УДК 519.651 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 41A50

Примеры наилучшего кусочно-линейного приближения со свободными узлами

В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш.* Примеры наилучшего кусочно-линейного приближения со свободными узлами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 623–630. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.408

В 1957 г. Е. Я. Ремез опубликовал монографию, посвященную численным методам чебышёвских приближений. В ней, в частности, рассматривалась задача наилучшего равномерного приближения выпуклой на отрезке функции непрерывными кусочно-линейными функциями со свободными узлами. В 1975 г. А. М. Вершик, В. Н. Малозёмов и А. Б. Певный разработали общий подход к построению наилучших кусочно-полиномиальных приближений со свободными узлами. Было введено понятие разбиения с равными уклонениями и установлено, что такое разбиение существует и порождает наилучшую кусочно-полиномиальную аппроксимацию. Более того, был предложен численный метод построения разбиения с равными уклонениями. В данной заметке на трех примерах показывается, как работает общий подход при решении задачи наилучшей кусочно-линейной аппроксимации со свободными узлами. В случае произвольной непрерывной функции ее наилучшее кусочно-линейное приближение, вообще говоря, не является непрерывным. Оно будет непрерывным при аппроксимации строго выпуклых и строго вогнутых функций.

Ключевые слова: чебышёвские приближения, кусочно-линейная функция, разбиение с равными уклонениями.

1. Возьмем функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[c,d]$. Обозначим через $E(f;[\alpha,\beta])$ величину наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]\subset[c,d]$ полиномами первой степени,

$$E(f;[\alpha,\beta]) = \min_{(p_0,p_1)\in\mathbb{R}^2}\max_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)-(p_0x+p_1)|.$$

Зафиксируем натуральное число $m\geqslant 2$. Набор точек $\tau=\{x_k\}_{k=0}^m$, удовлетворяющих условию

$$c=x_0<x_1<\ldots<x_m=d,$$

обеспечивает разбиение отрезка $[c,d]$ на подотрезки $[x_{k-1},x_k]$, $k\in 1:m$. Разбиение τ называется *разбиением с равными уклонениями*, если

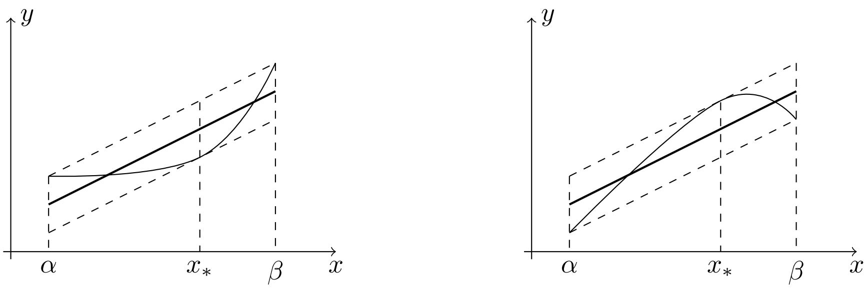
$$E(f;[x_{k-1},x_k]) = E(f;[x_k,x_{k+1}]),\quad k\in 1:m-1.$$

В работе [1] (см. также [2]) показано, что разбиение с равными уклонениями существует и оптимально в том смысле, что доставляет минимум величине

$$\mu(\tau)=\max_{k\in 1:m} E(f;[x_{k-1},x_k]).$$

В данной заметке приводятся три примера на построение разбиений с равными уклонениями.

2. Начнем с замечаний общего характера. Напомним, что полином первой степени, наименее уклоняющийся от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, характеризуется наличием трехточечного альтернанса [3, с. 49]. Если в дополнение к непрерывности функция $f(x)$ строго выпукла или строго вогнута, то точками альтернанса необходимо являются концы отрезка $[\alpha, \beta]$ (см. рисунок).



Трехточечные альтернансы.

Третья точка альтернанса x_* в случае дифференцируемости $f(x)$ определяется из следующего условия: производная $f'(x_*)$ равна производной линейной функции $\ell(x)$, интерполирующей $f(x)$ в точках α и β. Так как

$$\ell(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha),$$

то для x_* получаем уравнение

$$f'(x_*) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \tag{1}$$

При этом

$$E(f; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2} \left| f(x_*) - \ell(x_*) \right|. \tag{2}$$

Для полинома наилучшего приближения справедливо представление

$$p_0^* x + p_1^* = \begin{cases} \ell(x) - E(f; [\alpha, \beta]) & \text{в случае выпуклости функции } f, \\ \ell(x) + E(f; [\alpha, \beta]) & \text{в случае вогнутости функции } f. \end{cases}$$

Приняв во внимание эти факты, перейдем к построению разбиений с равными уклонениями.

3. Возьмем строго выпуклую функцию $f_1(x) = x^2$. Уравнение (1) принимает вид

$$f_1'(x_*) = \beta + \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$x_* = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Согласно (2) имеем

$$E(f_1; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2} \left| \left(\tfrac{\beta + \alpha}{2} \right)^2 - \left(\alpha^2 + (\beta + \alpha) \tfrac{\beta - \alpha}{2} \right) \right| = \tfrac{1}{8} (\beta - \alpha)^2.$$

Видим, что величина наилучшего приближения зависит только от длины отрезка $[\alpha, \beta]$.

Разбиение отрезка $[c, d]$ на m частей с равными уклонениями получается при равномерном расположении узлов

$$x_k = c + k\frac{d-c}{m}, \quad k \in 0 : m.$$

В этом случае получаем

$$E(f_1; [x_{k-1}, x_k]) = \frac{(d-c)^2}{8m^2}, \quad k \in 1 : m.$$

4. Рассмотрим строго вогнутую функцию $f_2(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[c, d] = [0.25, 1]$. Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2\sqrt{x_*}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$x_* = \left(\frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{2}\right)^2.$$

Согласно (2) имеем

$$E(f_2; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{2} - \left(\sqrt{\alpha} + \tfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}\left(\left(\tfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{2}\right)^2 - \alpha\right)\right)\right| = \tfrac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{8(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})}. \qquad (3)$$

Величина наилучшего приближения для функции f_2 зависит от концов промежутка аппроксимации $[\alpha, \beta]$, но более сложным образом, чем для функции f_1.

Для построения разбиения с равными уклонениями воспользуемся вариантом численного метода, предложенного в работе [2]. Предварительно упростим обозначение

$$E(\alpha, \beta) = E(f_2; [\alpha, \beta])$$

и покажем, что существует такое $x \in (\alpha, \beta)$, что

$$E(\alpha, x) = E(x, \beta). \qquad (4)$$

В силу (3) уравнение (4) принимает вид

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{\alpha})^2}{8(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})} = \frac{(\sqrt{\beta} - \sqrt{x})^2}{8(\sqrt{\beta} + \sqrt{x})}$$

или, что равносильно,

$$3x - \sqrt{x}\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}\right) - \sqrt{\alpha\beta} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{x} = \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2 + 12\sqrt{\alpha\beta}}\right). \qquad (5)$$

Построение разбиения с равными уклонениями состоит из двух этапов.

Первый этап: построение начального разбиения $\tau_0 = \{x_k^0\}_{k=0}^m$.

Положим $x_0^0 = c$, $x_m^0 = d$. Узлы x_{m-1}^0, $x_{m-2}^0, \ldots, x_1^0$ будем находить последовательно как решения уравнений вида (4):

$$\begin{aligned}
&E(x_0^0, x_{m-1}^0) = E(x_{m-1}^0, x_m^0),\\
&E(x_0^0, x_{m-2}^0) = E(x_{m-2}^0, x_{m-1}^0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&E(x_0^0, x_1^0) = E(x_1^0, x_2^0).
\end{aligned}$$

В этом случае

$$x_0^0 < x_1^0 < \ldots < x_m^0$$

и

$$E(x_0^0, x_1^0) = E(x_1^0, x_2^0) < E(x_2^0, x_3^0) < \ldots < E(x_{m-1}^0, x_m^0).$$

Второй этап: построение последовательности разбиений, стремящейся к разбиению с равными уклонениями.

Пусть уже имеется s-е разбиение $\tau_s = \{x_k^s\}_{k=0}^m$. Положим $x_0^{s+1} = c$, $x_m^{s+1} = d$. Узлы $x_{m-1}^{s+1}, x_{m-2}^{s+1}, \ldots, x_1^{s+1}$ будем находить последовательно как решения уравнений вида (4):

$$\begin{aligned}
&E(x_{m-2}^s, x_{m-1}^{s+1}) = E(x_{m-1}^{s+1}, x_m^{s+1}),\\
&E(x_{m-3}^s, x_{m-2}^{s+1}) = E(x_{m-2}^{s+1}, x_{m-1}^{s+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&E(x_0^s, x_1^{s+1}) = E(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}).
\end{aligned}$$

В результате получим разбиение $\tau_{s+1} = \{x_k^{s+1}\}_{k=0}^m$ со свойством

$$E(x_0^{s+1}, x_1^{s+1}) = E(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}) < E(x_2^{s+1}, x_3^{s+1}) < \ldots < E(x_{m-1}^{s+1}, x_m^{s+1}).$$

При этом при каждом $k \in 1 : m-1$ последовательность x_k^s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, будет возрастать.

Пользуясь свойством монотонности, в [2] доказывается, что последовательность разбиений $\{\tau_s\}$ сходится к разбиению с равными уклонениями.

Можно задать точность $\varepsilon > 0$ и прекратить вычисления, как только выполнится неравенство

$$E(x_{m-1}^s, x_m^s) - E(x_0^s, x_1^s) < \varepsilon.$$

5. Вернемся к аппроксимации функции $f_2(x)$ на отрезке $[c, d] = [0.25, 1]$. Для построения разбиения с равными уклонениями воспользуемся описанным выше методом. В данном случае решение уравнения (4) допускает аналитическое представление (5).

В табл. 1 приведены результаты вычислений при $m = 3$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$. Идентификатор it указывает на номер итерации, $E_k = E(x_{k-1}, x_k)$.

Таблица 1

it	x_0	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
0	0.25	0.3709	0.5310	1	0.0013	0.0013	0.0053
1	0.25	0.4069	0.6280	1	0.0021	0.0021	0.0030
2	0.25	0.4163	0.6542	1	0.0023	0.0023	0.0025
3	0.25	0.4187	0.6609	1	0.0024	0.0024	0.0024
4	0.25	0.4193	0.6626	1	0.0024	0.0024	0.0024

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, где

$$x_0 = 0.25, \quad x_1 = 0.4193, \quad x_2 = 0.6626, \quad x_3 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.8714x + 0.2845, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.6842x + 0.3630, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.5513x + 0.4511, & x \in [x_2, x_3]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0024.

В табл. 2 приведены результаты вычислений при $m = 4$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 2

it	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	E_1	E_2	E_3	E_4
0	0.25	0.3060	0.3709	0.5310	1	0.0003	0.0003	0.0013	0.0053
1	0.25	0.3372	0.4455	0.6280	1	0.0008	0.0008	0.0013	0.0030
2	0.25	0.3537	0.4868	0.6813	1	0.0010	0.0010	0.0013	0.0021
3	0.25	0.3622	0.5085	0.7091	1	0.0012	0.0012	0.0013	0.0017
4	0.25	0.3665	0.5196	0.7233	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0015
5	0.25	0.3686	0.5252	0.7305	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014
6	0.25	0.3697	0.5280	0.7342	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014
7	0.25	0.3703	0.5294	0.7360	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, где

$$x_0 = 0.25, \quad x_1 = 0.3703, \quad x_2 = 0.5294, \quad x_3 = 0.7360, \quad x_4 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.9021x + 0.2758, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.7484x + 0.3327, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.6307x + 0.3950, & x \in [x_2, x_3]; \\ 0.5382x + 0.4631, & x \in [x_3, x_4]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0013.

Замечание. Функция $f_2(x) = \sqrt{x}$ имеет особенность при $x = 0$ — в этой точке ее производная обращается в $+\infty$. Следовало отступить от нуля, взять $c > 0$. Выбор $c = 0.25$ неслучаен. Он обеспечивает легкое вычисление $\sqrt{x}$ при $x \in (0, 0.25)$. Для этого нужно найти натуральное k, такое что $4^k x \in [0.25, 1]$, и вычислить $\alpha = \sqrt{4^k x}$. Так как

$$\sqrt{x} = \sqrt{4^{-k}(4^k x)} = 2^{-k}\alpha,$$

то $\sqrt{x}$ получим с помощью сдвига двоичного представления числа α на k разрядов вправо.

6. В заключение рассмотрим задачу наилучшего кусочно-линейного приближения строго вогнутой функции $f_3(x) = \ln(1 + x)$ на отрезке $[0, 1]$. В данном случае уравнение (1) для средней точки альтернанса x_* принимает вид

$$\frac{1}{1 + x_*} = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha}\right).$$

Обозначив

$$u = \frac{1 + \alpha}{\beta - \alpha} \ln\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha}\right),$$

получим

$$x_* = \frac{1 + \alpha}{u} - 1.$$

Согласно (2) будем иметь

$$E(f_3; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2}\left|\ln\frac{1 + \alpha}{u} - \left(\ln(1+\alpha) + \frac{u}{1+\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{u} - (1+\alpha)\right)\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left(u - \ln u - 1\right).$$

Для построения разбиения с равными уклонениями воспользуемся методом, описанным в п. 4. Уравнение (4) будем решать численным методом с помощью процедуры solve из пакета MATLAB.

В табл. 3 приведены результаты вычислений при $m = 3$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 3

it	x_0	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
0	0	0.1892	0.4142	1	0.0019	0.0019	0.0075
1	0	0.2419	0.5422	1	0.0029	0.0029	0.0042
2	0	0.2554	0.5760	1	0.0032	0.0032	0.0035
3	0	0.2588	0.5845	1	0.0033	0.0033	0.0034
4	0	0.2596	0.5867	1	0.0033	0.0033	0.0033

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, где

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.2596, \quad x_2 = 0.5867, \quad x_3 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.8890x + 0.0033, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.7058x + 0.0509, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.5601x + 0.1364, & x \in [x_2, x_3]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0033.

В табл. 4 приведены результаты вычислений при $m = 4$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 4

it		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	E_1	E_2	E_3	E_4
0		0	0.0905	0.1892	0.4142	1	0.0005	0.0005	0.0019	0.0075
1		0	0.1388	0.2968	0.5422	1	0.0011	0.0011	0.0019	0.0042
2		0	0.1637	0.3543	0.6105	1	0.0014	0.0014	0.0019	0.0029
3		0	0.1764	0.3839	0.6458	1	0.0016	0.0016	0.0019	0.0024
4		0	0.1828	0.3990	0.6637	1	0.0018	0.0018	0.0019	0.0021
5		0	0.1860	0.4066	0.6727	1	0.0018	0.0018	0.0019	0.0020
6		0	0.1876	0.4104	0.6772	1	0.0018	0.0018	0.0019	0.0019
7		0	0.1884	0.4123	0.6795	1	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, где

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.1884, \quad x_2 = 0.4123, \quad x_3 = 0.6795, \quad x_4 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.9162x + 0.0019, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.7709x + 0.0292, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.6485x + 0.0797, & x \in [x_2, x_3]; \\ 0.5449x + 0.1501, & x \in [x_3, x_4]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0019.

7. При кусочно-линейном приближении с переменными узлами строго выпуклой или строго вогнутой функции $f(x)$ оптимальная кусочно-линейная функция $y(x)$ будет непрерывной. Это следует из того, что $y(x)$ строится по разбиению с равными уклонениями $\tau_* = \{x_k^*\}_{k=0}^m$, и того, что разность

$$\Delta(x) = f(x) - y(x)$$

принимает одинаковые значения во всех узлах x_k^*, $k \in 0 : m$.

Другой метод построения непрерывной ломаной со свободными узлами, наименее уклоняющейся на отрезке от выпуклой или вогнутой функции, был описан и исследован в книге Е. Я. Ремеза [4, глава 4].

Литература

1. *Вершик А. М., Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 5. С. 925–938.

2. *Малозёмов В. Н.* Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация. В кн.: Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 316–325. URL: http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0424a (дата обращения: 01.03.2018).

3. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

4. *Ремез Е. Я.* Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев: Изд-во АН УССР, 1957. 454 с.

Статья поступила в редакцию 3 марта 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Малозёмов Василий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.malozemov@spbu.ru
Тамасян Григорий Шаликович — канд. физ.-мат. наук, доц.; g.tamasyan@spbu.ru

Examples of the best piecewise linear approximation with free nodes

V. N. Malozemov, G. Sh. Tamasyan

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Malozemov V. N., Tamasyan G. Sh. Examples of the best piecewise linear approximation with free nodes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 623–630. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.408 (In Russian).

In 1957, E. Ya. Remez published a monograph devoted to numerical methods of Chebyshev approximations. Particularly, a problem of the best uniform approximation of a function convex on an interval with continuous piecewise linear functions with free nodes was considered. In 1975, A. M. Vershik, V. N. Malozemov and A. B. Pevnyi developed a general approach for constructing the best piecewise polynomial approximations with free nodes. The notion of partition with equal deviations was introduced, and it was established that such partition exists and generates the best piecewise polynomial approximation. Moreover, a numerical method for constructing a partition with equal deviations was proposed. In this paper, we give three examples demonstrating how the general approach works when solving the problem of the best piecewise linear approximation with free nodes. In the case of an arbitrary continuous function, its best piecewise linear approximation in general is not continuous. It is continuous when approximating strictly convex and strictly concave functions.

Keywords: Chebyshev approximations, piecewise linear function, partition with equal deviations.

References

1. Vershik A. M., Malozemov V. N., Pevnyi A. B., "Best Piecewise Polynomial Approximation", *Sib. Math. J.* **16**(5), 706–717 (1975).

2. Malozemov V. N., "Best Piecewise Polynomial Approximation", In: *Selected Lectures on Extremal Problems. Part II*, 316–325 (2017) [in Russian]. Available at: http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0424a (accessed March 1, 2018).

3. Demyanov V. F., Malozemov V. N., *Introduction to minimax* (New York, Dover, 1990, 307 p.).

4. Remez E. Ya., *General Computational Methods of Chebyshev Approximation* (Izd. AN UkrSSR, Kiev, 1957) [in Russian].

Received: March 3, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Vasilii N. Malozemov — v.malozemov@spbu.ru
Grigoriy Sh. Tamasyan — g.tamasyan@spbu.ru