

МЕХАНИКА

УДК 514.85

MSC 53Z05

**Особенности динамики
прямолинейного движения механизма Дарбу***С. Н. Бурьян*Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Бурьян С. Н. Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 658–669. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412>

Рассматривается механизм Дарбу. Доказывается, что данный шарнирный механизм позволяет преобразовывать вращательное движение одного звена в (строго) прямолинейное движение его вершины H . Звенья механизма Дарбу могут образовывать геометрические фигуры, такие как треугольники и квадрат (с проведенными диагоналями). В «квадратной» конфигурации механизма геометрически возникает возможность ветвления, когда вершина H может двигаться как по прямой линии L , так и по кривой γ . При этом ранг голономных связей системы падает на единицу. Для прямолинейного движения вершины H записывается уравнение Лагранжа второго рода в терминах координаты точки H . Коэффициенты этого уравнения гладко продолжаются через точку ветвления. Изучается «предельное» поведение сил реакции в стержнях при движении механизма в точку ветвления. Внешняя сила, которая не совершает работу над точкой H , ведет к неограниченным реакциям в стержнях. Также изучается кинематика в точке ветвления. Обратная задача динамики в точке, где ранг голономных связей не максимален, разрешима. Множители Лагранжа Λ_i в точке ветвления определены неоднозначно, но соответствующие им силы, действующие на вершины механизма, определены однозначно.

Ключевые слова: механизм Дарбу, особая точка, обратная задача динамики.

1. Введение. В теории параллельных механизмов важное место занимают исследования особых точек, в которых система может терять управляемость. Особые положения можно искать, например, как неоднозначность в решении уравнения активных-пассивных шарниров [1]. Анализ особых положений с точки зрения сил

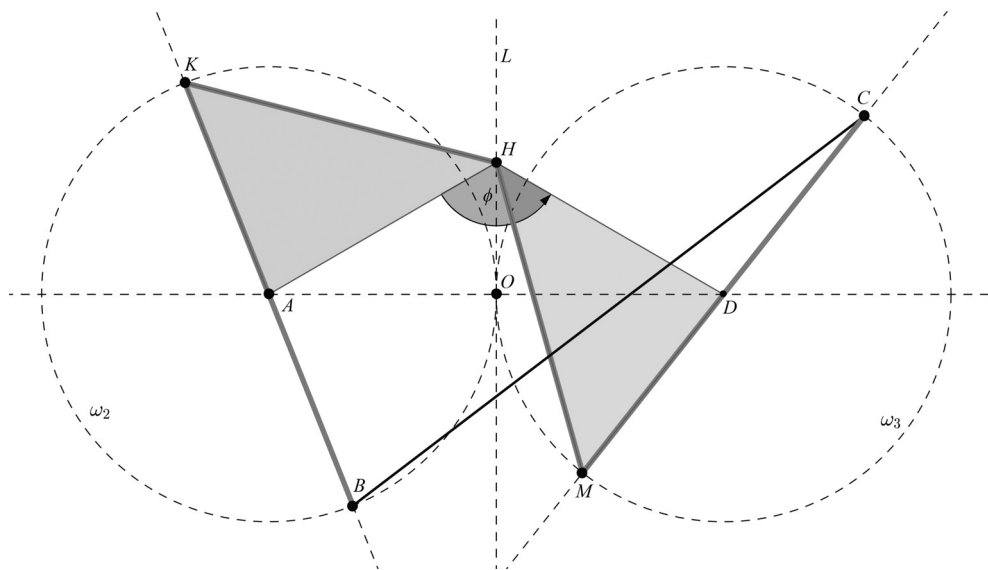


Рис. 1. Прямолинейное движение точки H .

реакций можно найти в работе [2]. Интерес также представляют не только кинематические, но и геометрические особенности, связанные с точками ветвления механизма (особенностями конфигурационных пространств). Один из механизмов параллельной структуры с геометрически особой точкой рассматривается в [3]. Известным механизмом с особыми точками также является «парадоксальный» механизм Чебышёва [4].

В данной работе мы рассмотрим движение системы через точку ветвления на примере механизма Дарбу. При составлении и анализе уравнений движения и множителей Лагранжа применяется общая теория голономных систем [5, 6]. Другой механизм с особенностью конфигурационного пространства был рассмотрен автором в [7, 8]. Для него также возможна особенность касания, а не только трансверсального пересечения ветвей.

Перейдем теперь к построению механизма Дарбу.

2. Прямолинейное движение. Зададим масштабный параметр l . Зафиксируем на плоскости две точки A и D , $|AD| = 2l$. Пусть точка H движется по среднему перпендикуляру L к прямой AD . Обозначим середину отрезка AD как O .

Пусть $|OH| = h$. Рассмотрим треугольники HKB и HMC с длинами сторон $|KH| = |HM| = \sqrt{2}l$ и $|AK| = |MD| = l$. Поскольку $|AH|$ и $|HD|$ равны как гипотенузы прямоугольных треугольников AHO и DOH , то треугольники HKB и HMC равны по трем сторонам. Пусть треугольники HKB и HMC расположены в плоскости так, что они не симметричны относительно прямой L (рис. 1).

Треугольник HMD можно получить из треугольника HKA поворотом на $\angle KHM$ вокруг точки H . Обозначим этот угол через ϕ . Поскольку поворот вокруг точки H сохраняет углы с вершиной H , то $\angle BHC = \angle AHD = \angle KHM = \phi$. Тогда по теореме косинусов величина $|BC|^2 = 2|BH|^2(1 - \cos \phi)$. Найдем зависимость $|BH|$ и $|\phi|$ от высоты h .

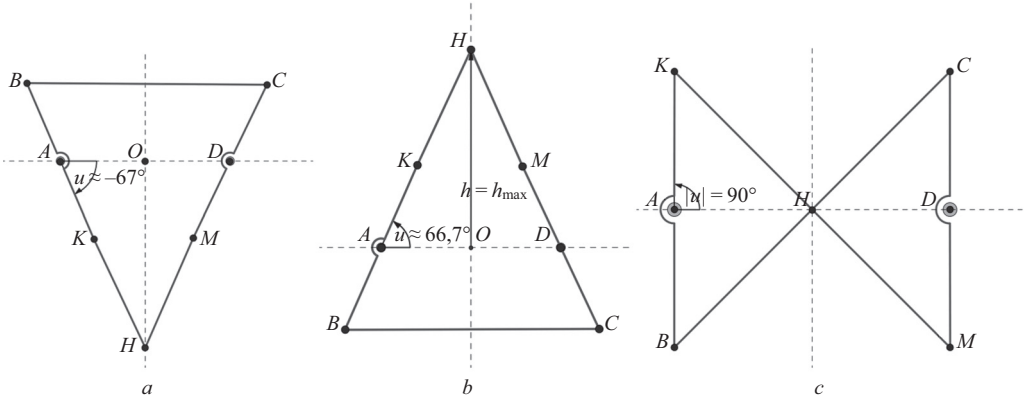


Рис. 2. «Фигурные» положения механизма.

Из равнобедренного треугольника AHD получаем

$$\cos \phi = \frac{(l^2 + h^2) + (l^2 + h^2) - 4l^2}{2(l^2 + h^2)} = \frac{h^2 - l^2}{h^2 + l^2};$$

$$1 - \cos \phi = \frac{2l^2}{h^2 + l^2}.$$

В $\triangle AKH$ имеем $|AK| = l$, $|KH| = \sqrt{2}l$, $|AH|^2 = l^2 + h^2$, а потому

$$\cos(\angle HKA) = \frac{l^2 + 2l^2 - l^2 - h^2}{2l\sqrt{2}l} = \frac{2l^2 - h^2}{2\sqrt{2}l^2}.$$

Тогда величина $|BH|$ такова:

$$\begin{aligned} |BH|^2 &= |KB|^2 + |KH|^2 - 2|KB||KH| \cos(\angle HKA) = \\ &= 4l^2 + 2l^2 - 2(2l)(\sqrt{2}l) \frac{2l^2 - h^2}{2\sqrt{2}l^2} = 2l^2 + 2h^2. \end{aligned}$$

Итак, из выражений для $(1 - \cos \phi)$ и $|BH|^2$ получаем

$$|BC|^2 = 2(2l^2 + 2h^2) \left(\frac{2l^2}{h^2 + l^2} \right) = 8l^2,$$

откуда следует, что $|BC| = 2\sqrt{2}l$ — постоянная величина. Но это значит, что движение точки H по прямой линии можно осуществить с помощью механизма.

Рассмотрим более подробно этот механизм Дарбу. Он состоит из пяти стержней KB , BC , CM , MH и KH с длинами отрезков $|KB| = |CM| = 2l$, $|BC| = 2\sqrt{2}l$, $|KH| = |MH| = \sqrt{2}l$; стержни KB и CM вращаются вокруг своих центров — точек A и D (рис. 3, а). Механизм преобразует вращательное движение KB или CM в (строго) прямолинейное движение точки H . Также у механизма есть конфигурации, в которых он становится треугольником или квадратом (рис. 2, а-с).

Изучим динамику прямолинейного движения механизма Дарбу. Введем систему координат в плоскости механизма: началом отсчета O выберем середину отрезка

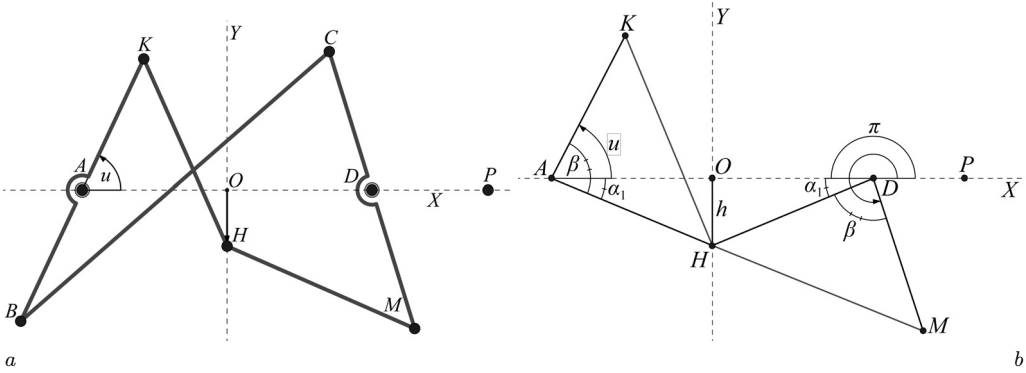


Рис. 3. Углы поворота стержней.

AD , ось Ox направим вдоль прямой AD , а ось Oy ортогонально ей. Выберем обобщенной координатой вещественное число h , равное ординате точки H . Величина h может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Расстояние $|OH| = |h|$, и $|AH| = |DH| = \sqrt{l^2 + h^2}$.

Рассмотрим теперь углы, которые составляют отрезки AK и DM с осью Ox (рис. 3, б). Для удобства обозначений введем дополнительно точку $P = (2l, 0)$. Также введем вспомогательные углы:

$$\alpha_1(h) = \arctan\left(\frac{|h|}{l}\right); \quad \beta(h) = \arccos\left(\frac{h^2}{2l\sqrt{l^2 + h^2}}\right).$$

Заметим, что $\alpha_1(h) \geq 0$, $\beta(h) \geq 0$. Угол $\alpha_1(h)$ равен (по абсолютной величине) углам $ОАН$ и $ОДН$, угол $\beta(h)$ равен (по абсолютной величине) углам $НАК$ и $НДМ$. Найдем выражение для углов поворота $\angle OAK$ и $\angle PDM$ отдельно при $h \leq 0$ и при $h \geq 0$ (рис. 3, б). При $h \leq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \angle OAK &= \angle НАК - \angle ОАН = \beta(h) - \alpha_1(h), \\ \angle PDM &= \angle PDO + \angle ОДН + \angle НДМ = \pi + \alpha_1(h) + \beta(h). \end{aligned}$$

При $h \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \angle OAK &= \angle НАК + \angle ОАН = \beta(h) + \alpha_1(h), \\ \angle PDM &= \angle PDO - \angle ОДН + \angle НДМ = \pi - \alpha_1(h) + \beta(h). \end{aligned}$$

При этом предполагается, что углы *не ориентированы*, мы знаем только их модуль. Найдем значение $\angle OAH$ из прямоугольного треугольника $ОАН$, когда $h \leq 0$:

$$-\angle OAH = -\arctan\left(\frac{|h|}{l}\right) = -\arctan\left(-\frac{h}{l}\right) = \arctan\left(\frac{h}{l}\right).$$

Когда $h \geq 0$, то

$$+\angle OAH = +\arctan\left(\frac{|h|}{l}\right) = +\arctan\left(\frac{h}{l}\right).$$

Поэтому, если ввести угол α , который получится из α_1 , если убрать модуль у h :

$$\alpha(h) = \arctan\left(\frac{h}{l}\right) = \text{sign}(h) \alpha_1(h),$$

то получим следующие формулы углов:

$$\angle OAK = \alpha(h) + \beta(h), \quad \angle PDM = \pi - \alpha(h) + \beta(h), \quad (1)$$

которые уже верны и при $h \geq 0$, и при $h \leq 0$. Заметим, что введенный угол α может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в отличие от угла β , который всегда неотрицателен. Основная функция α в том, что он дает гладкую параметризацию при прохождении $h = 0$.

Изучим гладкость углов α и β как функций от h . Значение $|h|$ максимально, если стержни AK и KH , а также DM и HM вытягиваются в треугольник AHM , $|AH| = |DH| = l + \sqrt{2}l$ (рис. 2). Соответственно, из прямоугольного треугольника AHO наибольшее значение $|OH|$ есть $l\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 1} \approx 2.197l$. Значит, для любого значения h выполнено условие $|\alpha(h)| < \pi/2$. Следовательно, функция $\alpha(h)$ является гладкой функцией аргумента h . Угол β как функция от h имеет особенности: β' при $h = h_{max}$ или $h = h_{min}$ бесконечна.

Координаты точек K и M в системе координат xOy можно найти как векторные суммы $\vec{OA} + \vec{AK}$ и $\vec{OD} + \vec{DM}$. Координаты точек B и C можно найти как векторные суммы $\vec{OA} - \vec{AK}$ и $\vec{OD} - \vec{DM}$ (рис. 3, а). Векторы \vec{AK} и \vec{DM} задаются найденными углами $\angle OAK$ и $\angle PDM$ по выражениям (1). В итоге получаем следующие формулы для вычисления координат вершин, если задано значение h :

$$\begin{aligned} x_H &= 0; \quad y_H = h; \\ x_K &= -l + l \cos(\alpha(h) + \beta(h)); \quad y_K = l \sin(\alpha(h) + \beta(h)); \\ x_M &= l + l \cos(\pi - \alpha(h) + \beta(h)); \quad y_M = l \sin(\pi - \alpha(h) + \beta(h)); \\ x_B &= -l - l \cos(\alpha(h) + \beta(h)); \quad y_B = -l \sin(\alpha(h) + \beta(h)); \\ x_C &= l - l \cos(\pi - \alpha(h) + \beta(h)); \quad y_C = -l \sin(\pi - \alpha(h) + \beta(h)). \end{aligned} \quad (2)$$

Сумма квадратов скоростей точек K , B , C и M может быть записана в более простом виде в силу симметрий в формулах координат (2) из-за сокращения перекрестных слагаемых с $\alpha'(h)\beta'(h)$:

$$\begin{aligned} v_K^2 + v_M^2 &= 2l^2((\alpha'(h))^2 + (\beta'(h))^2)(\dot{h})^2; \\ v_B^2 + v_C^2 &= 2l^2((\alpha'(h))^2 + (\beta'(h))^2)(\dot{h})^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим динамическую модель механизма, в которой в вершинах K , B , C , M и H находятся точечные массы, а стержни будем считать невесомыми и нерастяжимыми. Пусть $m_K = m_M$, $m_B = m_C$. Кинетическую энергию T системы запишем в виде

$$T = \frac{m_H \dot{h}^2}{2} + (m_K + m_B)(l^2((\alpha')^2 + (\beta')^2)(\dot{h})^2) = a(h)\dot{h}^2. \quad (4)$$

Уравнение Лагранжа второго рода, записанное в терминах переменной h при обобщенной силе Q_h , имеет вид

$$2a(h)\ddot{h} + a'(h)\dot{h}^2 = Q_h. \quad (5)$$

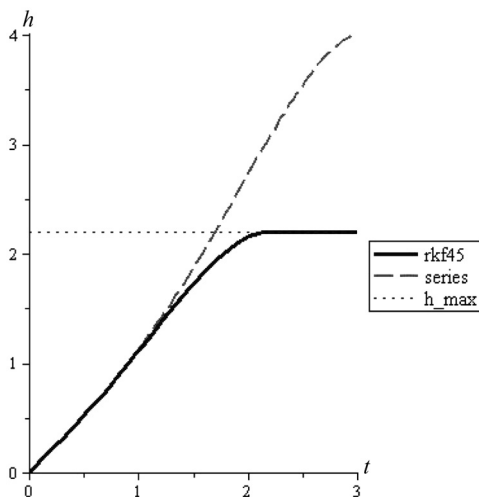


Рис. 4. Численное решение.

По углу $u = \text{OAK}$ также можно просто найти высоту h . Пусть угол поворота стержня KB от оси Ox равен u . Тогда найдем ординату h точки H как решение уравнения $(-l + l \cos u)^2 + (l \sin u - h)^2 = 2l^2$:

$$h_{1,2} = l \sin u \pm l \sqrt{\sin^2 u + 2 \cos u}.$$

3. Реакции стержней при прямолинейном движении. При $h = 0$ вершины механизма K, B, C, M образуют квадрат, а стержни BC и объединение MH и KH — две его диагонали (рис. 2, *c*). При $u \in (-\arccos(1 - \sqrt{2}), \arccos(1 - \sqrt{2}))$ угол u однозначно задает положение ведущего звена $KBCM$. Одному и тому же углу поворота стержня KB соответствуют два возможных положения точки H , симметричные относительно прямой KM . В одном случае вершина H движется по прямой L , а в другом — по кривой γ (рис. 5).

Рассмотрим движение механизма при $Q_h \equiv 0$. Это условие выполняется, если, например, к точке H приложена сила F , ортогональная прямой L (возможным перемещениям). В системе координат xOy сила $F = (F_x, 0)$.

Функция $a(h)$ гладкая и четная (по свойствам углов α и β), поэтому $a'(0) = 0$. При $Q_h(0) = 0$ для любого значения скорости точки $\mathbf{v}_H|_{h=0}$ будет выполняться $\mathbf{w}_H|_{h=0} = 0$, согласно (5). Тогда сумма сил реакций, действующих на точку H , когда $h = 0$, должна быть нулевой. Далее рассмотрим движение точки H при $h \approx 0$.

Для упрощения расчетов предполагаем, что массы, расположенные в вершинах, одинаковы и равны m . В случае различных масс нужно вначале ввести изображающую точку по Герцу. В терминах этой точки уравнения движения примут форму второго закона Ньютона для точки с массой, равной сумме масс точек, расположенных в вершинах [5].

Численное решение уравнения (5) с начальными данными $h(0) = 0, \dot{h}(0) = 1$ при $Q_h \equiv 0, l = 1$ м, $m = 1$ кг приведено на рис. 4. Заметим, что решение методом Рунге—Кутты (rkf45) и методом поиска отрезка ряда Тейлора до пятого порядка (series) в Maple хорошо совпадают при $t < 1$.

Поскольку движение механизма Дарбу вплоть до особой точки является глад-

ким (уравнение (5) — с гладкими коэффициентами, параметризация (2) — гладкая), то ускорения точек тоже меняются гладко. На каждую из точек K, B, C, D и H действуют две силы реакции со стороны стержней. Сумма этих сил меняется гладко, но при этом каждое слагаемое может меняться не гладко, например, уходить в бесконечность.

Если доказана непрерывность одного множителя Лагранжа Λ_i для некоторого i , то остальные $\Lambda_j, i \neq j$, тоже непрерывны. Действительно, поскольку решение (5) — это гладкая функция $h(t)$, а координаты вершин механизма Дарбу гладко зависят от параметра h , то и суммарные силы, приложенные к каждой вершине также являются гладкими функциями. Например, на вершину H действуют реакции \mathbf{R}_{KH} и \mathbf{R}_{MH} . Тогда из $\mathbf{w}_H = \mathbf{R}_{KH} + \mathbf{R}_{MH}$ при гладких \mathbf{w}_H и \mathbf{R}_{KH} следует гладкость и второй реакции, \mathbf{R}_{MH} . Из гладкости \mathbf{R}_{MH} следует гладкость и соответствующего множителя Лагранжа (если градиент соответствующей связи отличен от нуля).

Приведем здесь удобную запись для нахождения множителей Лагранжа как численно, так и аналитически [6]. Для этого рассмотрим свободную систему с координатами $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Пусть на систему наложены идеальные голономные связи: $f_i(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0, i = 1, \dots, k$. Продифференцируем их дважды по времени:

$$\sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial r_j \partial r_l} \dot{r}_j \dot{r}_l + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \ddot{r}_j = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Чтобы упростить запись, введем матрицы f_i'' с компонентами $(f_i'')_{j,l} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial r_j \partial r_l}$. Записывая вектор $\left(\frac{\partial f_i}{\partial r_1}, \frac{\partial f_i}{\partial r_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial r_n} \right)$ как градиент ∇f_i , последнее выражение сможем записать в более компактном виде:

$$\dot{\mathbf{r}}^T (f_i'') \dot{\mathbf{r}} + \nabla f_i^T \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Уравнение Ньютона для идеальных связей при заданном векторе внешних сил $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ и равных массах материальных точек m имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^k \Lambda_i \nabla f_i.$$

Получаем систему, содержащую неопределенные множители $\Lambda_i, i = 1, \dots, k$,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^k \Lambda_i \nabla f_i; \quad (6)$$

$$m\dot{\mathbf{r}}^T (f_i'') \dot{\mathbf{r}} + \nabla f_i^T (m\ddot{\mathbf{r}}) = 0. \quad (7)$$

Подставив выражения для ускорений из (6) в (7), получаем

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1^T \nabla f_1 & \dots & \nabla f_1^T \nabla f_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla f_k^T \nabla f_1 & \dots & \nabla f_k^T \nabla f_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}^T (f_1'') \dot{\mathbf{r}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{r}}^T (f_k'') \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \mathbf{F} \\ \vdots \\ \nabla f_k^T \mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

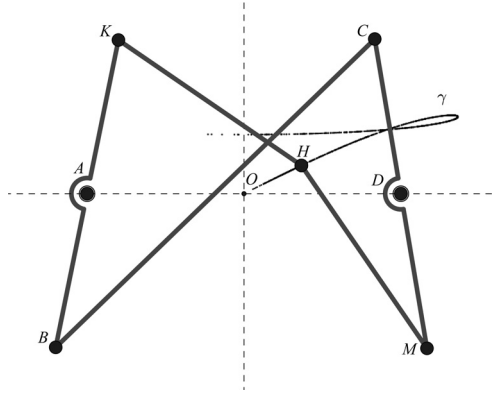


Рис. 5. Дополнительное возможное движение точки H по кривой γ .

Матрицу, состоящую из скалярных произведений градиентов, обозначим $G: (G)_{i,j} = \nabla f_i^T \nabla f_j$. Если найдены выражения для реакций Λ , то их можно подставить в уравнение (6) и получить ОДУ второго порядка, для которого можно решить задачу Коши. При связях, заданных уравнениями степени не выше 2, (f_i'') — это постоянные матрицы, которые можно вычислить перед численным моделированием.

Геометрические связи, наложенные на механизм Дарбу, записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x_K, y_K, x_B, y_B, x_C, y_C, x_M, y_M, x_H, y_H); \\ \mathbf{F} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, F_x, 0); \\ f_1 &= (x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2 - 4l^2 = 0; \quad f_2 = (x_K + x_B + l)/2 = 0; \\ f_3 &= (y_K + y_B)/2 = 0; \quad f_4 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 - 8l^2 = 0; \\ f_5 &= (x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2 - 4l^2 = 0; \quad f_6 = (x_C + x_M - l)/2 = 0; \\ f_7 &= (y_C + y_M)/2 = 0; \quad f_8 = (x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2 - 2l^2 = 0; \\ f_9 &= (x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2 - 2l^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В уравнениях (9) условия на полусумму координат говорят, что стержни KB и CM вращаются вокруг *неподвижных* точек A и D . Уравнения независимы в окрестности $h \approx 0$ ($u \approx \pi/2$), и становятся зависимыми в особой точке, когда $h = 0$. В ней у механизма появляется дополнительная возможность движения другого типа, при котором точка H уже будет двигаться не по прямой L , а по кривой γ (рис. 5).

Решив задачу Коши для уравнения (5) при $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = \dot{h}_0$, можно напрямую вычислить силы реакции, подставив их в выражения (8) при $h \neq 0$, когда матрица G обратима. Тем не менее, численная подстановка затруднительна и требует большого времени вычисления, дает значительные ошибки. Чтобы решить систему (8) точнее, разложим координатные функции $x_K(h), y_K(h), \dots, y_H(h)$ до второго слагаемого в ряд Тейлора, а само решение $h(t)$ до третьего слагаемого. Это делается для того, чтобы разложить левую и правую части в выражении (8), в которое входят также и скорости \dot{h} .

Искать множители Λ_i , $i = 1, \dots, 9$, будем по правилу Крамера из системы (8), которая предварительно разложена в ряд при $t \approx 0$. Например, будем искать выра-

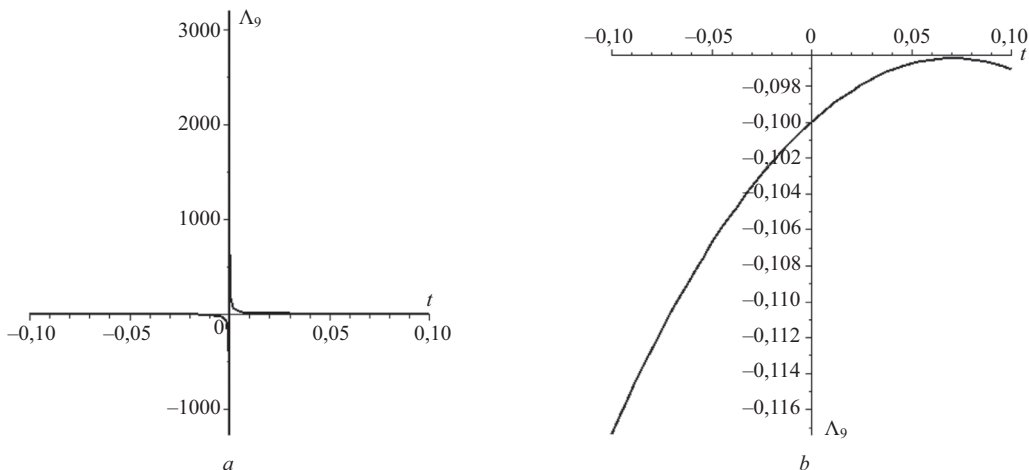


Рис. 6. Зависимость реакции Λ_9 от приложенной силы F : $a - F_x = 1$; $b - F_x = 0$.

жение для Λ_9 в виде

$$\Lambda_9 = \frac{\det(G_{R,9})(t)}{\det(G)(t)} = \frac{b_1 + b_2t + b_3t^2 + \dots}{a_1 + a_2t + a_3t^2 + \dots},$$

где $G_{R,9}$ обозначает матрицу, полученную из матрицы G , в которой 9-й столбец заменен на вектор R из правой части (8). Реализовать эти уже чисто алгебраические вычисления определителей удобно в пакете Maple, который позволяет работать с символьными вычислениями. Заметим, что сила \mathbf{F} не влияет на уравнение движения (1), но влияет на формирование множителей Лагранжа в уравнении (8).

Полученные результаты существенно различаются для случая $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{F} \neq 0$. В первом случае, при движении по инерции Λ_9 имеет конечный предел при $h \rightarrow 0$. При действии силы уже не будет ограниченности реакций:

$$\begin{aligned} h(t) &= t + (2/15)t^3 + o(t^3); \\ F_x = 0 : a(t) &= 0 + 0t + 327680t^2 + o(t^2); \\ b(t) &= 0 + 0t - 32768t^2 + o(t^2) : b(t)/a(t) \rightarrow -1/10; \\ F_x = 1 : a(t) &= 0 + 0t + 327680t^2 + o(t^2); \\ b(t) &= 0 + 40960t + o(t) : b(t)/a(t) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Графики при $|t| < 1/10$ показаны на рис. 6. При построении графиков использовались разложения по Тейлору координатных функций $x_K(h), y_K(h), \dots, y_H(h)$, которые численно очень близки к значениям функций при $|t| < 1/10$.

Полученные результаты можно интерпретировать, например, так. Сила \mathbf{F} не совершает работу, не влияет на уравнение динамики (5) до особой точки, но приводит к неограниченности реакций при $h(t) \rightarrow 0$. Если бы не было геометрической особенности (точки ветвления), то сила \mathbf{F} не оказывала бы такой эффект, реакции были бы ограничены.

Также изучим систему (8) в «квадратном» положении механизма.

4. Обратная задача динамики в точке ветвления. Пусть матрица G имеет неполный ранг (это следствие линейной зависимости градиентов). Тогда у нее нену-

левое ядро: есть вектор \mathbf{a} такой, что $G\mathbf{a} = 0$. Транспонируем последнее равенство, тогда и $\mathbf{a}^T G^T = \mathbf{a}^T G = 0$, поскольку $G^T = G$. Так как у матрицы G неполный ранг, то есть условие на строки: их сумма с некоторыми ненулевыми коэффициентами равна 0. Условие $\mathbf{a}^T G = 0$ говорит, что искомые коэффициенты — это координаты вектора \mathbf{a} .

Тогда, если вектор \mathbf{R} лежит в образе матрицы G , то компоненты R также должны удовлетворять условию $a_1 R_1 + \dots + a_9 R_9 = 0$ по теореме Кронекера–Капелли, иначе ранг (строковый) расширенной системы $(G|\mathbf{R})$ был бы больше, чем 8. Если это условие выполняется, то ранг $(G|\mathbf{R})$ не больше, чем 8, а он и так не меньше 8, т. е. равен 8.

Теперь рассмотрим вектор $\mathbf{u} = a_1 \nabla f_1 + \dots + a_9 \nabla f_9$. Докажем, что он нулевой. Для этого рассмотрим следующую матрицу (зададим произвольный вектор $\mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_9)$):

$$0 = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \nabla f_1 & \dots & \nabla f_1^T \nabla f_9 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla f_9^T \nabla f_1 & \dots & \nabla f_9^T \nabla f_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \nabla f_1 & \dots & b_9 \nabla f_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \nabla f_1 \\ \vdots \\ a_9 \nabla f_9 \end{pmatrix}.$$

А это значит, что вектор $\mathbf{u} = a_1 \nabla f_1 + \dots + a_9 \nabla f_9$ нулевой. Действительно, положим $a_1 = b_1, \dots, a_9 = b_9$, тогда из последнего выражения $|\mathbf{u}|^2 = 0$, поэтому и $\mathbf{u} = 0$.

Теперь рассмотрим, лежат ли векторы

$$R_1 = \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \mathbf{F} \\ \vdots \\ \nabla f_n^T \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}^T (f_1'') \dot{\mathbf{r}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{r}}^T (f_n'') \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix}$$

в образе матрицы G . Для этого достаточно проверить условия на коэффициенты: скалярное произведение векторов и вектора \mathbf{a} должно быть равно нулю.

Проверим первый вектор:

$$\sum_{i=1}^9 a_i (\nabla f_i^T \mathbf{F}) = \sum_{i=1}^9 (a_i \nabla f_i^T \mathbf{F}) = \left(\sum_{i=1}^9 a_i \nabla f_i \right)^T \mathbf{F} = \mathbf{u} \mathbf{F} = 0.$$

Проверим второй вектор: из уравнения связей получаем $\dot{\mathbf{r}}^T (f_i'') \dot{\mathbf{r}} + \nabla f_i^T \ddot{\mathbf{r}} = 0$, и тогда

$$0 = \sum_{i=1}^9 a_i \dot{\mathbf{r}}^T (f_i'') \dot{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^9 a_i \nabla f_i^T \ddot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^9 a_i \dot{\mathbf{r}}^T (f_i'') \dot{\mathbf{r}} + \left(\sum_{i=1}^9 a_i \nabla f_i \right)^T \ddot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^9 a_i \dot{\mathbf{r}}^T (f_i'') \dot{\mathbf{r}}.$$

Итак, каждый из векторов в правой части в системе, определяющей Λ , лежит в образе матрицы. Тогда множители Лагранжа можно найти, но неоднозначно. Тем не менее, два разных набора множителей отличаются на вектор $k\mathbf{a}$, $k \in \mathbb{R}$. Но вектору \mathbf{a} соответствует вектор сил реакций $a_1 \nabla f_1 + \dots + a_n \nabla f_n = 0$, как было показано ранее. Неоднозначность в выборе множителей Лагранжа не влияет на сумму сил реакций, приложенных к каждой точке. Поэтому можно априори считать $k = 0$.

Суммарно: если ранг связей падает на 1, то, тем не менее, обратная задача динамики в особой точке разрешима, и суммы сил реакций, приложенных к каждой точке, определены однозначно. Вне особой точки система $G\Lambda = R_1 + R_2$ однозначно разрешима, поскольку там матрица G не вырождена.

Но тогда при $F_x = 1$ силы реакции стержней, следуя решению задачи (8), ведут себя так: при $t \rightarrow 0+$ множитель Λ_9 неограниченно убывает; при $t = 0$ все множители Лагранжа определены, но неоднозначно; при $t \rightarrow 0-$ множитель Λ_9 неограниченно возрастает (рис. 6, а).

5. Заключение. На примере механизма Дарбу при прямолинейном движении точки H можно наблюдать следующую проблему. Внешняя сила F , приложенная к точке H (\mathbf{F} не совершает работу), не учитывается в уравнениях Лагранжа второго рода. Но эта сила оказывает существенное влияние на величину реакций Λ , возникающих в стержнях. Если \mathbf{F} отлична от нуля, то реакции становятся неограниченными, когда точка H движется к началу координат — точке возможного ветвления. Также кажется наглядным, что при достаточно большой силе \mathbf{F} точка H должна сменить тип движения, перейти на криволинейное движение. Уравнения Лагранжа второго рода не отображают этой возможности.

Литература

1. Zlatanov D., Bonev I. A., Gosselin C. M. Constraint Singularities of Parallel Mechanisms // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002). Washington, D. C., USA, May 11–15, 2002.
2. Bandyopadhyay S., Ghosal A. Analysis of configuration space singularities of closed-loop mechanisms and parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. 2004. Vol. 39. P. 519–544.
3. Shvalb N., Shoham M., Bamberg H., Blanc D. Topological and Kinematic Singularities for a Class of Parallel Mechanisms // Mathematical Problems in Engineering. 2009. Vol. 2009. P. 1–12.
4. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва // Собр. соч.: в 4 т. Т. IV: Теория механизмов. М.; Л.: Издательство Академии наук СССР, 1948. 255 с.
5. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 536 с.; М.: Изд-во «Высшая школа», 2000. 592 с.; М.: Изд-во «Юрайт», 2015. 592 с.
6. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.
7. Бурьян С. Н. Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 541–551.
8. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Art. no. 030004.

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Бурьян Сергей Николаевич — аспирант; burianserg@yandex.ru

Specificity of the Darboux mechanism rectilinear motion

S. N. Burian

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Burian S. N. Specificity of the Darboux mechanism rectilinear motion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 658–669. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412> (In Russian).

Mechanisms of a parallel structure may have singularities in configuration space in which system controllability may be lost or additional instantaneous degrees of freedom may appear. These features have kinematic base. But interest is also represented by geometric singularities, when the mechanism in some configuration could change the type of motion. The example of a mechanism with branch points, the Darboux mechanism, is considered. It is proved that this hinged mechanism can transform the rotational motion of one rod into a (strictly) rectilinear motion of its vertex H . The rods of Darboux's mechanism can form geometric figures, such as triangles and a square (with diagonals drawn). In the "square" configuration of the mechanism the branch point arises: the vertex H can move both along the straight line L and along the curve γ . The rank of the holonomic constraints of the system in singular point falls by one. For a rectilinear motion of the vertex H , the Lagrange equation of the second kind is written in terms of the coordinate of H . The coefficients of this equation smoothly extend through the branch point. The "limiting" behavior of reaction forces in rods is analyzed when the mechanism moves to the branch point. An external force that does not work on the point H leads to unlimited reactions in the rods. Kinematics at the branch point are studied. The inverse problem of dynamics at a point where the rank of holonomic constraints is not maximal is solvable. The Lagrange multipliers of Λ_i at the branch point are not uniquely determined, but the forces corresponding to them acting on the vertices of the mechanism are uniquely determined.

Keywords: Darboux mechanism, singular point, inverse problem of dynamics.

References

1. Zlatanov D., Bonev I. A., Gosselin C. M., "Constraint Singularities of Parallel Mechanisms", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002, Washington, D. C., USA, May 11–15, 2002)*.
2. Bandyopadhyay S., Ghosal A., "Analysis of configuration space singularities of closed-loop mechanisms and parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory* **39**, 519–544 (2004).
3. Shvalb N., Shoham M., Bamberger H., Blanc D., "Topological and Kinematic Singularities for a Class of Parallel Mechanisms", *Mathematical Problems in Engineering* **2009**, 1–12 (2009).
4. *The collection of P. L. Chebyshev works in 4 v. Vol. IV: Theory of mechanisms* (Publisher of Academy of Sciences of USSR, Moscow, Leningrad, 1948) [in Russian].
5. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., *Theoretical mechanics* (Leningr. Univ. Press, Leningrad, 1985; Vysshaya Shkola Publ., 2000) [in Russian].
6. Zergda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. A new class of control problems* (FIZMATLIT Publ., Moscow, 2005) [in Russian].
7. Burian S. N., "Behaviour of the pendulum with a singular configuration space", *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 4, 541–551 (2017).
8. Burian S. N., Kalnitsky V. S., "On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum", *AIP Conference Proceedings* **1959**, 030004 (2018).

Received: April 26, 2018

Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Sergei N. Burian — burianserg@yandex.ru