УДК 531.36+517.926.4 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 70E18, 70E40, 70E50, 70F25

О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении динамически симметричного шара по сфере*

А. С. Кулешов, В. А. Катасонова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: *Кулешов А. С., Катасонова В. А.* О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении динамически симметричного шара по сфере // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 670–677. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.413

Рассматривается задача о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной сфере. Предполагается, что силы, приложенные к твердому телу, имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O. В этом случае решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. С помощью алгоритма Ковачича доказано существование лиувиллевых решений в задаче о качении по сфере неоднородного динамически симметричного шара.

Ключевые слова: динамически симметричный шар, качение по сфере, алгоритм Ковачича, лиувиллевы решения.

1. Введение. Общая постановка задачи о качении тела вращения по сфере. Задача о качении без скольжения динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной поверхности является одной из классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С. А. Чаплыгин в работе [1] установил, что в случае качения тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости решение соответствующей задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. В 1910 году П. В. Воронец в работе [2] показал, что рассуждения С. А. Чаплыгина без изменений переносятся на случай качения тела вращения по поверхности сферы, если приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O. В этом случае задача также сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Следуя работе П. В. Воронца [2], докажем этот факт. Введем четыре системы координат (в скобках указаны единичные векторы осей):

$Ox_1y_1z_1$ $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ — неподвижная система координат с началом в центре опорной сферы;

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00338 и № 17-01-00123).

$Gxyz\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — система координат, жестко связанная с движущимся твердым телом; ее начало выбрано в центре масс G движущегося тела, а оси направлены по главным осям инерции;

$Puvn\ (\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_n)$ — подвижная система координат с началом в точке контакта P тела с опорной сферой и осями, направленными по касательным к координатным линиям и по нормали к поверхности тела;

$Pu_1v_1n_1\ (\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{v_1}, \mathbf{e}_{n_1})$ — подвижная система координат, оси которой направлены по касательным к координатным линиям и по нормали к опорной сфере.

Положение точки контакта P на поверхности S тела определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{GP} = x\,(u,v)\,\mathbf{e}_1 + y\,(u,v)\,\mathbf{e}_2 + z\,(u,v)\,\mathbf{e}_3,$$

где u и v — гауссовы криволинейные координаты точки P на поверхности S. Коэффициенты первых двух квадратичных форм поверхности S катящегося тела обозначим E, F, G и L, M, N соответственно. Будем считать, что координатные линии на поверхности совпадают с ее линиями кривизны, поэтому $F = 0$, $M = 0$.

Сферическая поверхность S_1 радиуса R_1, по которой движется твердое тело, задается уравнениями

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z = R_1 \sin u_1 \cos v_1 \mathbf{e}_x + R_1 \sin u_1 \sin v_1 \mathbf{e}_y + R_1 \cos u_1 \mathbf{e}_z,$$

где u_1 и v_1 — гауссовы криволинейные координаты точки P на сфере S_1. Для единичных базисных векторов $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{u_1}$, $\mathbf{e}_{v_1}$, $\mathbf{e}_{n_1}$ имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v;\\
&\mathbf{e}_{u_1} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial u_1}, \quad \mathbf{e}_{v_1} = \frac{1}{R_1 \sin u_1}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial v_1}, \quad \mathbf{e}_{n_1} = \mathbf{e}_{u_1} \times \mathbf{e}_{v_1}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Взаимная ориентация систем координат $Gxyz$ и $Puvn$ определяется при помощи матрицы направляющих косинусов, задаваемых таблицей

	x	y	z
u	c_{11}	c_{12}	c_{13}
v	c_{21}	c_{22}	c_{23}
n	c_{31}	c_{32}	c_{33}

причем коэффициенты c_{ij} являются функциями только переменных u и v и в явном виде записываются следующим образом:

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad c_{12} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad c_{13} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}; \quad c_{31} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$c_{21} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad c_{22} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad c_{23} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}; \quad c_{32} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$c_{33} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Следуя Воронцу [2], будем определять положение тела гауссовыми координатами u, v, u_1, v_1 и углом θ между осями Pu и Pv_1. Предположим, что тело катится по опорной сфере без проскальзывания. Это условие приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи, имеющие вид

$$R_1\dot{u}_1 = -\sqrt{E}\dot{u}\sin\theta + \sqrt{G}\dot{v}\cos\theta, \qquad R_1\dot{v}_1\sin u_1 = \sqrt{E}\dot{u}\cos\theta + \sqrt{G}\dot{v}\sin\theta. \quad (2)$$

Пусть векторы скорости $\boldsymbol{w}$ центра масс G и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела задаются в системе координат $Gxyz$ компонентами w_1, w_2, w_3 и ω_1, ω_2, ω_3 соответственно. Из условия того, что точка касания P тела находится в мгновенном покое, получим формулы, связывающие компоненты векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{\omega}$:

$$w_1 + \omega_2 z - \omega_3 y = 0, \quad w_2 + \omega_3 x - \omega_1 z = 0, \quad w_3 + \omega_1 y - \omega_2 x = 0, \quad (3)$$

а для компонент ω_1, ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ справедливы следующие формулы:

$$\omega_1 = c_{11}\tau\dot{v} + c_{21}\sigma\dot{u} + c_{31}n, \quad \omega_2 = c_{12}\tau\dot{v} + c_{22}\sigma\dot{u} + c_{32}n, \quad \omega_3 = c_{13}\tau\dot{v} + c_{23}\sigma\dot{u} + c_{33}n, \quad (4)$$

$$\begin{gathered} \tau = -\left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{G}, \quad \sigma = \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{E}, \\ n = -\dot{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right) - \dot{v}_1\cos u_1. \end{gathered} \quad (5)$$

Формулы (4)–(5) могут быть получены, если представить вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела как сумму трех векторов угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 + \boldsymbol{\Omega}_3,$$

где $\boldsymbol{\Omega}_1$ — угловая скорость тела относительно системы координат $Puvn$; $\boldsymbol{\Omega}_2$ — угловая скорость системы координат $Puvn$ относительно системы $Pu_1v_1n_1$; $\boldsymbol{\Omega}_3$ — угловая скорость системы координат $Pu_1v_1n_1$ относительно неподвижной системы $Ox_1y_1z_1$. Более подробно об этом можно прочитать в [3, стр. 125–126]. Заметим, что выражения τ и σ в формулах (5) будут функциями только переменных u и v.

Будем предполагать, что силы, действующие на твердое тело, имеют потенциал и потенциальная энергия V зависит лишь от координат u и v точки касания P. Такой случай будет иметь место, например, когда приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O сферы и зависящую только от расстояния точек G и O друг от друга. Итак, пусть $V = V(u, v)$.

Пусть $\Theta = \Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n)$ — кинетическая энергия системы, вычисленная с учетом неголономных связей (2) и соотношений (3), (4). Она вычисляется по стандартной формуле

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = m\left(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\right) + A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2,$$

где m — масса движущегося тела, а A_1, A_2 и A_3 — его главные центральные моменты инерции. Данное выражение можно переписать следующим образом:

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = K_{33}n^2 + 2(K_{13}\dot{u} + K_{23}\dot{v})n + K_{11}\dot{u}^2 + 2K_{12}\dot{u}\dot{v} + K_{22}\dot{v}^2, \quad (6)$$

причем на основании формул (3)–(5) можно сделать вывод, что коэффициенты K_{ij} являются функциями переменных u и v. Если мы обозначим через ρ и ε расстояния от центра масс G тела до точки касания P и до касательной плоскости к поверхности S в точке P,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = xc_{31} + yc_{32} + zc_{33},$$

то мы можем записать уравнения движения тела в таком виде (см. [2]):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial u} = \sqrt{EG}\left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot v + \frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v}n - m\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}n^2 -$$

$$-m\varepsilon\sqrt{EG}\left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1}\right)n\dot v - \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial v} = -\sqrt{EG}\left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot u + \frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u}n - m\rho\frac{\partial\rho}{\partial v}n^2 +$$

$$+m\varepsilon\sqrt{EG}\left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1}\right)n\dot u - \frac{\partial V}{\partial v},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right) = -\frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u}\dot v - \frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v}\dot u + m\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\dot u + \frac{\partial\rho}{\partial v}\dot v\right)n - m\varepsilon\frac{LG - NE}{\sqrt{EG}}\dot u\dot v. \tag{7}$$

Присоединяя к этим уравнениям последнее из уравнений (5), а также уравнения связей (2), получим систему шести уравнений, из которой определяются все неизвестные u, v, n, θ, u_1, v_1 как функции времени.

Предположим теперь, что твердое тело, катящееся по сфере, является телом вращения, то есть его моменты инерции A_1 и A_2 относительно осей Gx и Gy равны между собой ($A_1 = A_2$), а поверхность S, ограничивающая твердое тело, является поверхностью вращения вокруг оси Gz:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u). \tag{8}$$

В этом случае кинетическая энергия тела, вычисляемая по формуле (6), в явном виде запишется следующим образом:

$$2\Theta(\dot u, \dot v, u, v, n) = K_{11}\dot u^2 + K_{22}\dot v^2 + K_{33}n^2 + 2K_{23}\dot v n,$$

$$K_{11} = \left(A_1 + Mf^2 + mg^2\right)\left(f'^2 + g'^2\right)\left(\frac{g''f' - f''g'}{(f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R_1}\right)^2,$$

$$K_{22} = \frac{A_1 f'^2 + A_3 g'^2 + m(gf' - fg')^2}{f'^2 + g'^2}\left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - \frac{f}{R_1}\right)^2,$$

$$K_{33} = \frac{A_1 g'^2 + A_3 f'^2 + m(ff' + gg')^2}{f'^2 + g'^2},$$

$$K_{23} = \frac{m(gf' - fg')(ff' + gg') - (A_3 - A_1)f'g'}{f'^2 + g'^2}\left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - \frac{f}{R_1}\right).$$

Здесь штрихом обозначена производная по u. Очевидно, что все коэффициенты $K_{i\,j}$ будут функциями только переменной u. Справедливы также следующие соотношения:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

В этом случае два последних уравнения системы (7) дают

$$\frac{d}{dt}\left(K_{23} n + K_{22} \dot{v}\right) = \left(c_1 n + k_1 \dot{v}\right) \dot{u}, \quad \frac{d}{dt}\left(K_{33} n + K_{23} \dot{v}\right) = \left(c_2 n + k_2 \dot{v}\right) \dot{u}, \tag{9}$$

где коэффициенты K_{22}, K_{23}, K_{33}, c_1, c_2, k_1, k_2 являются функциями только переменной u. Кроме того, в выражениях (4) для компонент угловой скорости ω_1, ω_2 и ω_3 будем иметь $c_{23} = 0$, откуда следует, что

$$\dot{v} = \frac{1}{c_{13}\tau}\omega_3 - \frac{c_{33}}{c_{13}\tau} n, \tag{10}$$

причем коэффициенты при переменных ω_3 и n также будут функциями только переменной u. Переходя в уравнениях (9) к новой независимой переменной u, приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} &\frac{K_{22}}{c_{13}\tau}\frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{23} - \frac{K_{22}c_{33}}{c_{13}\tau}\right)\frac{dn}{du} = d_1 n + s_1 \omega_3, \\ &\frac{K_{23}}{c_{13}\tau}\frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{33} - \frac{K_{23}c_{33}}{c_{13}\tau}\right)\frac{dn}{du} = d_2 n + s_2 \omega_3, \end{aligned} \tag{11}$$

где d_1, s_1, d_2, s_2 — функции, зависящие от u. Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений первого порядка (11) относительно компонент угловой скорости n и ω_3. Из этой системы может быть получено одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно проекции ω_3 угловой скорости тела на его ось симметрии. В дальнейшем можно поставить задачу отыскания лиувиллевых решений соответствующего дифференциального уравнения при помощи алгоритма Ковачича [4].

2. Движение динамически симметричного шара. Проиллюстрируем все сказанное выше на примере задачи о качении по сфере неоднородного динамически симметричного шара, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром. Пусть R — радиус шара, a — расстояние от центра масс шара до геометрического центра вдоль оси симметрии. Тогда формулы (8) принимают вид

$$x = R\sin u\cos v, \quad y = R\sin u\sin v, \quad z = R\cos u + a.$$

Система двух линейных уравнений относительно компонент угловой скорости n и ω_3 имеет вид

$$\frac{dn}{du} = a_1 n + a_2\omega_3, \quad \frac{d\omega_3}{du} = b_1 n + b_2\omega_3,$$

$$a_1 = -\frac{mR^2\left(\left(A_3 - A_1\right)R\cos u + A_3 a\right)\sin u}{\left(A_1A_3 + A_1 mR^2\sin^2 u + A_3 m\left(R\cos u + a\right)^2\right)R_1},$$

$$a_2 = \frac{\left(R_1 + R\right)\left(\left(A_3 + mR^2\right)\left(A_3 - A_1\right) - A_3 m a^2\right)\sin u}{\left(A_1A_3 + A_1 mR^2\sin^2 u + A_3 m\left(R\cos u + a\right)^2\right)R_1},$$

$$b_1 = \frac{mR^3 A_1 \sin u}{\left(A_1 A_3 + A_1 mR^2 \sin^2 u + A_3 m \left(R\cos u + a\right)^2\right) R_1},$$

$$b_2 = \frac{mR\left(R_1 + R\right)\left(\left(A_3 - A_1\right) R\cos u + A_3 a\right)\sin u}{\left(A_1 A_3 + A_1 mR^2 \sin^2 u + A_3 m \left(R\cos u + a\right)^2\right) R_1}.$$

Уравнение второго порядка относительно ω_3 имеет вид

$$\frac{d^2\omega_3}{du^2} + d_1 \frac{d\omega_3}{du} + d_2\omega_3 = 0, \tag{12}$$

$$d_1 = -\frac{2mR^2\left(A_3 - A_1\right)\sin^2 u\cos u + \left(3 - \cos^2 u\right) mRaA_3 + A_3\left(A_1 + mR^2 + ma^2\right)\cos u}{\left(A_1 A_3 + A_1 mR^2 \sin^2 u + A_3 m \left(R\cos u + a\right)^2\right)\sin u},$$

$$d_2 = \frac{mR^2\left(R_1^2 - R^2\right)\left(A_3 - A_1\right)\sin^2 u}{\left(A_1 A_3 + A_1 mR^2 \sin^2 u + A_3 m \left(R\cos u + a\right)^2\right) R_1^2}.$$

Заметим, что при выполнении условия $R_1 = R$ (то есть когда радиус шара равен радиусу опорной сферы) уравнение (12) допускает частное решение

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \mathrm{const}.$$

Сделаем в уравнении (12) замену независимой переменной по формуле $\cos u = x$. Тогда уравнение (12) перепишется в виде

$$\frac{d^2\omega_3}{dx^2} + d_1 \frac{d\omega_3}{dx} + d_2\omega_3 = 0, \tag{13}$$

$$d_1 = \frac{3\left(2x - x_1 - x_2\right)}{2\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)}, \qquad d_2 = \frac{\left(R_1^2 - R^2\right)}{\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) R_1^2}.$$

Здесь d_1, d_2 — рациональные функции переменной x, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$A_1 A_3 + A_1 mR^2\left(1 - x^2\right) + mA_3\left(Rx + a\right)^2 = 0.$$

При помощи замены переменных

$$y = \omega_3 \exp\left(\frac{1}{2}\int d_1\left(x\right) dx\right)$$

уравнение (13) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2}\frac{d\left(d_1\right)}{dx} + \frac{d_1^2}{4} - d_2\right) y = S\left(x\right) y, \tag{14}$$

$$S\left(x\right) = \frac{R_1^2 + 8R^2}{8R_1^2\left(x_1 - x_2\right)\left(x - x_1\right)} - \frac{3}{16\left(x - x_1\right)^2} - \frac{R_1^2 + 8R^2}{8R_1^2\left(x_1 - x_2\right)\left(x - x_2\right)} - \frac{3}{16\left(x - x_2\right)^2}.$$

Уравнение (14) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с рациональными коэффициентами. Воспользуемся алгоритмом Ковачича [4] для нахождения лиувиллевых решений этого уравнения. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (14) позволяет установить следующие результаты.

Теорема 1. *Уравнение* (14) *имеет лиувиллево решение вида*

$$y = \exp\left(\int \omega(x)\,dx\right),$$

где $\omega(x)$ *— рациональная функция, при выполнении условия* $R/R_1 = N/2$, *где* N *— натуральное число.*

Например, при $R/R_1 = 1/2$ общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\omega_3 = \frac{c_1}{\sqrt{x-x_1}} + \frac{c_2}{\sqrt{x-x_2}}.$$

При $R/R_1 = 3/2$ общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\omega_3 = \frac{c_1(4x - x_1 - 3x_2)}{\sqrt{x-x_2}} + \frac{c_2(4x - 3x_1 - x_2)}{\sqrt{x-x_1}}.$$

Теорема 2. *В общем случае дифференциальное уравнение* (14) *имеет лиувиллево решение вида*

$$y = \exp\left(\int \omega(x)\,dx\right),$$

где $\omega(x)$ *— алгебраическая функция степени* 2.

Общее решение уравнения (13) при произвольных значениях параметров имеет вид

$$\omega_3 = \frac{c_1\left(\sqrt{x-x_1} + \sqrt{x-x_2}\right)^{\frac{2R}{R_1}}}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}} + \frac{c_2\left(\sqrt{x-x_1} + \sqrt{x-x_2}\right)^{-\frac{2R}{R_1}}}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}. \qquad (15)$$

Заметим, что при выполнении условий теоремы 1 степень выражений, заключенных в формуле (15) в скобки, оказывается целой. Это лишний раз доказывает, что при выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (13) имеет более простой вид, чем в самом общем случае.

Таким образом, мы доказали, что все решения уравнения (13) являются лиувиллевыми. Тем самым установлено, что задача о качении динамически симметричного шара по сфере под действием сил с потенциалом $V = V(u)$ интегрируется в лиувиллевых функциях.

Литература

1. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.

2. *Воронец П. В.* К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил // Киевские Университетские Известия. 1910. Т. 50. Вып. 10. С. 101–111.

3. *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.

4. *Kovacic J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2. P. 3–43.

Статья поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su
Катасонова Вера Александровна — студент; vera.katasonova@icloud.com

Existence of liouvillian solutions in the problem of motion of a dynamically symmetric ball on a perfectly rough sphere

A. S. Kuleshov, V. A. Katasonova

Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Katasonova V. A. Existence of liouvillian solutions in the problem of motion of a dynamically symmetric ball on a perfectly rough sphere. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 670–677. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.413 (In Russian).

The problem of rolling without sliding of a rotationally symmetric rigid body on a sphere is considered. The rolling body is assumed to be subjected to the forces, the resultant of which is directed from the center of mass G of the body to the center O of the sphere, and depends only on the distance between G and O. In this case, the solution of this problem is reduced to solving the second-order linear differential equation over the projection of the angular velocity of the body onto its axis of symmetry. Using the Kovacic algorithm, we search for Liouvillian solutions of the corresponding second order linear differential equation. We prove that all solutions of this equation are Liouvillian in the case when the rolling rigid body is a nonhomogeneous dynamically symmetric ball. The paper is organized as follows. In the first paragraph, we briefly discuss the statement of the general problem of motion of a rotationally symmetric rigid on a perfectly rough sphere. We prove that this problem is reduced to solving the second order linear differential equation. In the second paragraph, we find Liouvillian solutions of this equation for the case, when the rolling rigid body is a dynamically symmetric ball.

Keywords: body rolling on a sphere, dynamically symmetric ball, Kovacic algorithm, Liouvillian solutions.

References

1. Chaplygin S. A., “On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane”, *Regular and Chaotic Dynamics* **7**(2), 119—130 (2002).
2. Woronetz P. V., “On the problem of the motion of a rigid body rolling without sliding on a given surface under the influence of given forces”, *Kievskie Universitetskie Izvestija* **50**(10), 101–111 (1910) [in Russian].
3. Markeev A. P., *Dynamics of a Body Being Contiguous to a Rigid Surface* (Nauka, Moscow, 1992, 336 p.) [in Russian].
4. Kovacic J., “An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations”, *Journal of Symbolic Computation* **2**, 3–43 (1986).

Received: April 10, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author’s information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Vera A. Katasonova — vera.katasonova@icloud.com