УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 37C50

# Обратное отслеживание для действий группы Баумслага—Солитара*

*А. В. Фадеев*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Фадеев А. В.* Обратное отслеживание для действий группы Баумслага—Солитара // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 637–644. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.410

Параллельно с теорией отслеживания в динамических системах (которая сейчас уже достаточно хорошо разработана) развивалась теория обратного отслеживания. Основное различие между двумя теориями состоит в том, что свойство отслеживания подразумевает нахождение точной траектории в окрестности приближенной орбиты, в то время как обратное отслеживание ставит целью нахождение члена некоторого семейства приближенных траекторий (называемого *методом*), который был бы достаточно близок к фиксированной точной траектории. В этой статье мы приводим пример отсутствия свойства обратного отслеживания для некоторых линейных действий группы Баумслага—Солитара, которая часто применяется как источник контрпримеров.

*Ключевые слова*: обратное отслеживание, группа Баумслага—Солитара.

**1. Введение.** Ставшее уже классическим в теории динамических систем понятие отслеживания псевдотраекторий достаточно хорошо изучено. Самый известный связанный с этим понятием результат состоит в том, что диффеоморфизм риманова многообразия обладает свойством отслеживания в некоторой окрестности гиперболического множества (*лемма о $\varepsilon$-траекториях*, доказанная Д. В. Аносовым [1]). Основное содержание задачи отслеживания состоит в том, чтобы соотнести «теоретическую динамическую систему» (то, с чем работает математик) и результат ее компьютерного моделирования. Существенное различие между этими подходами заключается в том, что исследователь не может производить вычисления абсолютно точно, учитывая все знаки после запятой, т. е. обязательно присутствует некая ошибка вычислений, пусть даже небольшая. Как раз роль этой ошибки и изучается в первую очередь в теории отслеживания.

Ставится следующий вопрос (формальная постановка задачи будет дана в основном тексте работы): *будет ли траектории динамической системы, которую мы посчитали на компьютере, соответствовать какая-нибудь «точная» траектория?*

Параллельно с теорией отслеживания развивалась теория *обратного* отслеживания. Основное различие между двумя теориями состоит в том, что в задаче отслеживания по приближенной траектории ищется достаточно близкая к ней точная, а при обратном отслеживании исследователя интересует: *можно ли точную траек-*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00230а).

*торию достаточно хорошо приблизить с помощью псевдотраектории* (в которой допускается ошибка на каждом шаге). Разумеется, множество псевдотраекторий из задачи обратного отслеживания должно быть достаточно богатым, чтобы иметь возможность приблизить *все* точные траектории. По определению, источником этих псевдотраекторий служит некоторый численный метод.

Как известно, классические динамические системы (каскады и потоки) можно рассматривать как действие на соответствующем пространстве группы $\mathbb{Z}$ (дискретный случай) и группы $\mathbb{R}$ по сложению (непрерывный случай). Представляется естественным называть *общей динамической системой* действие произвольной группы $\Phi(g, \cdot),\ g \in G$.

Многие классические определения без труда переносятся на общий случай. В частности, интерес представляет задача изучения свойства прямого и обратного отслеживаний для общей динамической системы. На текущий момент в этом направлении известно не очень много результатов (отметим работы [2–4]).

В настоящей работе исследуется наличие свойства обратного отслеживания для некоторых линейных действий группы Баумслага—Солитара $BS(1, n)$. Мы покажем, что эти действия не обладают свойством обратного отслеживания, предъявив численный метод, псевдотраектории которого не смогут отследить ни одну точную траекторию. Кроме того, мы покажем, что наши рассуждения могут быть обобщены на действия в пространствах более высоких размерностей.

**2. Основные предположения и определения.** Так как мы будем работать с общими динамическими системами (действиями групп), дадим соответствующие общие определения. Их классические аналоги могут быть получены путем подстановки в соответствующее определение группы $\mathbb{Z}$.

Пусть $\Phi$ — действие конечно порожденной группы $G$ на метрическом пространстве $(M, \rho)$. Пусть $S$ — конечное симметричное (т. е. содержащее с каждым элементом $s$ обратный элемент $s^{-1}$) порождающее множество для группы $G$.

**Определение 1.** Будем называть семейство $\{x_g\}_{g \in G}$ *$d$-псевдотраекторией* для $\Phi$ (по отношению к порождающему множеству $S$), если

$$\rho\left(x_{sg}, \Phi(s, x_g)\right) < d, \qquad g \in G,\ s \in S.$$

**Определение 2.** Действие группы $G$ *обладает свойством отслеживания* (по отношению к порождающему множеству $S$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $d > 0$, что для любой $d$-псевдотраектории $\{x_g\}_{g \in G}$ (соответствующей множеству S) найдется такая точка $p \in M$, что

$$\rho\left(\Phi(g, p), x_g\right) < \varepsilon, \qquad g \in G.$$

Будем говорить, что действие $\Phi$ *равномерно непрерывно*, если для некоторого порождающего множества $S$ отображения $\Phi(s, \cdot)$, $s \in S$, равномерно непрерывны. Очевидно, что из наличия равномерной непрерывности для одного конечного порождающего множества следует равномерная непрерывность для любого другого, поэтому мы можем говорить о равномерной непрерывности исходного действия $\Phi$, не уточняя выбор порождающего множества.

**Основное техническое предположение:** все рассматриваемые действия мы будем предполагать равномерно непрерывными (это позволяет сделать наши определения не зависящими от выбора порождающего множества). В частности, при этом ограничении наличие свойства отслеживания не зависит от выбора множества $S$ (доказательство нетрудно и его можно найти в [4]).

Перейдем к определению обратного отслеживания.

**Определение 3.** Семейство непрерывных отображений

$$\Gamma = \{\gamma_g \in C(M \to M)\}_{g \in G}$$

будем называть *d-методом* (по отношению к порождающему множеству $S$), если

$$\rho\left(\gamma_{sg}(x), \Phi(s, \gamma_g(x))\right) < d, \qquad g \in G,\ s \in S,\ x \in M.$$

Предполагается, что $\gamma_e(x) = x$, $x \in M$.

*Траектория метода* $\Gamma$ — это семейство

$$\{x_g = \gamma_g(x_e)\}_{g \in G}.$$

Заметим, что траектории $d$-метода являются $d$-псевдотраекториями, а также, что множество $d$-методов непусто, так как всегда можно выбрать метод, определяемый самой системой:

$$\gamma_g(x) \equiv \Phi(g, x).$$

**Определение 4.** Действие $\Phi$ *обладает свойством обратного отслеживания* (по отношению к порождающему множеству $S$), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для всех точек $p \in M$ и всех $d$-методов $\Gamma$ существует такая траектория метода $\Gamma$ $\{x_g\}_{g \in G}$, что

$$\rho\left(\Phi(g, p), x_g\right) < \varepsilon, \qquad g \in G.$$

Как и в случае прямого отслеживания, предположение о равномерной непрерывности действия $\Phi$ оказывается достаточным для того, чтобы наличие свойства обратного отслеживания не зависело от выбора порождающего множества $S$ (см. [4]).

**3. Действие группы Баумслага—Солитара на $\mathbb{R}$.** Рассмотрим следующую группу:

$$BS(1, n) = \{< A, B >|\ BA = A^n B\},\ n > 1.$$

Очевидно, что она изоморфна группе преобразований вещественной прямой, порожденной следующими отображениями:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = nx.$$

Эту группу преобразований рассмотрим как действие $BS(1, n)$ на $\mathbb{R}$:

$$\Phi(A, x) = f(x), \quad \Phi(B, x) = g(x). \tag{1}$$

Мы будем рассматривать естественное симметричное порождающее множество

$$S = \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}.$$

Для дальнейшего изложения удобно каждое слово в данной группе представить в специальном *каноническом виде*.

**Лемма 1.** *Каждое слово в группе $BS(1,n)$ можно представить в виде*

$$B^{m_1} A^{m_2} B^{m3}, \qquad m_1 \in \mathbb{Z}_0^-,\ m_2 \in \mathbb{Z},\ m_3 \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{2}$$

Доказательство. Из группового соотношения следует, что

$$AB^{-1} = B^{-1}A^n,$$
$$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-n}.$$

Из этих соотношений следует, что если в исходном слове встретился символ $B^{-1}$, то его можно перенести в самое начало слова с соответствующим изменением степеней у символов $A$ и $A^{-1}$. Кроме того, имеются следующие тождества:

$$BA = A^nB,$$
$$BA^{-1} = A^{-n}B.$$

Следовательно, все символы $B$ с положительными степенями (если они есть) можно сгруппировать в правом конце слова, как и указано в формулировке леммы. ■

Для сокращения записи канонический вид слова (2) мы будем кратко записывать в виде тройки $(m_1, m_2, m_3)$. Легко видеть, что соответствие между словами и тройками чисел неоднозначно. Например, тождественное слово будет представлять бесконечное множество троек вида $\left\{(-k, 0, k) \mid k \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$.

**Лемма 2.** *Тройки $(m_1, m_2, m_3)$ и $(k_1, k_2, k_3)$ определяют одно и то же слово тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$\begin{cases} m_1 + m_3 = k_1 + k_3, \\ m_2 n^{m_1} = k_2 n^{k_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Воспользуемся изоморфным образом исходной группы. Слову $B^{m_1} A^{m_2} B^{m3}$ однозначно сопоставляется преобразование вещественной прямой, заданное следующим образом:

$$h(x) = n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2\right).$$

Совпадение слов равносильно тождественному равенству отображений:

$$n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2\right) = n^{k_1}\left(n^{k_3}x + k_2\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Приведение соответствующих коэффициентов дает искомое соотношение. ■

Траектория произвольной точки $p \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$Orb(p) = \left\{n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2\right) \mid m_1 \in \mathbb{Z}_0^-,\ m_2 \in \mathbb{Z},\ m_3 \in \mathbb{Z}_0^+\right\}. \tag{4}$$

Из этого выражения, в частности, видно, что траектория *любой* точки будет всюду плотной в $\mathbb{R}$.

Действительно, рассмотрев точки траектории с $m_3 = m_1$, получим множество

$$\left\{p + \frac{m_2}{n^{-m_1}}\right\},$$

которое, очевидно, плотно на прямой.

Отметим, как преобразуются слова в каноническом виде при умножении слева на элементы порождающего множества:

$$A^{\pm 1} \cdot (m_1, m_2, m_3) = \begin{cases} (0, m_2 \pm 1, m_3), & m_1 = 0; \\ (m_1, m_2 \pm n^{-m_1}, m_3), & m_1 \neq 0; \end{cases}$$

$$B \cdot (m_1, m_2, m_3) = \begin{cases} (0, nm_2, m_3 + 1), & m_1 = 0; \\ (m_1 + 1, m_2, m_3), & m_1 \neq 0; \end{cases}$$

$$B^{-1} \cdot (m_1, m_2, m_3) = (m_1 - 1, m_2, m_3).$$

Выпишем определение $d$-метода $\Gamma = \{\gamma_g\}_{g \in BS(1,n)}$ с учетом введенных обозначений.

**Лемма 3.** *Семейство непрерывных отображений* $\{\gamma_{(m_1,m_2,m_3)} \mid m_1 \in \mathbb{Z}_0^-, m_2 \in \mathbb{Z}, m_3 \in \mathbb{Z}_0^+\}$ *с* $\gamma_{(0,0,0)}(x) \equiv x$ *является* $d$*-методом для рассматриваемого действия (1) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} |\gamma_{(0,m_2 \pm 1,m_3)}(x) - \gamma_{(0,m_2,m_3)}(x) \mp 1| < d, \\ |\gamma_{(m_1,m_2 \pm n^{-m_1},m_3)}(x) - \gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x) \mp 1| < d, & m_1 \neq 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} |\gamma_{(0,nm_2,m_3+1)}(x) - n\gamma_{(0,m_2,m_3)}(x)| < d, \\ |\gamma_{(m_1+1,m_2,m_3)}(x) - n\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x)| < d, & m_1 \neq 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\left| \gamma_{(m_1-1,m_2,m_3)}(x) - \frac{1}{n}\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x) \right| < d. \tag{7}$$

Все выписанные соотношения (5)–(7) должны быть верны для любого $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, для троек, удовлетворяющих соотношениям (3), соответствующие отображения $\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}$ должны быть тождественно равны.

Докажем основной результат.

**Теорема 1.** *Действие (1) не обладает свойством обратного отслеживания.*

Доказательство. Рассмотрим следующее семейство отображений:

$$\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x) = n^{m_1}(n^{m_3}x + m_2 c). \tag{8}$$

Здесь $c \neq 1$ — константа, удовлетворяющая соотношению

$$|1 - c| < d. \tag{9}$$

Покажем, что данное семейство является $d$-методом. Проверим все условия леммы 3.

Во-первых, соотношения

$$n^{m_1}(n^{m_3}x + m_2 c) \equiv n^{k_1}(n^{k_3}x + k_2 c)$$

равносильны условиям (3).

Также очевидно, что $\gamma_{(0,0,0)}(x) \equiv x$.

Проверим справедливость условий (5)–(7) для данного метода $\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}$.

Условие (5):

$$|n^{m_3}x + (m_2 \pm 1)c - n^{m_3}x - m_2 c \mp 1| = |1 - c| < d;$$

$$\left|n^{m_1}\left(n^{m_3}x+\left(m_2\pm n^{-m_1}\right)c\right)-n^{m_1}\left(n^{m_3}x+m_2c\right)\mp 1\right|=|1-c|<d.$$

Условие (6):

$$\left|\left(n^{m_3+1}x+nm_2c\right)-n\left(n^{m_3}x+m_2c\right)\right|=0<d;$$
$$\left|n^{m_1+1}\left(n^{m_3}x+m_2c\right)-n^{m_1+1}\left(n^{m_3}x+m_2c\right)\right|=0<d.$$

Условие (7) имеет вид, аналогичный предыдущему неравенству.

Таким образом, мы действительно получили $d$-метод.

Предположим, что система обладает свойством обратного отслеживания и пусть $\varepsilon$ и $d$ такие, как в *определении 4*.

Выберем число $c$ из условия (9) и рассмотрим метод, заданный соотношением (8). По определению для каждой точки $p$ можно так выбрать $x$, что неравенства

$$|n^{m_1}\left(n^{m_3}p+m_2\right)-n^{m_1}\left(n^{m_3}x+m_2c\right)|<\varepsilon \tag{10}$$

будут выполнены для каждой тройки $(m_1,m_2,m_3)\in\mathbb{Z}_0^-\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0^+$.

Рассмотрим тройки вида $(-1,k,1)$, где $k\in\mathbb{Z}$. Для них неравенство (10) перепишется в виде

$$|p-x-nk(1-c)|<\varepsilon. \tag{11}$$

Легко видеть, что данное неравенство будет нарушаться для достаточно большого $k$ (так как все остальные числа фиксированы).

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

**4. Действие группы Баумслага—Солитара на $\mathbb{R}^2$.** Для упрощения выкладок будем работать со следующей метрикой:

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)):=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}.$$

Рассмотрим действие $\Psi$ группы $BS(1,n)$, порожденное матрицами

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}:$$

$$\Psi(A,x)=Ax,\ \Psi(B,x)=Bx. \tag{12}$$

Легко проверить следующие соотношения:

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix},\quad B^k=\begin{pmatrix}1&0\\0&n^k\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{Z},$$
$$BA=A^nB.$$

Таким образом, $\Psi$ — действительно действие исходной группы.

Используя представление для слов, полученное в лемме 1. Замечаем, что орбита произвольной точки $x=(x_1,x_2)$ имеет вид

$$Orb(x)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\n^{m_1}\left(m_2x_1+n^{m_3}x_2\right)\end{pmatrix}\middle|\,m_1\in\mathbb{Z}_0^-,\,m_2\in\mathbb{Z},\,m_3\in\mathbb{Z}_0^+\right\}. \tag{13}$$

**Лемма 4.** *Следующее семейство определяет $d$-метод для любых значений $d$:*

$$\gamma_{m_1,m_2,m_3}((x_1,x_2)) := \begin{pmatrix} x_1 \\ n^{m_1}\left(m_2 c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2\right) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь $c(\cdot)$ — произвольная непрерывная функция, не принимающая значение 1 и удовлетворяющая соотношению

$$|xc(x) - x| < d. \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что соотношения (3) выполняются. Нужно проверить лишь соответствующие определению $d$-метода неравенства, аналогичные (5)–(7). Будем работать только со второй компонентой векторов, так как первая остается без изменений.

Неравенства, аналогичные (5), имеют вид

$$\begin{gathered} |(m_2+1)c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2 - x_1 - m_2 c(x_1)x_1 - n^{m_3}x_2| = |x_1 c(x_1) - x_1| < d, \\ \left|n^{m_1}\left(m_2 \pm n^{-m_1}\right)c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2 - \left(\pm x_1 + n^{m_1}\left(m_2 c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2\right)\right)\right| = \\ = |x_1 c(x_1) - x_1| < d. \end{gathered}$$

Легко видеть, что, как и в одномерном случае, неравенства (6) и (7) приводят к очевидному неравенству $d > 0$. Следовательно, мы действительно получили $d$-метод. ■

Проводя те же рассуждения, как в доказательстве теоремы 1, мы можем показать, что действие (12) не обладает свойством обратного отслеживания.

Аналог выражения (11) будет иметь вид

$$\left|\frac{k}{n}(p_1 - c(x_1)x_1) + p_2 - x_2\right| < \varepsilon. \tag{16}$$

Так как надлежащим выбором функции $c(\cdot)$ можно обеспечить выполнение соотношения

$$p_1 - c(x_1)x_1 \neq 0,$$

то выражение в левой части неравенства (16) неограниченно возрастает с увеличением $k$, что приводит к противоречию, и, следовательно, доказывает наше утверждение в двумерном случае.

### Литература


1. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Тр. 5-й межд. конф. по нелин. колеб. Т. 2. Киев, 1969. С. 39–45.

2. *Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. B.* Shadowing in actions of some Abelian groups // Fund. Math. 2003. Vol. 179. P. 83–96.

3. *Osipov A. V., Tikhomirov S. B.* Shadowing for actions of some finitely generated groups // Dyn. Syst. 2014. Vol. 29. P. 337–351.

4. *Piluygin S. Yu.* Inverse shadowing in group actions // Dynamical Systems. 2017. Vol. 32, N 2. P. 198–210. DOI:10.1080/14689367.2016.1173651


Статья поступила в редакцию 29 марта 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

*Фадеев Алексей Викторович* — аспирант; aleksei_fadeev@yahoo.com

## Inverse shadowing in actions of Baumslag—Solitar group

*A. V. Fadeev*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Fadeev A. V. Inverse shadowing in actions of Baumslag—Solitar group. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 637–644. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.410 (In Russian).

In parallel with the shadowing theory (which is now very well-developed), the theory of inverse shadowing was developed. The main difference between the two theories is that the shadowing property means that we can find an exact trajectory near an approximate one while the inverse shadowing means that given a family of approximate trajectories we can find a member of this family that is close to any chosen exact trajectory. We generalise the property of inverse shadowing for group actions and prove the absence of this property for some linear actions of the Baumslag—Solitar group which is often considered as a source of counterexamples.

*Keywords*: inverse shadowing, Baumslag—Solitar group.

### References

1. Anosov D. V., "On a class of invariant sets of smooth dynamical systems", *Proc. of Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations* **2**, 39–45 (1969) [in Russian].

2. Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. B., "Shadowing in actions of some Abelian groups", *Fund. Math.* **179**, 83–96 (2003).

3. Osipov A. V., Tikhomirov S. B., "Shadowing for actions of some finitely generated groups", *Dyn. Syst.* **29**, 337–351 (2014).

4. Piluygin S. Yu., "Inverse shadowing in group actions", *Dynamical Systems* **32**(2), 198–210 (2017). DOI:10.1080/14689367.2016.1173651

Received: March 29, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author's information:

*Aleksei V. Fadeev* — aleksei_fadeev@yahoo.com