МАТЕМАТИКА

УДК 519.21
MSC 60A05

Спектр отделимой алгебры Дынкина и топология на нем

С. С. Валландер

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Валландер С. С.* Спектр отделимой алгебры Дынкина и топология на нем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 351–355. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.301

Мы продолжаем подготовку к построению обобщенной аксиоматики теории вероятностей, начатую в предыдущих работах автора. Наш подход основывается на изучении систем множеств более общего вида, чем традиционные алгебры множеств, и их булевых версий. Мы называем их алгебрами Дынкина. Вводятся спектр отделимой алгебры Дынкина и подходящая топология Гротендика на нем. Отделимые алгебры Дынкина — естественный класс абстрактных алгебр Дынкина, был выделен автором ранее. Для них можно определить частичные булевы операции, обладающие подходящими свойствами. В указанной работе был получен структурный результат — каждая отделимая алгебра Дынкина является объединением своих максимальных булевых подалгебр. В настоящей заметке, основываясь на этом результате, мы определяем спектр отделимой алгебры Дынкина и вводим подходящую топологию Гротендика на нем. Соответствующие построения в определенной степени похожи на конструкции простого спектра коммутативного кольца и топологии Зарисского на нем. Аналогия здесь неполная — топология Зарисского делает спектр коммутативного кольца обычным топологическим пространством, в то время как топология Гротендика, не являющаяся, вообще говоря, топологией в обычном смысле, превращает спектр алгебры Дынкина в более абстрактный объект (site или situs по Гротендику). Для наших целей этого достаточно.

Ключевые слова: отделимые алгебры Дынкина, спектр отделимой алгебры Дынкина, топология Гротендика на спектре.

Настоящая заметка продолжает исследования автора по построению обобщенной аксиоматики теории вероятностей. Классическая система аксиом Колмогорова (см. [1] и исторический обзор в [2]) связывает теорию вероятностей с теорией меры. Однако, как было понятно и самому Колмогорову (см. [3]), и ряду его последователей, некоторые естественные задачи в классическую аксиоматику не укладываются (см. также [4], где указаны два примера таких задач; в нашу схему эти примеры входят). Развиваемый нами подход основывается на изучении систем событий более общего, чем булевы алгебры, вида (мы называем их алгебрами Дынкина). Как показано ниже, при этом возникают естественные связи с теорией пучков.

В работе автора [5] показано, что отделимая алгебра Дынкина является объединением своих максимальных булевых подалгебр. В настоящей заметке, основываясь на этом результате, мы определяем спектр отделимой алгебры Дынкина и вводим топологию Гротендика на этом спектре (одноточечный спектр соответствует традиционным вероятностным пространствам).

Приводимые ниже построения в определенной степени похожи на конструкции простого спектра коммутативного кольца и топологии Зарисского на нем (см. [6] и [7]). Аналогия здесь неполная — топология Зарисского делает спектр коммутативного кольца обычным топологическим пространством (хотя и нехаусдорфовым), в то время как топология Гротендика, не являющаяся топологией в традиционном смысле, превращает спектр алгебры Дынкина в более абстрактный объект (site или situs по Гротендику). Для определения пучков вероятностей этого достаточно.

Абстрактная алгебра Дынкина (см. [8]) — это частично упорядоченное множество с 0 и 1, на котором задано симметричное бинарное отношение $\perp$ (дизъюнктность) и две частичные бинарные операции — сложение $A + B$ для дизъюнктных A и B и вычитание $B - A$ для $A \leq B$. Точное определение с перечислением всех требуемых свойств (аксиом) имеется в [8]. Вероятностную мотивировку можно найти в [4].

В работе [5] выделен естественный класс абстрактных алгебр Дынкина — отделимые алгебры Дынкина, для которых можно определить частичные булевы операции, обладающие подходящими свойствами, и доказан упомянутый в начале настоящей заметки структурный результат.

Перейдем к определению спектра $Spec(\mathcal{A})$ отделимой алгебры Дынкина $\mathcal{A}$. Как множество, спектр — это совокупность максимальных булевых алгебр, содержащихся в $\mathcal{A}$. Для произвольного подмножества $X \subseteq \mathcal{A}$ положим

$$V(X) = \{s \in Spec(\mathcal{A}) : (\forall x \in X)(x \in s)\}.$$

Очевидно, что

$$V(X) = \cap_{x \in X} V(\{x\}).$$

Из этого соотношения сразу получаем равенство

$$V(\cup_\alpha X_\alpha) = \cap_\alpha V(X_\alpha)$$

(для произвольного семейства $\{X_\alpha\}$ подмножеств $\mathcal{A}$).

Дополнительные множества

$$U(X) = V(X)^c$$

(дополнения берутся в $Spec(\mathcal{A})$) обладают свойством

$$U(\cup_\alpha X_\alpha) = \cup_\alpha U(X_\alpha).$$

Таким образом, совокупность $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ множеств вида $U(X)$ замкнута относительно произвольных объединений. К сожалению, для конечных пересечений такой замкнутости нет, поэтому $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ топологией не является. Тем не менее, топологию Гротендика, связанную с $\mathcal{O}(\mathcal{A})$, определить можно (см. ниже). Соответствующее рассуждение напоминает восходящее к Гротендику объяснение того, что обычная топология порождает топологию Гротендика, однако отличается в некоторых деталях. Напомним определение топологии Гротендика на малой категории $\mathbf{C}$ (см. [9]; версия, изложенная в [10], нам не подходит, поскольку требует существования в $\mathbf{C}$ расслоенных произведений).

Решето S на объекте $C \in \mathbf{C}$ — это семейство морфизмов $f : dom(f) \to C$, такое что $(f \in S) \Rightarrow (f \circ g \in S)$ для любого морфизма $g : dom(g) \to dom(f)$.

Если S — решето на C и $h : D \to C$ — морфизм, то $h^*(S) = \{g : h \circ g \in S\}$ — решето на D (см. [9]).

Топология Гротендика на $\mathbf{C}$ — это функция J, сопоставляющая каждому объекту $C \in \mathbf{C}$ семейство $J(C)$ решет на C и удовлетворяющая требованиям:

1) максимальное решето $t_C = \{f : dom(f) \to C\}$ входит в $J(C)$;

2) если $S \in J(C)$ и $h : D \to C$ — морфизм, то $h^*(S) \in J(D)$;

3) если $S \in J(C)$ и R — решето на C, такое что для любого морфизма
$$h : dom(h) \to C$$
из S выполнено $h^*(R) \in J(D)$, то $R \in J(C)$.

Определим теперь на спектре $Spec(\mathcal{A})$ подходящую топологию Гротендика. Будем рассматривать $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ как категорию множеств, объектами которой являются множества вида $U(X)$, а морфизмами — включения $W \subseteq U$. Для $U \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ определим решето на U как семейство S элементов $W \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$, таких что $W \subseteq U$ и
$$((W \in S)\&(W' \subseteq W)) \Rightarrow (W' \in S)$$
(замкнутое относительно взятия подмножества). Очевидно, что это определение является частным случаем общего определения решета. Будем говорить, что S покрывает U, если
$$U = \cup_{W \in S} W.$$
Совокупность решет, покрывающих U, обозначим $J(U)$. Ниже проверяется, что функция J, сопоставляющая каждому $U \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ совокупность $J(U)$ покрывающих U решет, является (= задает) топологией Гротендика.

Свойство 1 тривиально:
$$U \in t_U = \{W \in \mathcal{O}(\mathcal{A}) : W \subseteq U\}.$$
Проверим свойство 2. Для этого заметим, что множество $U \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ может быть разными способами представлено в виде $U(X)$. Представление с максимальным X назовем главным:
$$U = \cup_{x:U(\{x\}) \subseteq U} = U(X_U).$$
В рассуждении, приведенном ниже, используются только главные представления.

Пусть S покрывает U и $h : W \subseteq U$ — морфизм. Тогда

$$h^*(S) = \{\tilde{W} \subseteq W : (\tilde{W} \subseteq U) \in S\}.$$

Нужно доказать справедливость равенства

$$\cup_{\tilde{W} \in h^*(S)} \tilde{W} = W.$$

Пусть $s \in W$. Так как $h^*(S)$ покрывает W, найдется $\tilde{W} \in h^*(S)$, такое что $s \in \tilde{W}$. Поскольку

$$\tilde{W} = \cup_{x \in X_{\tilde{W}}} U(\{x\}),$$

найдется $x_0 \in X_{\tilde{W}}$, такое что $s \in U(\{x_0\})$. Проверим, что $U(\{x_0\}) \subseteq W$. Если это включение нарушается, то $x_0 \notin X_W$. Получаем противоречие, поскольку $x_0 \in X_{\tilde{W}}$, а для главных представлений справедливо включение $X_{\tilde{W}} \subseteq X_W$. Таким образом, имеем $U(\{x_0\}) \subseteq W$. Поскольку $(W \subseteq U) \in S$, получаем по определению решета $(U(\{x_0\}) \subseteq U) \in S$ и $(U(\{x_0\}) \subseteq W) \in h^*(S)$, поэтому $h^*(S)$ покрывает любой элемент $s \in W$.

Свойство 3 в нашем случае означает, что объединение покрытий есть покрытие объединения, и потому очевидно.

Как известно (см. [4]), наличие топологии Гротендика позволяет строить пучки. Для вероятностных задач такими пучками являются пучки вероятностей и пучки случайных величин. Их построению и изучению сопутствующих вопросов будет посвящена отдельная работа.

Автор выражает благодарность Б. М. Беккеру за полезные обсуждения.

Литература

1. *Kolmogoroff A.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichskeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933 [Русский перевод. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теория вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936].

2. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. 2006. Vol. 21, N 1. P. 70–98.

3. *Колмогоров А. Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды Коммунистической академии. Разд. мат. 1929. Т. 1. С. 8–21 [Перепечатано в: *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Наука, 1986. С. 48–58].

4. *Валландер С. С.* Несколько замечаний об аксиоматике теории вероятностей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 21–23.

5. *Валландер С. С.* Строение отделимых алгебр Дынкина // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 3. С. 377–383. https://doi.org/10.21638 /11701/spbu01.2016.304

6. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981. 600 с.

7. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. 160 с.

8. *Валландер С. С.* Многолистные вероятностные пространства // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2(60). Вып. 3. С. 327–333.

9. *MacLane S., Moerdijk I.* Sheaves in Geometry and Logic. New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. 628 p.

10. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972. 260 с.

Статья поступила в редакцию 8 января 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Валландер Сергей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; s.vallander@spbu.ru

Spectrum of a separable Dynkin algebra and topology on it

S. S. Vallander

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vallander S. S. Spectrum of a separable Dynkin algebra and topology on it. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 351–355. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.301

We continue a preparation to the construction of generalized axiomatics of probability theory, begined in previous papers of author. Our approach is based on the investigation of set systems more general than usual set algebras and their Boolean versions. We name them Dynkin algebras. The spectrum of separable Dynkin algebra and appropriate Grothendieck topology on it are introduced. Separable Dynkin algebras constitute a natural class of a abstract Dynkin algebras defined by author previously. A structural result was received in this mentioned paper: every separable Dynkin algebra is a union of its maximal Boolean subalgebras. In this paper, we define, basing on this result, the spectrum of a separable Dynkin algebra and an appropriate Grothendieck topology on it. The corresponding constructions are similar to the construction of the simple spectrum of a commutative ring and that of the Zariski topology on it. The analogy here is incomplete: Zariski topology makes the spectrum of a commutative ring to be a usual topological space while Grothendieck topology, which is not a topology in usual sense, transforms the spectrum of a Dynkin algebra into a more abstract object (site or situs via Grothendieck). This is sufficient for our aims.

Keywords: separable Dynkin algebras, spectrum of a separable Dynkin algebra, Grothendieck topology on spectrum.

References

1. Kolmogoroff A., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, Berlin, 1933) (Russian translation: ONTY Publ., Moscow, Leningrad, 1936).

2. Shafer G., Vovk V., "The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe", *Statistical Science* **21**(1), 70–98 (2006).

3. Kolmogorov A. N., "General Measure Theory and Calculus of Probabilities", *Proc. of Kommunist Academy. Section Math.* **1**, 8–21 (1929) [Reprinted in: Kolmogorov A. N. *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 48–58 (Nauka Publ, Moscow, 1986)].

4. Vallander S. S., "Some Remarks Concerning Axiomatics of Probability Theory", *Vestnik St. Petersburg Univ. Series 1*, issue 3, 21–23 (2013) [in Russian].

5. Vallander S. S., "The Structure of Separable Dynkin Algebras", *Vestn. St. Petersburg Univ. Series 1* **3(61)**, issue 3, 377–383 (2016) [in Russian]. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.304

6. Hartshorn R., *Algebraic Geometry* (Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1977, 496 p.).

7. Atiyah M. F., Macdonald I. G., *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, Reading, 1969, 138 p.).

8. Vallander S. S., "Multivalent Probability Spaces", *Vestn. St. Petersburg Univ. Series 1* **2(60)**, issue 3, 327–333 (2015) [in Russian].

9. MacLane S., Moerdijk I., *Sheaves in Geometry and Logic* (Springer, New York—Berlin—Heidelberg, 1992, 628 p.).

10. Bukur I., Delyanu A., *Introduction to theory of categories and functors* (Mir Publ., Moscow, 1972, 260 p.) [in Russian].

Author's information:

Sergey S. Vallander — s.vallander@spbu.ru