

Метод нахождения оптимального решения дифференциального включения*

А. В. Фоминых

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фоминых А. В.* Метод нахождения оптимального решения дифференциального включения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 645–657. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.411>

В статье исследуется дифференциальное включение с заданным непрерывным выпуклым многозначным отображением. На заданном конечном промежутке времени требуется построить решение дифференциального включения, которое удовлетворяет заданным начальным и конечным условиям и доставляет минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала в пространстве кусочно-непрерывных функций. В случае непрерывности производной опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным этот функционал дифференцируем по Гато. В статье найден градиент Гато, получены необходимые условия минимума данного функционала. На основании этих условий к исходной задаче применяется метод наискорейшего спуска. Численные примеры иллюстрируют работу построенного алгоритма.

Ключевые слова: дифференциальное включение, опорная функция, метод наискорейшего спуска.

1. Введение. Как известно, дифференциальное включение [1, 2] является обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку, например, неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные неравенства и дифференциальные уравнения с ограничениями на фазовые координаты, могут быть записаны в виде дифференциальных включений. Кроме того, известно, что многие задачи оптимального управления при естественных предположениях могут быть сведены к дифференциальным включениям [3]. Как правило, дифференциальное включение имеет бесконечное множество решений, поэтому естественно поставить задачу выделения решения, оптимального в каком-то смысле, например, в интегральном.

Необходимые условия минимума для задач с дифференциальными включениями как с выпуклыми, так и с невыпуклыми многозначными отображениями, исследовались в таких статьях, как [4–7]. Более конструктивные условия минимума были получены в работах [8–10]. (Некоторые из перечисленных работ также рассматривают случай присутствия фазовых ограничений.) Множества достижимости дифференциальных включений также изучались в различных работах (см., например, [11–15]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-00014 мол-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

2. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t) \quad (1)$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0 \quad (2)$$

и конечным условием

$$x(T) = x_T. \quad (3)$$

В формуле (1) $F(x, t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0, T]$, $x(t)$ — n -мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва) и ограниченной на $[0, T]$ производной, $T > 0$ — заданный конечный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in R^n$ отображение $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из R^n . Предположим также, что опорная функция многозначного отображения $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна. В формулах (2), (3) $x_0, x_T \in R^n$ — заданные векторы.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, являющуюся решением включения (1) и удовлетворяющую условиям (2), (3), которая доставляет минимум функционалу

$$J(x) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (4)$$

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по всем трем аргументам и непрерывно дифференцируемая по x и по \dot{x} . Предполагаем, что такое решение существует.

Здесь $C_n[0, T]$ — пространство n -мерных непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций с производной из пространства $P_n[0, T]$; $P_n[0, T]$ — пространство кусочно-непрерывных и ограниченных на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций, имеющих на $[0, T]$ конечное число точек разрыва. Далее в статье также потребуется пространство $L_n^2[0, T]$ суммируемых на $[0, T]$ с квадратом n -мерных вектор-функций.

Если $t_0 \in [0, T]$ — точка разрыва вектор-функции \dot{x} , то для определенности полагаем, что $\dot{x}(t_0)$ — правосторонняя производная вектор-функции \dot{x} в точке t_0 ; $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции \dot{x} в точке T .

Для произвольного множества $F \subset R^n$ определим опорную функцию вектора $\psi \in R^n$ соотношением $c(F, \psi) = \sup_{f \in F} \langle f, \psi \rangle$, где $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов $a, b \in R^n$.

Замечание 1. Вместо траекторий из пространства $C_n[0, T]$ с производной из пространства $P_n[0, T]$ в статье можно рассматривать абсолютно непрерывные на отрезке $[0, T]$ траектории с измеримой и почти всюду ограниченной на отрезке $[0, T]$ производной соответственно. Такое рассмотрение при естественных предположениях гарантирует существование решения поставленной задачи. Выбор в статье пространства решений обусловлен возможностью их практического построения.

3. Сведение к задаче безусловной оптимизации. Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x, t)$. Поскольку $\forall t \in [0, T]$ и $\forall x \in R^n$ многозначное

отображение $F(x, t)$ представляет собой выпуклый компакт в R^n , то включение (1) можно переписать иначе [16]:

$$\langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0, T],$$

где S — единичная сфера в R^n с центром в начале координат.

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$, тогда с учетом (2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Положим

$$\ell(\psi, z, t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t), t), \psi), \quad (5)$$

$$h(z, t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\} \quad (6)$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(z(t), t) dt. \quad (7)$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0, T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (7) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \quad (z \in \Omega), \text{ если } \langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0, T], \\ \varphi(z) > 0 \quad (z \notin \Omega) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

то есть включение (1) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = 0$.

Введем функционал

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2.$$

Видно, что краевые условия (2), (3) выполнены тогда и только тогда, когда $\chi(z) = 0$.

Построим функционал

$$I(z) = \int_0^T f_0 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), t \right) dt + \lambda(\varphi(z) + \chi(z)), \quad (8)$$

где $\lambda > 0$ — достаточно большое число.

Известно [17], что при достаточно больших значениях λ решение задачи (1)–(4) сколь угодно «близко» к траектории

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau,$$

где z^* — точка глобального минимума функционала (8). Итак, нахождение приближенного решения исходной задачи свелось к минимизации функционала (8) на пространстве $P_n[0, T]$. На практике решают эту задачу для фиксированного значения $\bar{\lambda}$. Если решение этой задачи (при $\lambda = \bar{\lambda}$) удовлетворяет ограничениям в виде дифференциального включения и краевых условий с заданной точностью (то есть значение функционала $\varphi + \chi$ на этом решении достаточно мало), то процесс прекращается; в противном случае, увеличивают значение λ и повторяют процесс с этим новым значением.

4. Дифференциальные свойства функционала I . Как уже было отмечено, считаем, что опорная функция $c(F(x, t), \psi)$ многозначного отображения $F(x, t)$ дифференцируема по фазовой переменной x и что производная $\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда для любых $x, y \in C_n[0, T]$ и для любых $\psi \in S, t \in [0, T]$ верно соотношение

$$c(F(x + \alpha y, t), \psi) - c(F(x, t), \psi) = \alpha \left\langle \frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x}, y \right\rangle + o(\alpha, \psi, t), \quad \frac{o(\alpha, \psi, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \quad (9)$$

Пусть $v \in P_n[0, T]$. Положим

$$z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v(t), \\ y(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Используя свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [3] и равенства (9), (10), вычислим

$$\ell(\psi, z_\alpha, t) = \ell(\psi, z, t) + \alpha H_1(\psi, z, v, t) + o(\alpha, \psi, t), \quad \frac{o(\alpha, \psi, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H_1(\psi, z, v, t) = \langle \psi, v(t) \rangle - \left\langle \frac{\partial c(F(x(t), t), \psi)}{\partial x}, \int_0^t v(\tau) d\tau \right\rangle.$$

С учетом соотношений (5), (6) далее найдем

$$h(z_\alpha, t) = h(z, t) + \alpha H(z, v, t) + o(\alpha, t), \quad \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H(z, v, t) = \max_{\psi \in \bar{R}} H_1(\psi, z, v, t), \text{ если } \max_{\psi \in S} \ell(\psi, z, t) > 0,$$

$$H(z, v, t) = 0, \text{ если } \max_{\psi \in S} \ell(\psi, z, t) < 0,$$

$$H(z, v, t) = \max_{\psi \in \bar{R}} \max\{0, H_1(\psi, z, v, t)\}, \text{ если } \max_{\psi \in S} \ell(\psi, z, t) = 0,$$

здесь

$$\bar{R}(z, t) = \left\{ \bar{\psi}(z, t) \in S \mid \max\{0, \ell(\bar{\psi}, z, t)\} = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\} \right\}.$$

В силу структуры функционала (5) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, z, t) > 0$ максимум выражения

$$\max\{0, \ell(\psi, z, t)\} = \ell(\psi, z, t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(z, t) \in S$. Действительно, в данном случае точка z не принадлежит множеству F . Из свойств опорной функции известно [16], что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ величина $h(z(t), t)$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, то есть $h(z(t), t) = \|z(t) - f(x(t), t)\|$ (евклидова норма), где $f(x(t), t)$ — проекция точки $z(t)$ на множество $F(x(t), t)$, которая единственна, поскольку $F(x(t), t)$ — выпуклый компакт. Отсюда видно, что максимум выражения $h(z(t), t) = \ell(\psi, z(t), t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t), t), \psi) = \|z(t) - f(x(t), t)\|$ достигается на векторе $\psi^*(z(t), t) = (z(t) - f(x(t), t)) / \|z(t) - f(x(t), t)\|$, который единственен в силу единственности вектора $f(x(t), t)$. Поэтому в этом случае множество $\bar{R}(z, t)$ состоит из единственного элемента $\psi^*(z, t)$.

Замечание 2. Величина $h(z(t), t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, а функционал (7) есть половина квадрата отклонения в $L_n^2[0, T]$ -норме траектории $z(t)$ от множества $F(x, t)$.

Теперь нетрудно получить разложение

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T h(z(t), t) H(z(t), v(t), t) + o(\alpha, t) dt.$$

Очевидно, что при $z \in \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато, и его градиент Гато равен нулю.

Рассмотрим случай $z \notin \Omega$. Обозначим

$$w(z, t) = \max_{\psi \in S} \ell(\psi, z, t)^2 > 0.$$

Как уже было отмечено, в этом случае данный максимум достигается на единственном элементе $\psi^*(z, t)$. Тогда функция $\psi^*(z, t)$ непрерывна по z при фиксированном t [18], поэтому с учетом непрерывности функции $\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}$ получаем, что функция $\frac{\partial w(z, t)}{\partial z}$ непрерывна по z при фиксированном t . Далее по теореме Лагранжа о среднем значении существует такое число $\theta = \theta(t) \in [0, 1]$, что

$$\begin{aligned} w(z + \alpha v, t) - w(z, t) &= \alpha \left\langle \frac{\partial w(z + \theta \alpha v, t)}{\partial z}, v \right\rangle = \\ &= \alpha \left\langle \frac{\partial w(z, t)}{\partial z}, v \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial w(z + \theta \alpha v, t)}{\partial z} - \frac{\partial w(z, t)}{\partial z}, v \right\rangle \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(z + \alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} - \int_0^T \left\langle v(t), \frac{\partial w(z(t), t)}{\partial z} \right\rangle dt \right| &= \\ = \left| \int_0^T \left\langle v(t), \frac{\partial w(z(t) + \theta \alpha v(t), t)}{\partial z} - \frac{\partial w(z(t), t)}{\partial z} \right\rangle dt \right| &\leq \end{aligned}$$

$$\leq \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\| \int_0^T \left\| \frac{\partial w(z(t) + \theta \alpha v(t), t)}{\partial z} - \frac{\partial w(z(t), t)}{\partial z} \right\| dt. \quad (11)$$

Множитель $\max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|$ ограничен, поскольку $v \in P_n[0, T]$. Норма под интегралом стремится к нулю при $\alpha \downarrow 0$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ в силу непрерывности функции $\frac{\partial w(z, t)}{\partial z}$ по z при фиксированном t . Кроме того, эта норма ограничена в силу непрерывности функции $\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости выражение (11) стремится к нулю при $\alpha \downarrow 0$, что доказывает дифференцируемость по Гато функционала φ в случае $z \notin \Omega$.

Вычисляя также классическую вариацию для функционалов χ и J , приходим к следующему результату.

Теорема 1. Если опорная функция $c(F, \psi)$ многозначного отображения $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна, то функционал I дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле

$$\begin{aligned} \nabla I(z) = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0(x, z, t)}{\partial z} + \\ & + \lambda \left\{ h(z, t) \psi^*(z, t) - \int_t^T h(z(\tau), \tau) \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \psi^*(z(\tau), \tau))}{\partial x} d\tau + x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

5. Необходимые условия минимума функционала I . Из известного необходимого условия минимума [19] дифференцируемого по Гато функционала и соотношения (12) заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть опорная функция $c(F, \psi)$ многозначного отображения $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна. Для того чтобы точка z^* доставляла минимум функционалу I необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} 0_n = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0(x^*, z^*, t)}{\partial z} + \\ & + \lambda \left\{ h(z^*, t) \psi^*(z^*, t) - \int_t^T h(z^*(\tau), \tau) \frac{\partial c(F(x^*(\tau), \tau), \psi^*(z^*(\tau), \tau))}{\partial x} d\tau + x_0 + \int_0^T z^*(t) dt - x_T \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

6. Метод наискорейшего спуска. Опишем метод наискорейшего спуска [20] для поиска стационарных точек функционала I . Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0, T]$. Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0, T]$. Если выполнено условие минимума (13), то точка z_k является стационарной точкой функционала I , и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1} = z_k - \gamma_k \nabla I(z_k),$$

где вектор-функция $x_k(t) = x_0 + \int_0^t z_k(\tau) d\tau$, а величина γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma > 0} I(z_k - \gamma \nabla I(z_k)) = I(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)). \quad (14)$$

В силу (14) имеем $I(z_{k+1}) \leq I(z_k)$. Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя ее точка является стационарной точкой функционала I по построению.

Предположим, что функционал ∇I является равномерно непрерывным и ограниченным в шаре пространства $L_n^2[0, T]$ с центром в начале координат и радиуса $r' > \sup_{z \in Z_1} \|z\|_{L_n^2[0, T]}$ (множество Лебега $Z_1 = \{z \in P_n[0, T] \mid I(z) \leq I(z_1)\}$ считаем ограниченным по норме $L_n^2[0, T]$). Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то метод сходится [21] в следующем смысле:

$$\|\nabla I(z_k)\|_{L_n^2[0, T]} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Замечание 3. Известно, что метод наискорейшего спуска часто медленно сходится. Особенно его неэффективность проявляется при больших значениях λ . Для преодоления этой трудности используют более эффективные методы, например, метод сопряженных градиентов, а также различные (в том числе эвристические) приемы, направленные на учет «овражной» структуры минимизируемого функционала [17].

7. Численные примеры. Рассмотрим примеры реализации предложенного алгоритма. В обоих примерах было взято значение $\lambda^* = 10$. Вычислительный процесс прерывался на k^* -й итерации в случае $\|\nabla I(z_{k^*})\|_{L_n^2[0, T]} \leq \varepsilon^* = 5 \times 10^{-3}$.

Пример 1. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B, \quad t \in [0, 1],$$

где B — единичный шар в R^n с центром в начале координат. Заданы краевые условия

$$x(0) = (0.5, 0.25)', \quad x(1) = (1.75, 2).$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданным краевым условиям и доставляющее минимум следующему функционалу:

$$J(x) = \int_0^1 x_1^2(t) + x_2^2(t) dt.$$

В данном случае $c(F, \psi) = x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, $\frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (2, 1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + 2t, 0.25 + t)'$.

Было проведено 13 итераций согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{13} (см. рис. 1), при этом $J(x_{13}) = 2.219$. На рис. 1 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) - x_2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$.

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_2[0, T]$, которое переводит систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2$$

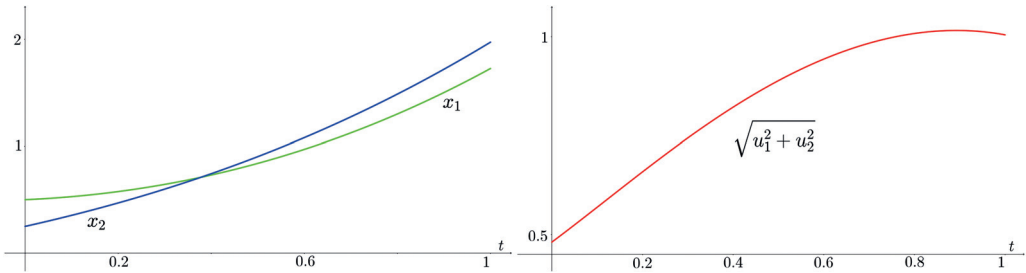


Рис. 1. Решение примера 1.

из точки $x(0)$ в точку $x(1)$ и удовлетворяет ограничению

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

При этом значение функционала

$$J(x) = \int_0^1 x_1^2(t) + x_2^2(t) dt$$

должно быть наименьшим.

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряженных переменных [22]. При этом оказалось $J(x^*) = 2.195$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в статье метода (относительная погрешность не превышает 1%).

Пример 2. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix} + D, \quad t \in [0, 1],$$

где D — единичный симплекс в R^n ($D = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0 \forall i = \overline{1, n}\}$).
Задано начальное условие

$$x(0) = (0.5, 0.5)'$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданному начальному условию и доставляющее минимум следующему функционалу:

$$J(x) = x_2(1) = 0.5 + \int_0^1 z_2(t) dt,$$

то есть найти исходящую из заданной начальной точки траекторию включения с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени.

В данном случае $c(F, \psi) = -x_2^2 \psi_1 + x_1 \psi_2 + \max\{0, \psi_1, \psi_2\}$, $\frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, -2x_2 \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (1, 1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + t, 0.5 + t)'$.

Было проведено 19 итераций согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{19} (см. рис. 2), при этом $J(x_{19}) = 0.835$. На рис. 2 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) + x_2^2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$.

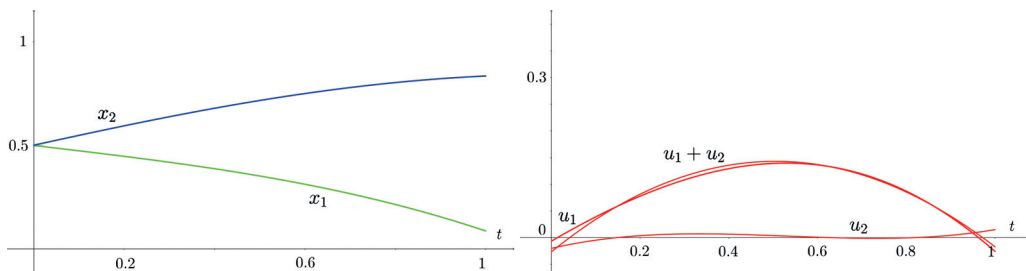


Рис. 2. Решение примера 2.

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_2[0, T]$, которое удовлетворяет ограничению

$$u_1(t) + u_2(t) \leq 1, \quad u_1(t) \geq 0, \quad u_2(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

и переводит систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u_2 \end{aligned}$$

из точки $x(0)$ в точку с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени, то есть доставляет минимум функционалу

$$J(x) = x_2(1) = 0.5 + \int_0^1 z_2(t) dt.$$

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряженных переменных [22]. При этом оказалось $J(x^*) = 0.803$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в статье метода (относительная погрешность не превышает 4%).

Пример 3. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B + Q, \quad t \in [0, 1],$$

где Q — единичный квадрат в R^n ($Q = \{x \in R^n \mid |x_i| \leq 1, \forall i = \overline{1, n}\}$). Задано начальное условие

$$x(0) = (0, 1)'$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданному начальному условию и доставляющее минимум следующему функционалу:

$$J(x) = x_2(1) = 1 + \int_0^1 z_2(t) dt,$$

то есть найти исходящую из заданной начальной точки траекторию включения с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени.

В данном случае $c(F, \psi) = -x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} + |\psi_1| + |\psi_2|$, $\frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, -\psi_1)'$.

Положим $z_1 = (0, -2)'$, тогда $x_1 = (0, 1 - 2t)'$.

Была проведена 21 итерация согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{21} (см. рис. 3), при этом $J(x_{21}) = -1.712$. На рис. 3 сплошная линия есть параметрическая кривая $\{v_1(t) = z_1(t) + x_2(t), v_2(t) = z_2(t) - x_1(t), t \in [0, 1]\}$. Пунктирная линия ограничивает допустимую область расположения этой кривой.

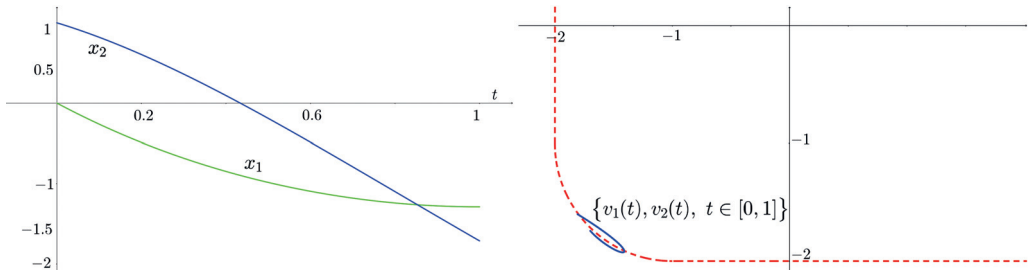


Рис. 3. Решение примера 3.

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид. Заметим, что эта задача управления имеет неклассический вид: размерность управлений больше размерности фазовых координат.

Нужно найти управление $u \in P_4[0, T]$, которое удовлетворяет ограничению

$$u_1^2(t) + u_3^2(t) \leq 1, \quad |u_2(t)| \leq 1, \quad |u_4(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

и переводит систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_3 + u_4$$

из точки $x(0)$ в точку с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени, то есть доставляет минимум функционалу

$$J(x) = x_2(1) = 1 + \int_0^1 z_2(t) dt.$$

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина. При этом оказалось $J(x^*) = -1.761$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в статье метода (относительная погрешность не превышает 3%).

Замечание 4. Как известно, метод наискорейшего спуска не дает высокую точность при достаточно большом значении штрафного параметра (и при не очень большом количестве итераций). Выбор в расчетах точности ε^* и штрафного параметра λ^* основан на балансе между проведением небольшого количества итераций и соблюдением сравнительно небольшой, но достаточной для приложений точности. Вычисления проводились символично в пакете Maple 12.0. Представляют интерес

дальнейшие исследования с целью повышения эффективности реализации предложенного в статье алгоритма, в том числе с использованием дискретизации и, возможно, других (более быстрых, чем метод наискорейшего спуска) методов минимизации в функциональном пространстве.

8. Заключение. Таким образом, в данной статье рассмотрена задача поиска оптимального в смысле интегрального функционала решения дифференциального включения с заданным начальным условием и с закрепленным правым концом. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала. Для него найден градиент Гато, выписаны необходимые условия минимума. На основании этих условий построен метод решения исходной задачи, базирующийся на методе наискорейшего спуска. Реализация данного алгоритма иллюстрируется на численных примерах.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам за ценные замечания и внимательное отношение к работе.

Литература

1. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014. 597 с.
2. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Birkhauser, Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.
3. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
4. *Cernea A., Georgescu C.* Necessary optimality conditions for differential–difference inclusions with state constraints // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 344. P. 43–53.
5. *Mordukhovich B. Sh.* Discrete approximations and refined Euler–Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1995. Vol. 33, N 3. P. 887–915.
6. *Pappas G. S.* Optimal Solutions to Differential Inclusions in Presence of State Constraints // J. Optim. Theory Appl. 1984. Vol. 44, N 4. P. 657–679.
7. *Zhu Q. J.* Necessary Optimality Conditions for Nonconvex Differential Inclusions with Endpoint Constraints // Journal of Differential Equations. 1996. Vol. 124. P. 186–204.
8. *Арутюнов А. В., Асеев С. М., Благодатских В. И.* Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 1993. Т. 184, № 6. С. 3–32. Перевод: Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. Vol. 79, N 1. P. 117–139.
9. *Асеев С. М.* Метод гладких аппроксимаций в теории необходимых условий оптимальности для дифференциальных включений // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 3–26. Перевод: Izv. Math. 1997. Vol. 61, N 2. P. 235–258.
10. *Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N.* Exact Penalties and Differential Inclusions // Electron. J. Diff. Equ. 2015. Vol. 2015, N 309. P. 1–13.
11. *Никольский М. С.* Об аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса // Матем. заметки. 1987. Т. 41. Вып. 1. С. 71–76.
12. *Никольский М. С.* Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28, № 8. С. 1252–1254.
13. *Baier R., Gerdtts M., Hausa I.* Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numer. Algebra Control Optim. 2013. Vol. 3. P. 519–548.
14. *Panasjuk A. I.* Equations of attainable set dynamics, Part 1: Integral funnel equations // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64. P. 349–366.
15. *Puri A., Borkar V., Varaiya P.* ε -Approximation of differential inclusions // Proc. of International Hybrid Systems Workshop. Hybrid Systems III. In Ser. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1066. Springer, 1995. P. 362–376.
16. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.
17. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
18. *Bonnans J. F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. New York: Springer Science+Business Media, 2000. 600 p.

19. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
20. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
21. Penot J. P. On the convergence of descent algorithms // *Comput. Optim. Appl.* 2002. Vol. 23. Iss. 3. P. 279–284.
22. Иглин С. П. Математические расчеты на базе MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 640 с.

Статья поступила в редакцию 22 августа 2017 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Фоминых Александр Владимирович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; alexfomster@mail.ru

A method for finding the optimal solution of a differential inclusion

A. V. Fominyh

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Fominyh A. V. A method for finding the optimal solution of a differential inclusion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 645–657. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.411> (In Russian).

In the paper, we study a differential inclusion with a given continuous convex multivalued mapping. For a given finite time interval, it is required to construct a solution of the differential inclusion, that satisfies the given initial and the final conditions and minimizes the integral functional. With the help of support functions, the original problem is reduced to minimizing some functional in the space of partially continuous functions. In the case of continuous differentiability of the support function of a multivalued mapping with respect to the phase variables, this functional is Gateaux differentiable. In the paper, Gateaux gradient is found, necessary conditions for the minimum of the given functional are obtained. On the basis of these conditions, the method of the steepest descent is applied to the original problem. Numerical examples illustrate the constructed algorithm realization.

Keywords: differential inclusion, support function, steepest descent method.

References

1. Polovinkin E. S., *Multivalued analysis and differential inclusions* (Fizmatlit, Moscow, 2014, 597 p.) [in Russian].
2. Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-valued analysis* (Birkhauser, Boston, 1990, 461 p.).
3. Blagodatskih V. I., Filippov A. F., “Differential inclusions and optimal control”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **169**, 194–252 (1985) [in Russian].
4. Cernea A., Georgescu C., “Necessary optimality conditions for differential–difference inclusions with state constraints”, *J. Math. Anal. Appl.* **344**, 43–53 (2007).
5. Mordukhovich B. Sh., “Discrete approximations and refined Euler–Lagrange conditions for non-convex differential inclusions”, *SIAM J. Control Optim.* **33**(3), 887–915 (1995).
6. Pappas G. S., “Optimal Solutions to Differential Inclusions in Presence of State Constraints”, *J. Optim. Theory Appl.* **44**(4), 657–679 (1984).
7. Zhu Q. J., “Necessary Optimality Conditions for Nonconvex Differential Inclusions with Endpoint Constraints”, *Journal of Differential Equations* **124**, 186–204 (1996).
8. Arutyunov A. V., Aseev S. M., Blagodatskikh V. I., “Necessary conditions of the first order in the problem of optimal control of a differential inclusion with phase constraints”, *Mat. Sb.* **184**(6), 3–32 (1993) [in Russian]. English transl. in: *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **79**(1), 117–139 (1994).
9. Aseev S. M., “A method of smooth approximation in the theory of necessary optimality conditions for differential inclusions”, *Izvestiya RAN: Ser. Mat.* **61**(2), 3–26 (1997) [in Russian]. English transl. in: *Izv. Math.* **61**(2), 235–258 (1997).

10. Fominyh A.V., Karelin V.V., Polyakova L.N., “Exact Penalties and Differential Inclusions”, *Electron. J. Diff. Equ.* **2015**(309), 1–13 (2015).
11. Nikol’skiy M.S., “On approximation of the attainability domain of control process”, *Mat. Zametki* **41**(1), 71–76 (1987) [in Russian].
12. Nikol’skiy M.S., “On a method for approximation of attainable set for a differential inclusion”, *Journ. of Vych. Mat. Math. Phys.* **28**, 1252–1254 (1988) [in Russian].
13. Baier R., Gerdtz M., Xausa I., “Approximation of reachable sets using optimal control algorithms”, *Numer. Algebra Control Optim.* **3**, 519–548 (2013).
14. Panasyuk A.I., “Equations of attainable set dynamics, Part 1: Integral funnel equations”, *J. Optim. Theory Appl.* **64**, 349–366 (1990).
15. Puri A., Borkar V., Varaiya P., “ ε -Approximation of differential inclusions”, *Proc. of International Hybrid Systems Workshop. Hybrid Systems III*. In Ser. *Lecture Notes in Computer Science* **1066**, 362–376 (Springer, 1995).
16. Blagodatskih V.I., *Introduction to optimal control* (Vysshaya shkola, Moscow, 2001, 239 p.) [in Russian].
17. Vasil’ev F.P., *Optimization methods* (Factorial Press, Moscow, 2002, 824 p.) [in Russian].
18. Bonnans J.F., Shapiro A., *Perturbation Analysis of Optimization Problems* (Springer Science+Business Media, New York, 2000, 600 p.).
19. Demyanov V.F., *Extremum conditions and variation calculus* (Vysshaya shkola, Moscow, 2005, 335 p.) [in Russian].
20. Kantorovich L.V., Akilov G.P., *Functional analysis* (Nauka, Moscow, 1977, 741 p.) [in Russian].
21. Penot J.P., “On the convergence of descent algorithms”, *Comput. Optim. Appl.* **23**, iss. 3, 279–284 (2002).
22. Igin S.P., *Mathematical calculations on the basis of MATLAB* (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2005, 640 p.) [in Russian].

Received: August 22, 2017

Accepted: July 2, 2018

Author’s information:

Alexander V. Fominyh — alexfomster@mail.ru