b), p_3(a,b)). \tag{4}$$

Уравнение (4) будем называть *обобщенным уравнением Бетхера.*

Предположим, что уравнение (4) может быть сведено к случаю $p_1(x) = x^2$, т. е. сопряжено с таким уравнением, некоторой легко вычислимой функцией. Пусть далее существует неподвижное значение b_0 третьего полинома $p_3(a, b_0) = b_0$, тогда уравнение (4) сводится к уравнению (1) на функцию $F(a, b_0)$.

В исследуемых нами далее примерах после нахождения частного решения $F(a, b_0)$ удается получить и другие решения уравнения (4). На этом основан предлагаемый нами прием вычисления некоторых величин.

Оказалось, что некоторые величины после надлежащим образом введенных параметров, становясь функциями своих параметров, удовлетворяют уравнению вида (4). Далее, исходя из специфики исследуемой величины устанавливаются ее значения для интересующих нас значений параметров. Существует достаточно семейств величин, трансформируемых в решения уравнения (4), мы обсудим лишь некоторые из них, так как многие из обнаруженных эффектов выходят за рамки данной статьи.

3. Теорема Гамильтона—Кэли. Теорема Гамильтона—Кэли доставляет пример семейства, допускающего описанную выше трансформацию. Рассмотрим матрицу второго порядка X. В силу теоремы Гамильтона—Кэли, ее степени являются линейными комбинациями самой матрицы и матричной единицы, так как

$$X^2 = \mathrm{Tr}X \cdot X - \det X \cdot E.$$

Это подсказывает, что величину $\det X$ можно трансформировать в функцию от двух параметров. А именно, рассмотрим двухпараметрическое семейство

$$F_X(a,b) = \det(aX + bE).$$

В силу теоремы Гамильтона—Кэли и мультипликативности определителя имеем

$$\det{}^2(aX + bE) = \det(a^2X^2 + 2abX + b^2E) = \\ = \det((\mathrm{Tr}X)a^2X + 2abX + b^2E - (\det X)a^2E).$$

Таким образом, определитель удовлетворяет обобщенному уравнению Бетхера (4)

$$F_X^2(a,b) = F_X(\alpha a^2 + 2ab, b^2 - \beta a^2), \tag{5}$$

где $\alpha = \mathrm{Tr}X, \beta = \det X$.

Два последних соотношения определяют семейство частных решений данного функционального уравнения для фиксированных α, β. В частности, для положительного частного решения $F_0(a,b)$ и вещественного числа s функция $F_0^s(a,b)$ — также решение.

Заметим, что при $\beta = 0$ второй аргумент имеет неподвижное значение $b = 1$, и уравнение приобретает форму уравнения Бетхера

$$\varphi^2(a) = \varphi(a^2 + 2a) = \varphi(-1 + (a+1)^2), \tag{6}$$

где обозначено $\varphi(a) = F_X(\frac{1}{\alpha}a, 1)$. В следующем разделе нам понадобится его частное решение. Для получения решения запишем семейство матриц, для которых $1 = \operatorname{Tr} X, 0 = \det X$,

$$X = \begin{pmatrix} 1-\gamma & c \\ \frac{-\gamma^2+\gamma}{c} & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi(a) = \det(aX + E) = a + 1.$$

Мы нашли частное решение уравнения (6). Как нам уже известно, все дифференцируемые решения, определенные на луче $a > -1$, имеют вид $(a+1)^s$, $s \in \mathbb{R}$. В частности, мы получили частные решения уравнения (5) при $\beta = 0$:

$$F_X(a, b) = \det(aX + bE) = \alpha ab + b^2.$$

4. Интеграл Пуассона. Применим указанные рассуждения для вычисления интеграла Пуассона

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + \sin^2 x) dx.$$

Отметим, что существует много способов его вычисления: разложением в интегральную сумму (см. пункт 5), дифференцированием по параметру и т. д. Рассмотрим двухпараметрическое семейство

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a + b \sin^2 x) dx.$$

Это дифференцируемая функция по параметрам. Найдем функциональное уравнение, которому подчиняется указанная функция. Для этого заметим, что

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a + b \cos^2 x) dx,$$

и можно записать сумму

$$\begin{aligned} 2I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \ln(a + b \cos^2 x) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(a + b \cos^2 x) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(a + b \cos^2 x)(a + b \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + ab + b^2 \cos^2 x \sin^2 x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4} \sin^2 2x\right) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4} \sin^2 x\right) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4} \sin^2 x\right) dx = I\left(a^2 + ab, \frac{b^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Для сведения к уравнению Бетхера его необходимо пропотенцировать: $P(a, b) = e^{I(a,b)}$. Эта функция, тем самым, удовлетворяет уравнению

$$P^2(a, b) = P(a^2 + ab, b^2/4).$$

Второй аргумент имеет неподвижную точку $b = 4$, запишем $\varphi(a) = P(a, 4)$:

$$\varphi^2(a) = \varphi(a^2 + 4a).$$

Для поиска частного решения мы используем специальный упрощающий прием: положим $g(a) = \varphi(\xi(a))$,

$$g^2(a) = \varphi^2(\xi(a)) = \varphi(\xi^2(a) + 4\xi(a)) = \varphi(\xi(\xi^{-1}(\xi^2(a) + 4\xi(a)))) = \\ = g(\xi^{-1}(\xi^2(a) + 4\xi(a))) = g(a^2 + 2a),$$

где мы потребовали $\xi^{-1}(\xi^2(a) + 4\xi(a)) = a^2 + 2a$, т. е. свели задачу к уже решенному уравнения Бетхера, все дифференцируемые решения которой на множестве положительности имеют вид

$$g(a) = (a + 1)^\alpha.$$

При этом необходимо еще решить сопрягающее уравнение

$$\xi^2(a) + 4\xi(a) = \xi(a^2 + 2a).$$

Для поиска частного решения сопрягающего уравнения сделаем замену $\eta(a) = \xi(a)+2$, тогда

$$\eta^2(a) = \eta(a^2 + 2a) + 2. \tag{7}$$

Последнее уравнение решает следующая очевидная лемма.

Лемма. *Если $\varphi_0(a)$ является решением уравнения Бетхера (1), $k = 2$, то функция*

$$\varphi_0(a) + \frac{1}{\varphi_0(a)}$$

является решением уравнения

$$\varphi^2(a) = \varphi(f(a)) + 2.$$

По лемме частное решение уравнения (7) имеет вид

$$\eta(a) = \frac{1}{a + 1} + a + 1.$$

Возвращаясь к исходным функциям, $a > -1$, получаем

$$\xi(a) = \frac{1}{a + 1} + a - 1, \quad \xi^{-1}(a) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}.$$

Таким образом,

$$\varphi(a) = g(\xi^{-1}(a)) = \left(\frac{a + 2 + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right)^\alpha.$$

Определение параметра α можно осуществить из следующего соображения. Запишем соотношения

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{4} + \ln \varphi\left(\frac{4a}{b}\right); \quad I(a, 0) = \frac{\pi}{2} \ln a.$$

Теперь достаточно потребовать

$$\lim_{b\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{4}+\ln\varphi\left(\frac{4a}{b}\right)\right)=\pi\ln\sqrt{a},$$

$$\lim_{b\to 0}\pi\left(\ln\frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{\frac{4a}{b}+2+\sqrt{(\frac{4a}{b})^2+4\frac{4a}{b}}}{2}\right)^{\alpha'}\right)=\pi\ln\sqrt{a},$$

где $\alpha=\pi\alpha'$. Легко видеть, что $\alpha'=\frac{1}{2}$. Окончательно получаем

$$I(a,b)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a+\frac{b}{2}+\sqrt{a^2+ab}}{2}=\pi\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{2}.$$

Полученное выражение совпадает с табличным. В частности, мы вычислили интеграл Пуассона

$$I=I(1,1)=\int_0^{\pi/2}\ln(1+\sin^2 x)dx=\pi\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

и получили известное выражение для интеграла Эйлера

$$I(0,1)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2 x)dx=-\pi\ln 2.$$

5. Вычисление с помощью интегральных сумм. В завершение изложения приведем вычисление интеграла Пуассона с помощью разложения в интегральную сумму. Для равномерного разбиения интервала интегрирования с правыми концами промежутков в качестве оснащения интегральная сумма будет иметь вид

$$\sigma_n=\frac{\pi}{2n}\left(\ln\left(1+\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)+\ln\left(1+\sin^2\frac{2\pi}{2n}\right)+\dots+\ln\left(1+\sin^2\frac{n\pi}{2n}\right)\right)=$$
$$=\frac{\pi}{2n}\ln\frac{\left(3-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(3-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\dots\left(3-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{2^{n-2}}.$$

Выражение, стоящее под логарифмом, может быть существенно упрощено. Рассмотрим разложение многочлена $t^{2n}-1$ на множители. Этот многочлен имеет ровно $2n$ корней — комплексных корней из единицы $\varepsilon_k=\cos 2\pi k/2n+i\sin 2\pi k/2n$, $k=0,\dots,2n-1$, степени $2n$:

$$t^{2n}-1=\Pi_{k=0}^{2n}(t-\varepsilon_k).$$

Пары комплексно сопряженных корней в произведении дают вещественный квадратный трехчлен $t^2-2t\cos k\pi/n+1$, $k=0,\dots,n-1$. Таким образом, получаем

$$t^{2n}-1=(t^2-1)(t^2-2t\cos\pi/n+1)\dots(t^2-2t\cos(n-1)\pi/n+1).$$

Подберем величину t специальным образом. Пусть $t_0=(\sqrt{2}+1)^2$, тогда $t_0^2+1=6t_0$. Окончательно имеем

$$\frac{t_0^{2n}-1}{t_0^2-1} = \left(6t_0 - 2t_0\cos\frac{\pi}{n}\right)\dots\left(6t_0 - 2t_0\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{n-1}t_0^{n-1}\left(3-\cos\frac{\pi}{n}\right)\dots\left(3-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Свернем интегральную сумму с помощью полученного выражения:

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2n}\ln\frac{(t_0^{2n}-1)}{(t_0^2-1)2^{n-1}t_0^{n-1}2^{n-2}} = \frac{\pi}{2n}\ln\frac{2(t_0^{2n}-1)}{(t_0^2-1)(4t_0)^{n-1}}.$$

Перейдем к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{(2(t_0^{2n}-1))^{\frac{1}{n}}}{(t_0^2-1)^{\frac{1}{n}}(4t_0)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{t_0}{4} = \pi\ln\frac{\sqrt{t_0}}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\int_0^{\pi/2}\ln(1+\sin^2 x)dx = \pi\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Литература

1. *Бетхер Л. Э.* Главнейшие законы сходимости итераций и приложение их к Анализу // Изв. Физ.-мат. общ. при Импер. Казанском ун-те. 1903. Т. 14, № 3–4. С. 155–234.
2. *Ritt J.* On the iteration of rational functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1920. Vol. 21, N 3. P. 348–356.
3. *Holden A. V.* Chaos. Princeton University Press, 2014. 334 p.
4. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: Гостехиздат, 1957. 235 с.
5. *Нечепуренко М. И.* Итерации вещественных функций и функциональные уравнения. Новосибирск, 1997. 228 с.
6. *Buff X., Epstein A. L., Koch S.* Böttcher coordinates // Indiana Univ. Math. J. 2012. Vol. 61. P. 1765–1799.

Статья поступила в редакцию 25 мая 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Кальницкий Вячеслав Степанович — канд. физ.-мат. наук, доц.; st006987@spbu.ru
Петров Андрей Николаевич — канд. физ.-мат. наук; petrovap6139@mail.ru

Connection of the Böttcher equation with the parametrized Poisson integral

V. S. Kalnitsky, A. N. Petrov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kalnitsky V. S., Petrov A. N. Connection of the Böttcher equation with the parametrized Poisson integral. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 614–622. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.407 (In Russian).

In the paper, one of the real generalizations of the Böttcher equation is considered. It is shown that in some situations, after finding the particular solution of the generalized equation, it is possible to obtain other solutions of it. As an example, we describe a three-parameter family of real functional equations for a function of two arguments, for which particular solutions are found. This generalization has a wide field of application. Many quantities after a properly introduced parametrization satisfy the generalized Böttcher equation as a function of the parameters. As an illustration, we give two-parameter families generated by the determinant of a linear combination of second-order matrices. It is shown that the parametrized Poisson integral, as a function of its parameters, satisfies the generalized Böttcher equation. This allowed us to calculate the Poisson integral and the Euler integral in a new way. As a supplement, the calculation of the Poisson integral by the method of integral sums is presented.

Keywords: Böttcher equation, Poisson integral.

References

1. Böttcher L., "The main laws of iteration convergence and its application to Analysis", *Phys.-Math. Soc. Notes* **14**(3–4), 155–234 (1903) [in Russian].

2. Ritt J., "On the iteration of rational functions", *Trans. Amer. Math. Soc.* **21**(3), 348–356 (1920).

3. Holden A. V., *Chaos* (Princeton University Press, 2014).

4. Valiron G., *Analytic Functions* (Gostekhizdat, Moscow, 1957) [in Russian].

5. Nechepurenko M. I., *Real functions iterations and functional equations* (Novosibirsk, 1997) [in Russian].

6. Buff X., Epstein A., Koch S. C., "Böttcher coordinates", *Indiana University Mathematics Journal* **61**(5), 1764–1799 (2012).

Received: May 25, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Vyacheslav S. Kalnitsky — st006987@spbu.ru
Andrey N. Petrov — petrovap6139@mail.ru