УДК 512.662 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 18G35

Об одном свойстве ограниченных комплексов дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей

О. Б. Подкопаев

Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики,
Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

Для цитирования: *Подкопаев О. Б.* Об одном свойстве ограниченных комплексов дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 631–636. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.409

Целью этой заметки является доказательство следующего утверждения: пусть π — проконечная группа и K^* — ограниченный комплекс дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей. Предположим, что $H^i(K^*)$ — конечные абелевы группы. Тогда существует квазиизоморфизм $L^* \longrightarrow K^*$, где L^* — ограниченный комплекс дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей, такой что все L^i — конечные абелевы группы. Это аналог для дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей известной леммы об ограниченных комплексах A-модулей (например, сконцентрированных в неотрицательных степенях), где A — нетерово кольцо, которая утверждает, что любой такой комплекс квазиизоморфен некоторому комплексу конечно порожденных A-модулей, свободных за исключением, возможно, модуля, лежащего в степени 0. Эта лемма играет ключевую роль в доказательстве теоремы о замене базы в когомологиях когерентных пучков на нетеровых схемах, которая, в свою очередь, может быть использована для доказательства теоремы Гротендика о поведении размерностей групп когомологий семейства векторных расслоений над плоским семейством многообразий.

Ключевые слова: проконечная группа, дискретный модуль, когомологии.

1. Введение. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — собственный морфизм нётеровых схем, причем $Y = \mathrm{Spec} A$ — аффинная схема, и пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, плоский над Y. Теорема о замене базы (см. [1] и [2, гл. 2, § 5]) утверждает, что существует конечный комплекс K^* конечно порожденных проективных A-модулей и изоморфизм функторов

$$H^p(X \times_A \mathrm{Spec} B, \mathcal{F} \otimes_A B) \cong H^p(K^* \otimes_A B)$$

на категории A-модулей B. Эта теорема имеет важные приложения в алгебраической геометрии; из нее, в частности, вытекает полунепрерывность сверху размерности когомологий слоев. Доказательство теоремы о замене базы основано на следующем утверждении (*loc.cit.*). Пусть C^* — комплекс A-модулей, такой что $H^i(C^*)$ — конечно порожденные A-модули и $C^p = 0$ при $p < 0$ и $p > n$. Тогда существует комплекс K^* конечно порожденных A-модулей, такой что $K^p = 0$ при $p < 0$ и $p > n$, K^p — свободные модули при $1 \leq p \leq n$, и существует гомоморфизм комплексов $K^* \longrightarrow C^*$, индуцирующий изоморфизмы $H^i(K^*) \longrightarrow H^i(C^*)$ для всех i. Более того, если все C^p являются плоскими над A, то K^0 также плоский над A.

Целью этой заметки является доказательство следующего аналога вышеуказанного утверждения в категории дискретных π-модулей, где π — проконечная группа.

Теорема. *Пусть π — проконечная группа, K^* — ограниченный комплекс дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей. Пусть $H^i(K)$ — конечные группы. Тогда существует ограниченный комплекс L^* дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей, такой что все L^i являются конечными абелевыми группами, и существует гомоморфизм комплексов дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей $\phi : L^* \to K^*$, индуцирующий изоморфизмы $H^i(L^*) \to H^i(K^*)$ для всех i.*

2. Доказательство основного результата. Пусть π — проконечная группа и $\mathbb{F}_p[\pi]$ — групповое кольцо группы π над полем $\mathbb{F}_p$ [3]. Доказательству основной теоремы мы предпошлем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть M — дискретный $\mathbb{F}_p[\pi]$-модуль, N — дискретный $\mathbb{F}_p[\pi]$-модуль, конечный как абелева группа, $p : M \longrightarrow N$ — сюръективный гомоморфизм $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей. Тогда существует коммутативная диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "p"] & \\ \mathbb{F}_p[X] \arrow[ur, "v"] \arrow[rr, "u"'] & & N, \end{tikzcd} \tag{1}$$

в которой X — конечное π-множество и гомоморфизм u сюръективен.

Доказательство. N — дискретный π-модуль, конечный как абелева группа. В частности, N — конечное π-множество и для любого $n \in N$ подгруппа $\mathrm{Stab}\,(n)$ открыта в π. Представим N в виде $N = \sqcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{n_i}$, где $\mathcal{O}_{n_i}$ — орбита $n_i \in N$. Имеем $\mathcal{O}_{n_i} \cong \pi/\mathrm{Stab}\,(n_i)$ как π-множества. Пользуясь сюръективностью гомоморфизма $p : M \to N$, для каждого $n_i, i = 1...k$, найдем $m_i \in M$, такой что $p(m_i) = n_i$. Поскольку M — дискретный π-модуль, группа $\mathrm{Stab}\,(m_i)$ открыта в π. Убедимся в том, что $\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$ конечно.

Пусть $\mathrm{pr} : \pi \longrightarrow \pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$ — естественная проекция. Множество $\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$ дискретно, так как для любого $x \in \pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$ слой $\mathrm{pr}^{-1}(x)$ гомеоморфен множеству $\mathrm{Stab}\,(m_i)$, открытому в π. Следовательно, по определению фактортопологии множество $\{x\}$ открыто в $\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$. Поскольку π — проконечная группа, она, в частности, компактна. Значит, $\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$ компактно и, следовательно, $\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$ конечно.

Положим $X = \sqcup_{i=1}^{k} \pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$. Это конечное множество. Рассмотрим естественную проекцию π-множеств $\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i) \longrightarrow \pi/\mathrm{Stab}\,(n_i)$. Продолжим ее по линейности до гомоморфизма

$$\Sigma_{i=1}^{k} u_i' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(n_i)].$$

Пусть

$$u'' : \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(n_i)] \longrightarrow N$$

— естественная сюръекция. Положим $u = u'' \circ u' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow N$.

Рассмотрим подмодуль V в M, порожденный $\sqcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{m_i}$. Обозначим $v' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow V$ естественную проекцию и $v'' : V \longrightarrow M$ — вложение подмодуля V. Положим $v =$

$v'' \circ v' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow M$. Легко проверяется коммутативность полученной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "p"] & \\ \mathbb{F}_p[X] \arrow[ur, "v"] \arrow[rr, "u"'] & & N. \end{tikzcd}$$

Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Пусть M — дискретный $\mathbb{F}_p[\pi]$-модуль, N, $N^{'}$ — дискретные $\mathbb{F}_p[\pi]$-модули, конечные как абелевы группы; $p_1 : M \longrightarrow N$, $p_2 : N^{'} \longrightarrow N$ — сюръективные гомоморфизмы $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей. Тогда существует коммутативная диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_p[X] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[d, "p_1"] \\ N^{'} \arrow[r, "p_2"] & N, \end{tikzcd} \tag{2}$$

в которой X — конечное π-множество и гомоморфизм v сюръективен.

Доказательство. Представим N в виде $N = \sqcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{n_i}$, где $\mathcal{O}_{n_i}$ — орбита $n_i \in N$. Гомоморфизмы p_1 и p_2 сюръективны. Выберем $m_i \in M$ и $n_i' \in N'$, такие что $p_1 m_i = n_i$ и $p_2 n_i^{'} = n_i$. Подгруппы $\mathrm{Stab}\,(m_i)$ и $\mathrm{Stab}\,(n_i)'$ открыты в $\mathrm{Stab}\,(n_i)$. Обозначим $\pi_i = \mathrm{Stab}\,(m_i) \cap \mathrm{Stab}\,(n_i')$. Убедимся в том, что это открытая подгруппа в π конечного индекса. Действительно, π естественным образом действует на $\mathrm{Stab}\,(m_i) \times \mathrm{Stab}\,(n_i')$. Имеем $\mathrm{Stab}\,(\bar{1}, \bar{1}) = \mathrm{Stab}\,(m_i) \cap \mathrm{Stab}\,(n_i')$, значит это подгруппа в π конечного индекса. Очевидно, она открыта. Положим $X = \sqcup_{i=1}^{k} \pi/\pi_i$ и рассмотрим естественную проекцию π-множеств

$$\pi/\pi_i \longrightarrow \pi/\mathrm{Stab}\,(n_i').$$

Продолжим ее по линейности до гомоморфизма

$$v_i' : \mathbb{F}_p[\pi/\pi_i] \longrightarrow \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(n_i')].$$

Положим

$$v' = \Sigma_{i=1}^{k} v_i' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(n_i')].$$

Гомоморфизм v'' сюръективен. Рассмотрим естественную проекцию

$$v'' : \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(n_i)] \longrightarrow N'.$$

Пусть $v = v'' \circ v' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow N'$. Рассмотрим естественную проекцию π-множеств $\pi/\pi_i \longrightarrow \pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)$. Продолжим ее по линейности до гомоморфизма

$$u_i' : \mathbb{F}_p[\pi/\pi_i] \longrightarrow \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)].$$

Положим

$$u' = \Sigma_{i=1}^{k} u_i' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)].$$

Рассмотрим подмодуль $V \subset M$, порожденный $\sqcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{m_i}$. Пусть

$$u'' : \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}_p[\pi/\mathrm{Stab}\,(m_i)] \longrightarrow V$$

— естественный сюръективный гомоморфизм и $u''' : V \longrightarrow M$ — вложение. Положим $u = u''' \circ u'' \circ u' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow M$. Мы получили диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_p[X] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[d, "p_1"] \\ N' \arrow[r, "p_2"] & N. \end{tikzcd}$$

Легко убедиться в ее коммутативности, что завершает доказательство леммы 2. ■

Теорема. *Пусть π — проконечная группа, K^* — ограниченный комплекс дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей. Пусть $H^i(K)$ — конечные группы. Тогда существует ограниченный комплекс L^* дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей, такой что все L^i являются конечными абелевыми группами, и существует гомоморфизм комплексов дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$-модулей $\phi : L^* \to K^*$, индуцирующий изоморфизмы $H^i(L^*) \to H^i(K^*)$ для всех i.*

Доказательство. Индукцией вниз по m построим диаграммы:

$$\begin{tikzcd} L^m \arrow[r, "\delta^m"] \arrow[d, "\phi_m"] & L^{m+1} \arrow[r, "\phi_{m+2}"] \arrow[d, "\phi_{m+1}"] & L^{m+2} \arrow[r, "\delta^{m+2}"] \arrow[d, "\phi_{m+1}"] & \ldots \\ K^m \arrow[r, "d^m"] & K^{m+1} \arrow[r, "d^{m+1}"] & K^{m+2} \arrow[r, "\delta^{m+2}"] & \ldots \end{tikzcd}$$

Пусть $K^i = 0$ при $i < 0$ и $i > n$. Положим $L^m = 0$ при $m > n$. Пусть L^p, ϕ_p, δ^p уже определены при $p \geq m+1$, так что выполняются следующие условия:

(i) $d^p \phi_p = \phi_{p+1} \delta^p, p \geq m+1$,

(ii) $\delta^{p+1} \delta^p = 0, p \geq m+1$,

(iii) гомоморфизмы ϕ_p индуцируют изоморфизмы $H^p(L^*) \longrightarrow H^p(K^*), p \geq m+2$, и эпиморфизм $\ker \delta^{m+1} \longrightarrow H^{m+1}(K^*)$,

(iv) L^p — конечные абелевы группы, $p \geq m+1$.

Построим L^m, ϕ_m, δ^m таким образом, чтобы условия (i)–(iv) были бы по прежнему выполнены, если $m+1$ заменить на m. Будем искать L^m в виде $L'^m \oplus L''^m$, ϕ_m в виде $\phi'_m + \phi''_m$ и δ^m в виде $\delta'^m + \delta''^m$.

Построим сначала $L''^m, \phi''_m, \delta''^m$. Пусть Z^i — группа коциклов в K_i и $p_m : Z^m \longrightarrow H^m(K^*)$ — естественная проекция. Тройка $(Z^m, H^m(K^*), p_m)$ удовлетворяет условиям леммы 1. В силу этой леммы существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Z^m \arrow[dr, "p_m"] & \\ \mathbb{F}_p[X''] \arrow[ur, "v''_m"] \arrow[rr, "u''_m"'] & & H^m(K^*), \end{tikzcd}$$

в которой X'' — некоторое конечное π-множество. Положим $L''^m = \mathbb{F}_p[X'']$, $\phi''_m = v''_m$, $\delta''^m = 0$.

Построим теперь L'^m, ϕ'_m, δ'^m. Пусть

$$\gamma_{m+1} = p_{m+1} \circ \phi_{m+1}|_{\ker \delta^{m+1}} : \ker \delta^{m+1} \longrightarrow H^{m+1}(K^*).$$

Обозначим $K^0_m = d^{-1}(\operatorname{Im} \phi_{m+1}) \subset K^m$. По индукционному предположению $\ker \gamma_{m+1}$ — конечная абелева группа. Абелева группа $dK^m \cap \operatorname{Im} \phi_{m+1}$ также конечна. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \gamma_{m+1} \arrow[d, "\phi_{m+1}"] \\
K^0_m \arrow[r, "d"'] & dK^m \cap \operatorname{Im} \phi_{m+1}.
\end{tikzcd}$$

Гомомоморфизм ϕ_{m+1} сюръективен. Действительно,

$$\alpha \in dK^m \Rightarrow \gamma_{m+1}\beta = (p_{m+1} \circ \phi_{m+1})\beta = p_{m+1}\alpha = 0.$$

Поэтому для любого $\alpha \in dK^m \cap \operatorname{Im} \phi_{m+1}$ существует $\beta \in L^{m+1}$, такой что $\phi_{m+1}\beta = \alpha$, $\beta \in \ker \gamma_{m+1}$. Таким образом,

$$(K^0_m, dK^m \cap \operatorname{Im} \phi_{m+1}, \ker \gamma_{m+1}, d, \phi_{m+1}|_{\ker \gamma_{m+1}})$$

удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно, существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_p[X'] \arrow[r, "v'_m"] \arrow[d, "u'_m"] & M \arrow[d, "\phi_{m+1}"] \\
K^0_m \arrow[r, "d"] & dK^m \cap \operatorname{Im} \phi_{m+1},
\end{tikzcd}$$

где X'_m — некоторое конечное π-множество. Положим $L'_m = \mathbb{F}_p[X'], \phi'_m = u'_m, \delta'_m = v'_m$. Теперь положим $L^m = L'^m \oplus L''^m, \phi_m = \phi'_m + \phi''_m, \delta^m = \delta'^m + \delta''^m$. Убедимся в том, что условия (i)–(iv) по прежнему выполнены.

Пусть $m \geq 1$. Так как условие (i) достаточно проверить покомпонентно, то оно вытекает из коммутативности диаграмм (1) и (2).

(ii) Имеем $\delta^{m+1} \circ \delta^m = 0$, так как $\delta^m = \delta'^m + \delta''^m, \delta''^m = 0, \delta'^m : L'^m \longrightarrow \ker \gamma_{m+1} \subset \ker \delta^{m+1}$.

(iii) Проверим, что ϕ_{m+1} индуцирует изоморфизм $H^{m+1}(L^*) \longrightarrow H^{m+1}(K^*)$. Действительно, имеем эпиморфизм $\ker \delta^{m+1} \longrightarrow H^{m+1}(K^*)$. Так как

$$\operatorname{Im} \delta^m = \operatorname{Im} \delta'^m = \operatorname{Im} v'^m = \ker \gamma_{m+1},$$

то

$$H^{m+1}(L^*) = \ker \delta^{m+1}/Im\delta^m = \ker \delta^{m+1}/\operatorname{Im} \gamma^m \cong H^{m+1}(K^*).$$

Далее, ϕ_m индуцирует эпиморфизм $\ker \delta^m \longrightarrow H^m(K^*)$. Действительно, $\ker \delta^m \supset L''^m$, а $\phi_m|_{L''^m}$ индуцирует эпиморфизм $u''_m : L''^m \longrightarrow H^m(K^*)$ (диаграмма (1)).

(iv) L^m — конечная абелева группа по построению.

Пусть теперь $m = -1$. Заменим L^0 на $L^0/(\ker \delta^0 \cap \ker \phi_0)$ и в качестве ϕ_0 и δ^0 возьмем индуцированные гомоморфизмы. При $p < 0$ положим $L^p = 0$ и $\phi_p = 0$. Комплекс L^* и гомоморфизм $\phi : L^* \longrightarrow K^*$ отвечают требованиям утверждения. ■

Литература

1. *Grothendieck A., Dieudonne J.* Éléments de géométrie algébrique. Vol. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Seconde partie. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1963.
2. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. Мир, 1986.
3. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.

Статья поступила в редакцию 27 мая 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Подкопаев Олег Борисович — канд. физ.-мат. наук; opodkopaev@gmail.com

One property of bounded complexes of discrete $\mathbb{F}_p[\pi]$-modules

O. B. Podkopaev

Higher School of Economics, ul. Soyuza Pechatnikov, 16, St. Petersburg, 190008, Russian Federation

For citation: Podkopaev O. B. One property of bounded complexes of discrete $\mathbb{F}_p[\pi]$-modules. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 631–636. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.409 (In Russian).

The goal of this note is to give a proof of the following proposition. Let π be a profinite group and K^* be a bounded complex of discrete $\mathbb{F}_p[\pi]$-modules. Assume all $H^i(K^*)$ are finite abelian groups. Then there exists a quasiisomorphism $L^* \longrightarrow K^*$, where L^* is a bounded complex of discrete $\mathbb{F}_p[\pi]$-modules such that all L^i are finite abelian groups. This is an analogue for discrete $\mathbb{F}_p[\pi]$-modules of a well-known lemma about bounded complexes of A-modules (say, concentrated in nonnegative degrees), where A is a Noetherian commutative ring, that establishes the existence of a quasiisomorphism between any such complex and a complex of finitely generated A-modules that are free except, possibly, the one in degree 0. This lemma plays the key role in the proof of a base change theorem for cohomology of coherent sheaves on Noetherian schemes, that in turn, can be used to prove a theorem of Grothendieck about the behavior of dimensions of cohomology groups of a family of vector bundles on a flat family of varieties.

Keywords: profinite group, discrete module, cohomology.

References

1. Grothendieck A., Dieudonne J., *Éléments de géométrie algébrique: III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents* (Seconde partie, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1963).
2. Mumford D., *Abelian varieties* (Oxford University Press, 1974).
3. Serre J.-P., *Galois Cohomology* (Springer, 1997).

Received: May 27, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Oleg B. Podkopaev — opodkopaev@gmail.com