

# Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур.

## 2. Метод решения

Л. В. Паршина<sup>1</sup>, В. М. Рябов<sup>2</sup>, Б. А. Ярцев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Крыловский государственный научный центр,  
Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 2. Метод решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 678–688. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.414>

Приводится описание метода численного решения уравнений затухающих колебаний неоднородных композитных структур. Для формирования системы алгебраических уравнений применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. Сначала находятся вещественные решения. Для нахождения комплексных собственных частот системы в качестве их начальных значений используются найденные вещественные собственные частоты, а затем вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка. Обсуждаются результаты исследования сходимости численного решения дифференциальных уравнений движения слоистых неоднородных структур, выполненного на примере безопорной прямоугольной двухслойной пластины. Силовой слой пластины выполнен из однонаправленного углепластика, упруго-диссипативные свойства которого в рассматриваемом диапазоне частот и температур не зависят от частоты колебаний. На одну из наружных поверхностей силового слоя нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера, характеризующегося температурно-частотной зависимостью вещественной части комплексного модуля упругости и коэффициента механических потерь. Оценка достоверности математической модели и метода численного решения, выполненная путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь для двух вариантов состава двухслойного безопорного стержня, продемонстрировала их хорошее согласование.

*Ключевые слова:* метод решения, многочлены Лежандра, линейные алгебраические уравнения, демпфирование, сходимость численного решения, оценка достоверности, собственная частота, коэффициент механических потерь.

1. Рассмотрим метод численного решения уравнений затухающих колебаний неоднородных композитных структур, предложенных в [1]. В дифференциальные уравнения движения и граничные условия неоднородной по толщине безопорной прямоугольной пластины входят производные искомым функций, поэтому будем искать приближения в аналитическом виде, а не численно во избежание потери точности при последующем дифференцировании. Сделаем линейные замены переменных  $\xi = 2x/a - 1$ ,  $\chi = 2y/b - 1$ , переводящие прямоугольник  $[0, a] \times [0, b]$  в квадрат

$[-1, 1] \times [-1, 1]$  и введем новые неизвестные функции

$$\bar{u}(\xi, \chi) = u_0((\xi + 1)a/2, (\chi + 1)b/2), \quad \bar{\alpha}(\xi, \chi) = \alpha_0((\xi + 1)a/2, (\chi + 1)b/2),$$

$$\bar{v}(\xi, \chi) = v_0((\xi + 1)a/2, (\chi + 1)b/2), \quad \bar{\beta}(\xi, \chi) = \beta_0((\xi + 1)a/2, (\chi + 1)b/2),$$

$$\bar{w}(\xi, \chi) = w_0((\xi + 1)a/2, (\chi + 1)b/2),$$

приближения к которым для достаточно больших  $N$  будем искать в виде

$$\bar{u}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\chi), \quad \bar{\alpha}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\chi),$$

$$\bar{v}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} v_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\chi), \quad \bar{\beta}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} b_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\chi), \quad (1)$$

$$\bar{w}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} w_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\chi).$$

В качестве координатных функций возьмем многочлены Лежандра, т.е. положим  $\phi_m(\xi) = P_m(\xi)$ ,  $\psi_n(\chi) = P_n(\chi)$ . Нам потребуются интегралы от произведений многочленов Лежандра и их производных, т.е. скалярные произведения вида

$$\langle \phi_k^{(i)}, \phi_j^{(m)} \rangle = \int_{-1}^1 \phi_k^{(i)}(\xi) \phi_j^{(m)}(\xi) d\xi, \quad i, m = 0, 1, 2, \quad i + m \leq 2.$$

Используя известные свойства многочленов Лежандра [2], находим

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \int_{-1}^1 P_k(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 2/(2k + 1), & k = j. \end{cases}$$

Далее, так как  $\langle \phi'_k, \phi'_j \rangle = \langle \phi'_j, \phi'_k \rangle$ , то достаточно рассмотреть случай  $k \geq j$ , тогда

$$\langle \phi'_k, \phi'_j \rangle = \int_{-1}^1 \phi'_j(\xi) d\phi_k(\xi) = \frac{j(j+1)}{2} [1 + (-1)^{k+j}].$$

Теперь найдем  $\langle \phi'_k, \phi_j \rangle$ :

$$\langle \phi'_k, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0, & k \leq j, \\ 1 - (-1)^{k+j}, & k > j. \end{cases}$$

Наконец, интегралы вида

$$\langle \phi''_k, \phi_j \rangle = \int_{-1}^1 \phi''_k(\xi) \phi_j(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \phi_j(\xi) d\phi'_k(\xi) = \phi_j(\xi) \phi'_k(\xi) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \phi'_k(\xi) \phi'_j(\xi) d\xi$$

очевидным образом вычисляются через вышеприведенные результаты.

Учитывая гармонический закон колебаний и вид приближений (1), запишем необходимые условия стационарности функционала  $L$  (см. [1]):

$$\frac{\partial L}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial v_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial b_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = 0, \quad i, j = \overline{0, N-1}.$$

Эти условия представляют собой систему из  $5N^2$  линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных коэффициентов представлений (1)

$$\mathbf{X} = \{u_{00}, \dots, u_{N-1, N-1}, a_{00}, \dots, a_{N-1, N-1}, \dots, w_{00}, \dots, w_{N-1, N-1}\}^T,$$

которую запишем в матричной форме

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0. \quad (2)$$

Матрица жесткости  $\mathbf{C}$  вычисляется по максимальной потенциальной энергии деформации  $U_0$ , а матрица масс  $\mathbf{M}$  — по максимальной кинетической энергии  $T_0$ .

Для решения системы линейных алгебраических уравнений реализован метод Жордана [3] с выбором главного элемента по всей матрице.

Необходимым условием существования нетривиальных решений однородной системы (2) является равенство нулю ее определителя, т. е.

$$F(\omega) \equiv \det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (3)$$

Это и есть уравнение для определения собственных частот колебаний. Будем их находить следующим образом: задаем некоторый диапазон  $[\omega_{start}, \omega_{finish}]$ , в котором, предположительно, расположена искомая частота, и пробегаем его с некоторым шагом, каждый раз вычисляя знак определителя  $F(\omega)$ . Если знак меняется, то соответствующий частичный интервал содержит частоту, при которой определитель равен нулю. Далее повторяем описанную процедуру для найденного частичного интервала, уменьшая шаг. Затем по найденной таким способом с требуемой точностью частоте находим какое-либо нетривиальное решение однородной системы, оно и определит соответствующую форму собственных колебаний.

При отсутствии температурно-частотной зависимости упруго-диссипативных характеристик для слоя «жесткого» вязкоупругого полимера матрица  $\mathbf{C}$  не зависит от частоты  $\omega$  и вычисляется один раз, как и матрица  $\mathbf{M}$ , а затем они используются многократно. В противном случае с изменением частоты все элементы матрицы  $\mathbf{C}$  необходимо вычислять заново, что резко увеличивает время вычислений описанным выше способом (порядок матриц достаточно велик и равен  $N_1 = 5N^2$ ).

Для преодоления этого затруднения поступим следующим образом: зададим некоторый начальный диапазон  $[\omega_{start}, \omega_{finish}]$ , содержащий искомую частоту, а затем вычислим упруго-диссипативные характеристики для слоя «жесткого» вязкоупругого полимера по некоторой фиксированной частоте из этого диапазона, например, для  $\omega = (\omega_{start} + \omega_{finish})/2$ , после чего решаем уравнение (3) с вычисленными «постоянными» матрицами  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$ . Затем берем некоторую небольшую окрестность полученной частоты и повторяем только что описанную процедуру до тех пор, пока не достигнем желаемой точности. Как правило, достаточно 4–5 шагов таких итераций.

В случае затухающих собственных колебаний искомые частоты суть комплексные числа, и указанный способ их нахождения неприменим.

Выберем в качестве начального приближения к искомой комплексной частоте комплексное число  $\omega^{(0)}$ , вещественная часть которого равна частоте упругих собственных колебаний с модулями, равными вещественным частям соответствующих комплексных модулей, а мнимая часть — произвольное значение в пределах ожидаемого коэффициента механических потерь, после чего строим итерационную последовательность

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \frac{F(\omega^{(k)})}{F'(\omega^{(k)})} - \frac{F^2(\omega^{(k)})F''(\omega^{(k)})}{2F'^3(\omega^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Эта последовательность сходится с третьим порядком к искомой частоте, т. е. погрешность на следующем шаге приближенно равна кубу предыдущей погрешности [3].

Необходимые в расчетах производные находятся приближенно по формулам численного дифференцирования.

По вычисленным величинам комплексных собственных частот  $\omega_i$  определяется коэффициент механических потерь

$$\eta_i = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega_i)}{\operatorname{Re}(\omega_i)}.$$

**2.** Метод численного решения уравнений затухающих колебаний неоднородной по толщине балки Тимошенко легко получить как частный случай общего метода, описанного в п. 1. Для этой задачи минимизируемый функционал имеет вид

$$L(u, \alpha, w) = b \int_0^l \left( \frac{1}{2} A_{11} u'^2(x) + B_{11} u'(x) \alpha'(x) + \frac{1}{2} D_{11} \alpha'^2(x) + \frac{1}{2} A_{55} (\alpha(x) + w'(x))^2 - \frac{\omega^2}{2} (I_0 (u^2(x) + w^2(x)) + 2I_1 u(x) \alpha(x) + I_2 \alpha^2(x)) \right) dx.$$

Положим  $\xi = 2x/l - 1$ ,  $\bar{u}(\xi) = u\left(\frac{\xi+1}{2}l\right)$ ,  $\bar{\alpha}(\xi) = \alpha\left(\frac{\xi+1}{2}l\right)$ ,  $\bar{w}(\xi) = w\left(\frac{\xi+1}{2}l\right)$ ,

$$\bar{u}(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(\xi), \quad \bar{\alpha}(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(\xi), \quad \bar{w}(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(\xi),$$

где  $\varphi_k(\xi) = P_k(\xi)$  — многочлены Лежандра. Используя соотношение

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l} \frac{d}{d\xi},$$

перепишем уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} = \frac{\partial L}{\partial b_j} = \frac{\partial L}{\partial d_j} = 0, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

предварительно умножив их на  $l^2/4$ , в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left( A_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle - \frac{\omega^2 l^2}{2 \cdot 4} 2I_0 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left( B_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle - \frac{\omega^2 l^2}{2 \cdot 4} 2I_1 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left( B_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle - \frac{\omega^2 l^2}{2} \frac{1}{4} 2I_1 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left( D_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle + A_{55} \frac{l^2}{4} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle - \frac{\omega^2 l^2}{2} \frac{1}{4} 2I_2 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left( A_{55} \frac{l}{2} \langle \varphi'_k, \varphi_j \rangle \right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k \left( A_{55} \frac{l}{2} \langle \varphi_k, \varphi'_j \rangle \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left( A_{55} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle - \frac{\omega^2 l^2}{2} \frac{1}{4} 2I_0 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Находим  $\omega$  из уравнения  $\det \left( \mathbf{C} - \omega^2 \frac{l^2}{4} \mathbf{M} \right) = 0$ , где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle & B_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle, & 0 \\ B_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle & D_{11} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle + A_{55} \frac{l^2}{4} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle & A_{55} \frac{l}{2} \langle \varphi'_k, \varphi_j \rangle \\ 0 & A_{55} \frac{l}{2} \langle \varphi_k, \varphi'_j \rangle & A_{55} \langle \varphi'_k, \varphi'_j \rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_0 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle & I_1 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle & 0 \\ I_1 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle & I_2 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \end{bmatrix},$$

$k, j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Способы определения искоемых частот описаны выше в п. 1.

**3.** Сходимость предложенного метода численного решения дифференциальных уравнений движения слоистых неоднородных композитных структур исследовалась на примере прямоугольной двухслойной пластины ( $a = 0,16$  м,  $b = a/2 = 0,08$  м) путем варьирования числа координатных функций  $N^2$  по обоим независимым пространственным переменным  $x, y$ . Силовой слой двухслойной пластины толщиной  $h_1 = a/100 = 0,0016$  м = const представляет собой квазиоднородную структуру, образованную совокупностью конечного числа армирующих слоев углепластика HMS/DX-209. Ориентация всех армирующих слоев силового слоя относительно связанной с направлениями осей пластины глобальной системы координат  $xyz$  считалась одинаковой. Предполагалось, что в рассматриваемом диапазоне температур упруго-диссипативные характеристики однонаправленного углепластика HMS/DX-209 частотно независимы, т. е. постоянны ( $\rho = 1580$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_{11} = 191 \cdot (1 + i \cdot 7,8 \cdot 10^{-4})$  ГПа,  $E_{22} = 5 \cdot (1 + i \cdot 6,7 \cdot 10^{-3})$  ГПа,  $G_{12} = G_{13} = 3 \cdot (1 + i \cdot 1,16 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $G_{23} = 2,5 \cdot (1 + i \cdot 1,15 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,279$ ). Значения вещественных частей комплексных модулей упругости и сдвига слоя HMS/DX-209 и соответствующих коэффициентов механических потерь вычислялись по предложенным в работе [4] соотношениям микромеханики. Необходимые для расчета упруго-диссипативные свойства матрицы и армирующих волокон приведены в [5]. На одну из наружных поверхностей силового слоя нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера

толщиной  $h_2 = h_1 = 0,0016$  м. Полученные в результате обработки экспериментальных данных температурно-частотные зависимости вещественной части комплексного модуля упругости  $\text{Re } E = \text{Re } E(f, T_C)$  и коэффициента механических потерь  $\eta = \eta(f, T)$  «жесткого» вязкоупругого полимера ( $\nu = 0,33$ ,  $\rho = 1560 \text{ кг/м}^3$ ) приведены на рис. 1. При фиксированных значениях температуры окружающей среды  $T_C = \text{const}$  эти зависимости описываются полиномами вида

$$\lg \text{Re } E(f) = \sum_{m=0}^N p_m (\lg f)^{N-m}, \quad \lg \eta(f) = \sum_{n=0}^M q_n (\lg f)^{M-n},$$

где  $f$  — частота колебаний;  $T_C$  — температура окружающей среды.

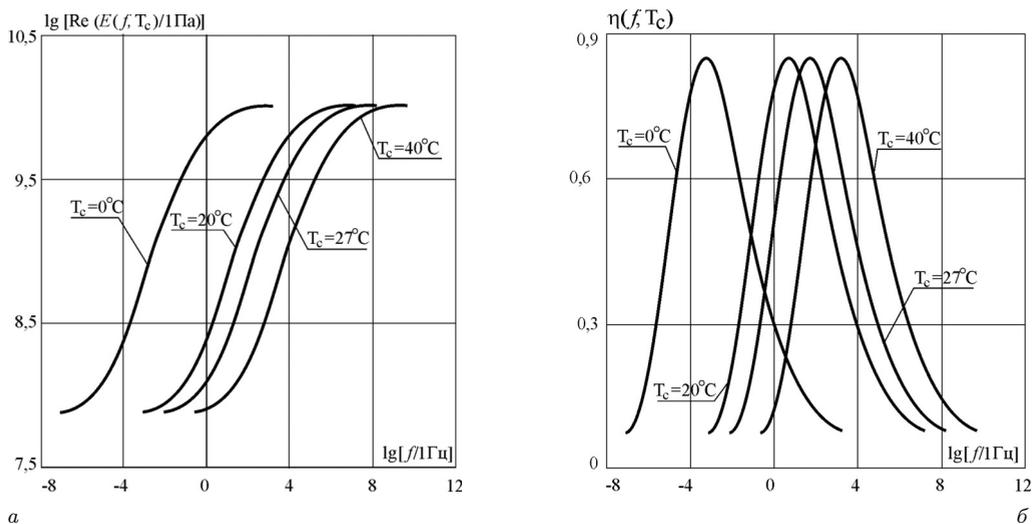
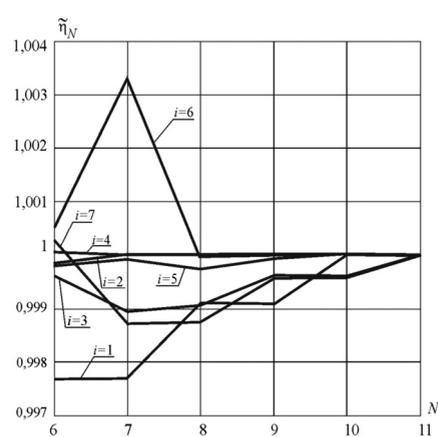
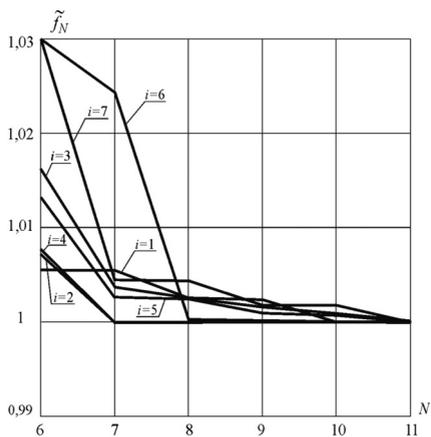


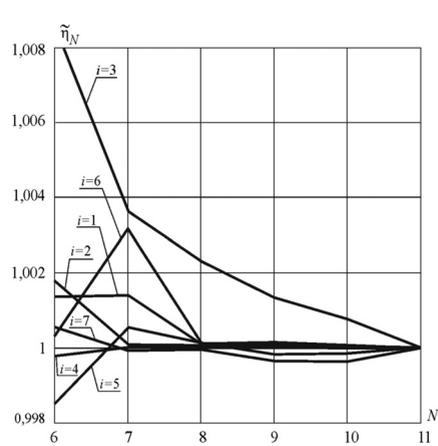
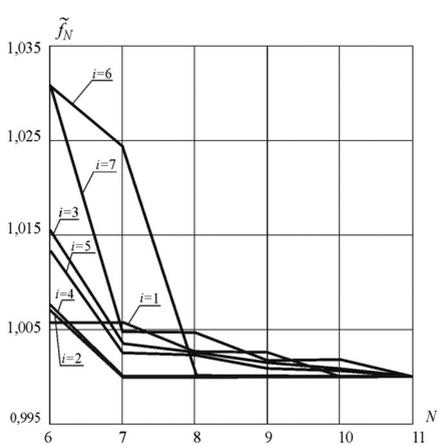
Рис. 1. Частотная зависимость *a* — вещественной части комплексного модуля упругости и *б* — коэффициента механических потерь «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера при фиксированных значениях температуры окружающей среды.

Исследования сходимости численного решения выполнялись для двухслойной пластины с относительной толщиной слоя вязкоупругого полимера  $\bar{h} = h_2/h_1 = 1$ , все армирующие слои силового слоя которой ориентированы в направлении  $\theta = 0^\circ$  при трех значениях температуры окружающей среды:  $T_C = 0^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$ ,  $40^\circ\text{C}$ . Каждому значению  $T_C$  соответствуют существенно отличные величины вещественной части комплексного модуля упругости и коэффициента механических потерь «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера. Полученные результаты приведены на рис. 2 в виде графиков зависимостей нормированных собственных частот  $\tilde{f}_i = f_{i(N=j)}/f_{i(N=11)}$  и коэффициентов механических потерь  $\tilde{\eta}_i = \eta_{i(N=j)}/\eta_{i(N=11)}$  первых семи тонов колебаний рассматриваемой пластины ( $i = \overline{1,7}$ ). Здесь  $f_{i(N=j)}$ ,  $\eta_{i(N=j)}$  — значения собственной частоты и коэффициента механических потерь  $i$ -го тона колебаний при  $j = \overline{6,11}$ . Совместный анализ полученных результатов позволяет отметить быструю сходимость решения, поскольку при  $j \geq 8$  для всех рассмотренных случаев  $\tilde{f}_i \rightarrow 1$  и  $\tilde{\eta}_i \rightarrow 1$ .

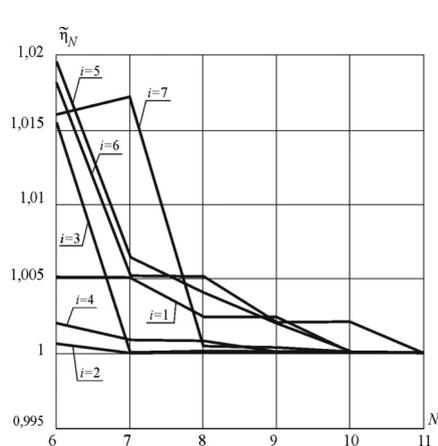
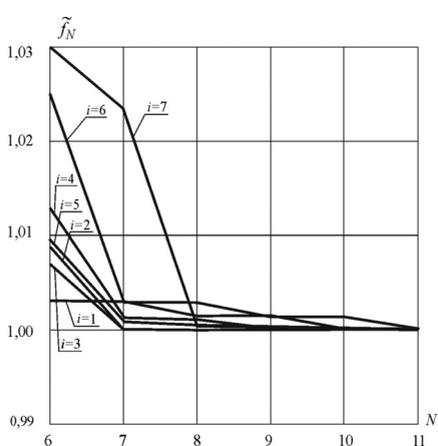
4. Оценка достоверности предложенной математической модели и метода численного решения дифференциальных уравнений движения слоистых неоднородных



$T_C = 0^\circ\text{C}$

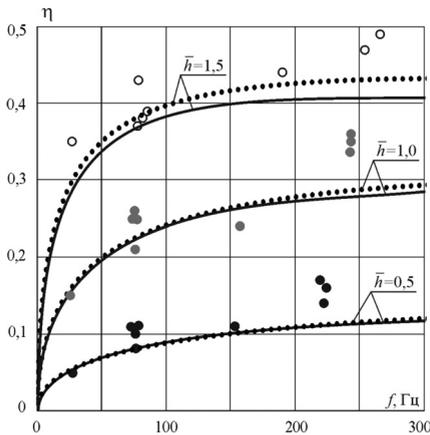


$T_C = 20^\circ\text{C}$

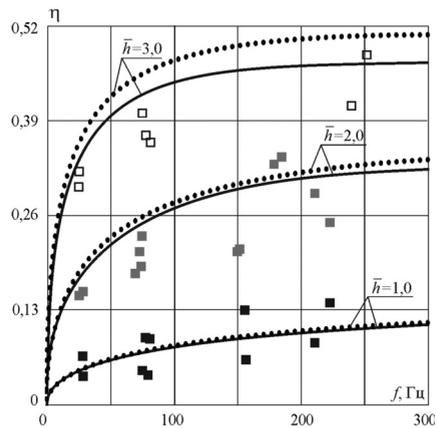


$T_C = 40^\circ\text{C}$

Рис. 2. Сходимость численного решения при нахождении значений собственных частот и значений коэффициентов механических потерь в зависимости от размерности системы координатных функций.



а



б

Рис. 3. Частотные зависимости коэффициентов механических потерь несимметричного неоднородного двухслойного стержня с несущим слоем из: а — стеклопластика 64009 / DION FR 9300, б — углепластика Ст-11043 / DION FR 9300.

композитных структур проводилась путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь безопорного стержня.

Стержень длиной  $l$  и шириной  $b$  образован слоем ортотропного полимерного композиционного материала (ПКМ) толщиной  $h_1$  и слоем «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера толщиной  $h_2$ .

Численные и экспериментальные исследования проводились для двух вариантов состава двухслойного стержня ( $l = 1$  м), отличающихся материалом несущего слоя. В первом варианте в качестве несущего слоя использовался параллельно армированный стеклопластик 64009 / DION FR 9300 ( $E_{11} = 22 \cdot (1 + i \cdot 3,7 \cdot 10^{-3})$  ГПа,  $G_{13} = 4,2 \cdot (1 + i \cdot 2,5 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,29$ ,  $\rho = 1890$  кг/м<sup>3</sup>,  $\bar{h} = 0,5; 1,0; 1,5$ ), а во втором — однонаправленный углепластик Ст-11043 / DION FR 9300 ( $E_{11} = 96 \cdot (1 + i \cdot 9 \cdot 10^{-4})$  ГПа,  $G_{13} = 4,7 \cdot (1 + i \cdot 1,2 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $\rho = 1460$  кг/м<sup>3</sup>,  $\bar{h} = 1,0; 2,0; 3,0$ ).

Экспериментальное определение упруго-диссипативных характеристик материалов несущих слоев проводилось по методу, описанному в [6] в предположении о температурно-частотной независимости вещественных и мнимых частей комплексных модулей.

Упруго-диссипативные характеристики «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера ( $\nu = 0,33$ ,  $\rho = 1560$  кг/м<sup>3</sup>) приведены на рис. 1.

При проведении как численных, так и экспериментальных исследований варьировались длина стержня  $l$  и относительная толщина слоя вязкоупругого материала  $\bar{h}$ . Температура окружающей среды в расчетах принималась  $T_C = 27^\circ\text{C}$ , что соответствовало условиям проведения эксперимента. Экспериментальные значения собственных частот  $f_{i \text{ exp}}$  и соответствующих им коэффициентов механических потерь  $\eta_{i \text{ exp}}$   $i$ -го тона поперечных колебаний безопорных двухслойных стержней определялись резонансным методом.

Сопоставление расчетных  $\eta_{i \text{ cal}}$  и экспериментальных  $\eta_{i \text{ exp}}$  значений коэффициентов механических потерь в зависимости от частоты изгибных колебаний  $f_i$  двух-

слои стержней ( $i = 1, 2, 3; l = 1 \text{ м}$ ) приведено на рис. 3. На этом рисунке сплошными линиями представлены зависимости  $\eta_{i \text{ cal}} = \eta_{i \text{ cal}}(f)$ , вычисленные по модели несимметричной по толщине балки Тимошенко [1], точками обозначены результаты эксперимента. Помимо этого, на рис. 3 точечными линиями представлены результаты простейшей оценки величины коэффициента механических потерь при поперечных колебаниях двухслойного стержня, не связанной с решением краевых задач. Эта оценка получена из уравнений затухающих колебаний безопорной несимметричной по толщине балки Тимошенко, образованной силовым слоем ортотропного ПКМ, на одну из наружных поверхностей которого нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера [1]:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + B_{11}\alpha_{0,xx} + \omega^2(I_0u_0 + I_1\alpha_0) &= 0; \\ A_{55}(\alpha_{0,x} + w_{0,xx}) + \omega^2I_0w_0 &= 0; \\ B_{11}u_{0,xx} + D_{11}\alpha_{0,xx} - A_{55}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2(I_1u_0 + I_2\alpha_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Путем простейших преобразований и пренебрежения инерцией продольного движения поперечных сечений система дифференциальных уравнений второго порядка (4) сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$Cw_{0,xxxx} + \omega^4 \frac{I_0}{A_{55}}(I_2 - z_0I_1)w_0 + \omega^2 \left( \frac{C}{A_{55}}I_0 - z_0I_1 + I_2 \right)w_{0,xx} - \omega^2I_0w_0 = 0, \quad (5)$$

где  $C$  — эффективная комплексная изгибная жесткость,  $\omega$  — круговая комплексная собственная частота колебаний,  $w_0 = w_0(x)$  — амплитуда поперечных колебаний срединной оси балки,  $z_0 = \text{Re } B_{11} / \text{Re } A_{11}$  — смещение нейтральной оси поперечного сечения относительно срединной оси.

Температурно-частотная зависимость упруго-диссипативных характеристик входящего в состав исследуемых неоднородных стержней «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера порождает температурно-частотную зависимость эффективной комплексной изгибной жесткости:

$$C = C(f, T_C) = D_{11}(f, T_C) - \frac{B_{11}^2(f, T_C)}{A_{11}(f, T_C)}, \quad (6)$$

где  $A_{11}(f, T_C)$ ,  $B_{11}(f, T_C)$ ,  $D_{11}(f, T_C)$  — комплексные мембранная, смешанная и изгибная жесткости.

Из (6) вытекает формула для получения простейшей оценки величины коэффициента механических потерь  $i$ -й моды поперечных колебаний двухслойного стержня при фиксированном значении температуры окружающей среды  $T_C = \text{const}$ :

$$\eta_i = \frac{\text{Im } C(f_i, T_C)}{\text{Re } C(f_i, T_C)}. \quad (7)$$

В случае однородного стержня имеем  $B_{11} = 0$ ,  $I_1 = 0$  и уравнение (5) совпадает с классическим уравнением собственных колебаний балки Тимошенко.

При анализе приведенных на рис. 3 расчетных и экспериментальных зависимостей  $\eta_{i \text{ cal}} = \eta_{i \text{ cal}}(f)$  и  $\eta_{i \text{ exp}} = \eta_{i \text{ exp}}(f)$  необходимо учитывать, что свойства выпускаемых промышленностью вязкоупругих полимеров могут изменяться от партии к партии, а фирмы время от времени вносят изменения в их состав или процесс изготовления; характеристики, представляемые изготовителями, не могут быть полностью гарантированы [7, 8].

Сопоставление полученных результатов позволяют утверждать, что использование обоих методов прогнозирования диссипативных свойств приводит к хорошему согласованию с экспериментальными данными. Расхождения  $\Delta\eta_i = [(\eta_{i\text{ cal}}/\eta_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$  между значениями  $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$  и  $\eta_{i\text{ exp}} = \eta_{i\text{ exp}}(f)$  возрастают по мере увеличения демпфирующей способности механической системы, но даже при  $\eta \approx 0,5$  величина их расхождения не превышает  $\Delta\eta_i = \pm 15\%$ . Численное решение дифференциальных уравнений движения позволяет получить консервативную оценку значений коэффициентов механических потерь. К более оптимистичному прогнозу величин  $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$  приводит формула (7).

## Литература

1. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. Т. 5 (63). 2018. Вып. 2. С. 302–311.
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2007. 480 с.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматлит, 1962. 640 с.
4. Saravanos D. A., Chamis C. C. Unified micromechanics of damping for unidirectional and off-axis fiber composites // Journal of Composite Technology & Research. 1990. Vol. 12, N 1. P. 31–40.
5. Saravanos D. A., Chamis C. C. An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures // Polymer Composites. 1990. Vol. 11, N 6. P. 328–336.
6. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Связанные затухающие колебания композитных конструкций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 32–38.
7. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. М.: Мир, 1988. 448 с.
8. Zhou X. Q., Yu D. Y., Shao X. Y., Zhang S. Q., Wang S. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review // Composite Structures. 2016. Vol. 136. P. 460–480.

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2017 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

### Контактная информация:

Паршина Людмила Валентиновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотр.; ludaparshina@mail.ru  
Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru  
Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук; boris\_yar@mail.ru

## Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures.

### 2. Method of solution

L. V. Parshina<sup>1</sup>, V. M. Ryabov<sup>2</sup>, B. A. Yartsev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Krylov State Research Center, Moskovskoye shosse, 44, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A. Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 2. Method of solution. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 678–688. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.414> (In Russian).

This paper describes the method of numerical solution to decaying vibration equations for heterogeneous composite structures. The system of algebraic equations is generated through Ritz method using Legendre polynomials as coordinate functions. First, real solutions are found. To find complex natural frequencies of the system, the obtained real natural frequencies are taken as initial values, and then, by means of the third-order iteration method, complex natural frequencies are calculated. The paper discusses the convergence of numer-

ical solution of the differential equations describing the motion of layered heterogeneous structures, obtained for unsupported rectangular two-layered plate. Bearing layer of the plate is made of unidirectional CRP, its elastic and dissipation properties within the investigated band of frequencies and temperatures are independent on vibration frequency. The bearing layer has one of its outer surfaces covered with a layer of “stiff” isotropic viscoelastic polymer characterized by temperature–frequency relationship for the real part of complex Young’s modulus and mechanical loss factor. Validation of the mathematical model and of the numerical solution method performed through comparison of calculation results for natural frequencies and loss factor versus test data (for two composition variants of two-layered unsupported beam) has shown their good correlation.

*Keywords:* solution method, Legendre polynomials, linear algebraic equations, damping, convergence of numerical solution, validation, natural frequency, loss factor.

## References

1. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 1. Formulation of problem”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51**(2), 175–181 (2018).
2. Suetin P. K., *Classical Orthogonal Polynomials* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
3. Berezin I. S., Zhidkov N. P., *Computational Methods* **2** (Fizmatlit, Moscow, 1962) [in Russian].
4. Saravanos D. A., Chamis C. C., “Unified micromechanics of damping for unidirectional and off-axis fiber composites”, *Journal of Composite Technology & Research* **12**(1), 31–40 (1990).
5. Saravanos D. A., Chamis C. C., “An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures”, *Polymer Composites* **11**(6), 328–336 (1990).
6. Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Natural damped vibrations of anisotropic box beams of polymer composite materials. 2. Numerical experiments”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(3), 260–268 (2016).
7. Nashif A. D., Johnes D. I. G., Henderson J. P., *Vibration Damping* (John Wiley & Sons, 1985).
8. Zhou X. Q., Yu D. Y., Shao X. Y., Zhang S. Q., Wang S., “Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review”, *Composite Structures* **136**, 460–480 (2016).

Received: November 22, 2017

Accepted: July 2, 2018

### Author’s information:

Ludmila V. Parshina — ludaparshina@mail.ru

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru

Boris A. Yartsev — boris\_yar@mail.ru