УДК 517.925.53 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3
MSC 37C75, 37C29, 34C37

Устойчивость периодических точек диффеоморфизмов многомерного пространства*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Устойчивость периодических точек диффеоморфизмов многомерного пространства // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 356–366. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.302

Изучается диффеоморфизм многомерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Из работ Ш. Ньюхауса, Б. Ф. Иванова, Л. П. Шильникова и других авторов следует, что при определенном способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки может содержать бесконечное множество устойчивых периодических точек, но хотя бы один из характеристических показателей этих точек стремится к нулю с ростом периода. В предлагаемой работе изучаются диффеоморфизмы, у которых способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым отличается от случая, рассмотренного в работах вышеперечисленных авторов. Данная работа является продолжением предыдущих работ автора о диффеоморфизмах, матрица Якоби которых в начале координат имела только действительные собственные числа. Были получены условия, при которых окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки такого диффеоморфизма содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В данной работе предполагается, что матрица Якоби исходного диффеоморфизма в начале координат имеет не только действительные собственные числа, но и неединственную пару комплексно сопряженных собственных чисел. При этом предположении получены условия существования в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки бесконечного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Ключевые слова: многомерный диффеоморфизм, гиперболическая точка, нетрансверсальная гомоклиническая точка, устойчивость.

В работе рассматривается диффеоморфизм многомерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предполагается, что среди собственных чисел матрицы Якоби диффеоморфизма в точке нуль имеются комплексные. Основная задача — показать, что произвольная окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки может содержать бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Из работ Ш. Ньюхауса, Б. Ф. Иванова, Л. П. Шильникова и других авторов [1–3] следует, что при определенном способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым окрестность гомоклинической точки может содержать бесконечное множе-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00452).

ство устойчивых периодических точек, но хотя бы один из характеристических показателей этих точек стремится к нулю с ростом периода. В статье [4] были получены условия, наложенные, прежде всего, на характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым, при которых произвольная окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки двумерного диффеоморфизма содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Пример диффеоморфизма плоскости с такими свойствами был приведен в книге [5].

В работе [6] рассматривается диффеоморфизм многомерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. При этом предполагается, что все собственные числа матрицы Якоби в начале координат являются действительными числами. В этом предположении были получены условия существования в окрестности гомоклинической точки счетного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В статье [7] рассматривается трехмерный диффеоморфизм с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. При этом предполагается, что у матрицы Якоби в начале координат имеются комплексно сопряженные собственные числа. В работе приведены условия, при которых в окрестности гомоклинической точки лежит счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Предлагаемая работа является продолжением работ [6, 7].

Пусть f — диффеоморфизм $(2n+1)$-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, а именно $f : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, $f(0) = 0$, $n > 1$. В дальнейшем считаем x скалярной переменной, а y — векторной, точнее $y = col(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$. Предположим, что диффеоморфизм f линеен в некоторой ограниченной окрестности начала координат V, точнее, если $(x, y) \in V$, то

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\Omega = diag[\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n], \quad \Omega_j = \begin{pmatrix} \mu_j \cos(2\pi\theta_j) & -\mu_j \sin(2\pi\theta_j) \\ \mu_j \sin(2\pi\theta_j) & \mu_j \cos(2\pi\theta_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$0 < \lambda < 1 < \mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_n,$$

$$\theta_j \ne \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$\lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n)^2 < 1. \tag{2}$$

Пусть $\mu = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n)^2$.

Ясно, что λ, $\mu_j e^{\pm i 2\pi\theta_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, — собственные числа матрицы $Df(0)$.

Предположим, что

$$\theta_j = \frac{r_j}{s_j} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{-\tau_k^{(j)}}, \tag{3}$$

где $r_j \in \mathbb{Z}$, $s_j \in \mathbb{N}$, $\xi_j \in \mathbb{N}$, $\xi_j > \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а $\tau_k^{(j)}$ — такие последовательности натуральных чисел, что

$$\tau_1^{(j)} = 1,$$

$$\tau_{k+1}^{(j)} \geq s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_n \xi_1^{\tau_k^{(1)}} \xi_2^{\tau_k^{(2)}} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\tau_k^{(n)}} + k \sum_{l=1}^{n} \tau_k^{(l)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Определим

$$m_k = s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_n \xi_1^{\tau_k^{(1)}} \xi_2^{\tau_k^{(2)}} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\tau_k^{(n)}}. \tag{5}$$

Ясно, что последовательность m_k является такой последовательностью натуральных чисел, что $m_k > k$ при любых k и

$$\lim_{k \to +\infty} (m_{k+1} - m_k) = +\infty.$$

Лемма 1. *Пусть числа θ_j заданы формулами (3), последовательности $\tau_k^{(j)}$ удовлетворяют неравенствам (4), последовательность m_k задана условиями (5), тогда существуют такие положительные A, η, что при любых k и $j = 1, 2, \ldots, n$*

$$|\mu_j^{m_k} \sin(2\pi \theta_j m_k)| \leq A \mu^{-\eta m_k}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть

$$\chi_k^{(j)} = m_k \left(\frac{r_j}{s_j} + \sum_{l=1}^{k} \xi_j^{-\tau_l^{(j)}} \right),$$

$$z_k = k \sum_{l=1}^{n} \tau_k^{(l)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что $\chi_k^{(j)} \in \mathbb{Z}$.

Из условий (3), (4) следует

$$0 < \theta_j - \frac{\chi_k^{(j)}}{m_k} = \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_j^{-\tau_l^{(j)}} = \xi_j^{-\tau_{k+1}^{(j)}} \sum_{l=0}^{\infty} \xi_j^{-(\tau_{k+l+1}^{(j)} - \tau_{k+1}^{(j)})} \leq \xi^{-\tau_{k+1}^{(j)}} \sum_{l=0}^{\infty} \xi_j^{-l} = \xi^{-\tau_{k+1}^{(j)}} \frac{\xi_j}{\xi_j - 1},$$

откуда имеем

$$\left| \mu_j^{m_k} \sin(2\pi \theta_j m_k) \right| \leq \left| \mu_j^{m_k} \sin\left(2\pi \left(\theta_j - \frac{\chi_k^{(j)}}{m_k} \right) m_k \right) \right| \leq \mu_j^{m_k} 2\pi \xi^{-\tau_{k+1}^{(j)}} \frac{\xi_j}{\xi_j - 1}.$$

Используя (4), получим

$$\left| \mu_j^{m_k} \sin(2\pi \theta_j m_k) \right| \leq 2\pi \frac{\xi_j}{\xi_j - 1} \left(\frac{\mu_j}{\xi_j} \right)^{m_k} m_k \xi_j^{-z_k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из последних неравенств следуют условия (6).

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что числа θ_j являются иррациональными.

Известно [8], что число z называется *лиувиллевым*, если оно иррационально и для любого натурального k существуют целые p, q $(q > 1)$ такие, что

$$0 < \left| z - \frac{p}{q} \right| < q^{-k}.$$

Ясно, что числа θ_j являются лиувиллевыми.

Как обычно, через $W^s(0)$, $W^u(0)$ обозначим устойчивое и неустойчивое многообразия точки нуль. Известно, что устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки диффеоморфизма f определяются как

$$W^s(0) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{2n+1} : \lim_{k \to +\infty} \parallel f^k(w) \parallel = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{2n+1} : \lim_{k \to +\infty} \parallel f^{-k}(w) \parallel = 0 \right\},$$

где f^k, f^{-k} — степени диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Предполагается наличие гомоклинической точки, а именно: в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий лежит отличная от нуля точка u, причем она является точкой касания этих многообразий.

Из определения гомоклинической точки следуют равенства

$$\lim_{k \to +\infty} \parallel f^k(u) \parallel = \lim_{k \to +\infty} \parallel f^{-k}(u) \parallel = 0.$$

Пусть u_1 и u_2 — две такие точки из орбиты гомоклинической точки, что их координаты имеют вид $u_1 = (0, y^0)$, где $y^0 = col(y_1^0, y_2^0, \dots, y_{2n}^0)$, $u_2 = (x^0, 0)$. Предположим, что справедливо включение

$$V_1 = \left\{ (x, y) : |x| < \lambda^{-1} |x^0|, \parallel y \parallel < \mu \parallel y^0 \parallel \right\} \subset V. \tag{7}$$

Предположим, что

$$x^0,\, y_j^0 > 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \tag{8}$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число ω такое, что $f^\omega(u_1) = u_2$. Пусть U — выпуклая окрестность точки u_1 такая, что $U \subset V_1$, $f^\omega(U) \subset V_1$ и множества U, $f(U)$, $f^2(U)$,…,$f^\omega(U)$ попарно не пересекаются. Обозначим через L сужение $f^\omega \mid_U$. Ясно, что L — отображение класса C^1, а матрица $DL(0)$ невырожденная. Предположим, что отображение L имеет вид

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x^0 + ax + B(y - y^0) + \varphi(x, y - y^0) \\ Cx + D(y - y^0) + g(y - y^0) + \psi(x) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $B = (b_1, b_2, \dots, b_{2n})$, $C = col(c_1, c_2, \dots, c_{2n})$, $D = \{d_{ij}\}$ — квадратная матрица порядка $2n$ такая, что $d_{ij} = 0$ при $i \le j$, φ — функция $(2n+1)$ переменной, ψ — вектор-функция одной переменной, g — вектор-функция $2n$ переменных, все эти функции определены в окрестности начала координат и являются функциями класса C^1. Предположим, что эти функции равны нулю вместе со своими производными первого порядка в начале координат. Пусть производные первого порядка функций φ, ψ ограничены единицей в окрестности U. Ясно, что

$$DL(0) = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$b_1 d_{12} d_{23} \cdot \ \ldots \ \cdot d_{(2n-1)2n} c_{2n} > 0. \tag{10}$$

Ясно, что

$$\det D = 0, \quad \det DL(0) > 0.$$

Таким образом, точка u_2 является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

Основная цель предлагаемой работы — показать, что при определенных условиях произвольно малая окрестность точки u_1 содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В работе [6] показано, что окрестность точки u_1 может содержать бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями при условии, что все собственные числа матрицы $Df(0)$ действительны. Это предположение существенно использовалось при доказательстве теоремы из [6]. В работе [7] рассматривался диффеоморфизм трехмерного пространства в себя и предполагалось, что матрица $Df(0)$ имеет пару комплексно сопряженных собственных чисел. Были получены условия, при которых произвольно малая окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Предлагаемая работа является обобщением работы [7] на случай многомерного диффеоморфизма.

Характер касания $W^s(0)$, $W^u(0)$ в точке u_2 определяется свойствами функции g. Для того чтобы сформулировать эти свойства, введем в рассмотрение следующие последовательности. Пусть σ_k, ε_k — положительные, стремящиеся к нулю последовательности, причем последовательность σ_k убывает.

Предположим, что для любого k выполняется неравенство

$$\sigma_k - \varepsilon_k - \sigma_{k+1} - \varepsilon_{k+1} > 0. \tag{11}$$

Считаем, что последовательность m_k, введенная в (5), такова, что

$$(\lambda\mu)^{m_k} < \varepsilon_k \tag{12}$$

для любого k.

Запишем координаты вектор-функций g, ψ как

$$g(y - y^0) = col\left(g_1(y - y^0), g_2(y - y^0), \ldots, g_{2n}(y - y^0)\right),$$

$$\psi(x) = col\left(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{2n}(x)\right).$$

Пусть y_k — такая последовательность векторов $y_k = col\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(2n)}\right)$, что

$$y_k^{(1)} = y_1^0 + \sigma_k, \quad y_k^{(j)} = y_j^0 + \lambda^{m_k}, \quad j = 2, 3, \ \ldots \ , 2n.$$

Обозначим

$$x_k = \lambda^{m_k}\left(x^0 + B\left(y_k - y^0\right)\right)\left(1 - a\lambda^{m_k}\right)^{-1},$$

$$\gamma_k = \Omega^{-m_k} y_k - Cx_k - D\left(y_k - y^0\right), \tag{13}$$

где x_k — последовательность действительных чисел, а γ_k — последовательность $(2n)$-мерных векторов. В дальнейшем координаты векторов γ_k обозначаются как $\gamma_k^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Кроме того, пусть $\Delta_k^{(1)}, \Delta_k^{(2)}, \ldots, \Delta_k^{(2n)}$ и δ_k — такие последовательности, что

$$\Delta_k^{(1)} = \varepsilon_k,$$

$$\Delta_k^{(2)} = \varepsilon_k \left(\mu_1\right)^{-m_k} \left(8n \parallel D \parallel\right)^{-1},$$

$$\Delta_k^{(2j-1)} = \varepsilon_k \left(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{j-1}\right)^{-2m_k} \left(8n \parallel D \parallel\right)^{2-2j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\Delta_k^{(2j)} = \varepsilon_k \left(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{j-1}\right)^{-2m_k} \left(\mu_j\right)^{-m_k} \left(8n \parallel D \parallel\right)^{1-2j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\delta_k = \max\left[12n\lambda^{m_k}\sigma_k, 12n\lambda^{m_k}\left(1+ \parallel B \parallel \varepsilon_k\right)\right].$$

Предположим, что существуют такие постоянные $0 < \bar{\lambda} < \lambda$, $\alpha > 1$, что функция g и ее производные первого порядка удовлетворяют при любом k следующим условиям:

$$\left| g_1\left(y_k - y^0\right) - \gamma_k^{(1)} \right| < 0.25\varepsilon_k \left(\mu_1\right)^{-m_k},$$

$$\left| g_j\left(y_k - y^0\right) - \gamma_k^{(j)} \right| < \bar{\lambda}^{m_k}, \quad j = 2, 3, \ldots, 2n, \tag{14}$$

$$\left| \frac{\partial g_i\left(y - y^0\right)}{\partial\left(y_j - y_j^0\right)} \right| < \mu^{-\alpha m_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{15}$$

где

$$y_1 \in \left[y_1^0 + \sigma_k - \varepsilon_k, y_1^0 + \sigma_k + \varepsilon_k\right],$$

$$y_l \in \left[y_l^0 + \lambda^{m_k} - \Delta_k^{(l)}, y_l^0 + \lambda^{m_k} + \Delta_k^{(l)}\right], \quad l = 2, 3, \ldots, 2n.$$

Условия (14), (15) определяют способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым в точке u_2.

Определим последовательность множеств

$$U_k = \left\{(x, y) : |x - x_k| < \delta_k, \quad |y_j - y_k^{(j)}| < \Delta_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n\right\}.$$

Ясно, что $U_k \subset U$ при достаточно больших k.

Теорема 1. *Пусть дан диффеоморфизм f $(2n+1)$-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия* (1)–(5), (7)–(15). *Тогда произвольная окрестность точки u_1 содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы, тогда справедливы следующие включения:*

$$f^{m_k} L(\bar{U}_k) \subset U_k, \tag{16}$$

где $\bar{U}_k$ — замыкание U_k.

Доказательство леммы для случая двумерного диффеоморфизма приведено в [4], в рассматриваемом случае доказательство проводится аналогично.

Доказательство теоремы. Из (16) следует, что при любом k (может быть, начиная с некоторого номера) U_k содержит неподвижную точку отображения $f^{m_k}L$, которая является периодической точкой диффеоморфизма f с периодом $\omega + m_k$. Обозначим эти точки и их координаты следующим образом:

$$w_k = (\bar{x}_k, y^0 + \bar{y}_k),$$

где $\bar{y}_k = col\left(\bar{y}_k^{(1)}, \bar{y}_k^{(2)}, \ldots, \bar{y}_k^{(2n)}\right)$.

Для того чтобы оценить характеристические показатели точек w_k, надо оценить собственные числа матрицы $Df^{m_k}L(w_k)$.

Введем обозначения:

$$a(k) = a + \frac{\partial\varphi(w_k)}{\partial x},$$

$$B(k) = B + \frac{\partial\varphi(w_k)}{\partial y},$$

$$C(k) = C + \frac{d\psi(\bar{x}_k)}{dx},$$

$$G(k) = \frac{\partial g(\bar{y}_k)}{\partial\,(y - y^0)},$$

где $B(k) = (b_1(k), b_2(k), \ldots, b_{2n}(k))$, $C(k) = col\,(c_1(k), c_2(k), \ldots, c_{2n}(k))$, а $G(k) = \{G_{ij}(k)\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, — квадратная матрица порядка $2n$.

Из (15) следует

$$|G_{ij}(k)| < \mu^{-\alpha m_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Таким образом, получаем

$$Df^{m_k}L(w_k) = \begin{pmatrix} \lambda^{m_k}a(k) & \lambda^{m_k}B(k) \\ \Omega^{m_k}C(k) & \Omega^{m_k}\,(G(k) + D) \end{pmatrix}.$$

Пусть $P(\rho)$ — характеристический многочлен матрицы $Df^{m_k}L(w_k)$, а именно

$$P(\rho) = \sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^{j+1} P_j(k)\rho^{2n+1-j}.$$

Известно, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы (при $j = 1, 2, \ldots, 2n+1$) представляют собой сумму всех возможных главных миноров соответствующего порядка. (*Главным минором матрицы* называется такой минор, у которого номера выбранных строк совпадают с номерами выбранных столбцов, а именно, любому фиксированному набору из j строк матрицы, где $1 \le j \le 2n+1$, соответствует единственный набор столбцов с такими же номерами. На пересечении этих строк и столбцов лежат элементы матрицы, которые представляют собой главный минор матрицы порядка j.) Ясно, что для любого j количество главных миноров равно числу сочетаний C_{2n+1}^{j}.

Пусть $\Theta_l^{(j)}$ — главный минор порядка j матрицы $Df^{m_k}L(w_k)$. Коэффициенты характеристического многочлена этой матрицы имеют вид

$$P_0(k) = 1,$$

$$P_j(k)=\sum_{(l)}\Theta_l^{(j)},\quad j=1,2,\ldots,2n+1. \tag{17}$$

Суммирование ведется по числу различных главных миноров порядка j.

Ясно, что

$$P_1(k)=TrDf^{m_k}L(w_k),$$
$$P_{2n+1}(k)=\det Df^{m_k}L(w_k),$$

Из условий (2), (6), (15) следует, что существует величина $\beta>0$ такая, что

$$|P_j(k)|<\mu^{-\beta m_k},\quad j=1,2,\ \ldots\ ,2n+1. \tag{18}$$

С другой стороны, $P(\rho)$ можно представить как

$$P(\rho)=-\prod_{j=1}^{2n+1}\left(\rho-\rho_j(k)\right),$$

где $\rho_j(k)$, $j=1,2,\ldots,2n+1,$ — корни характеристического многочлена.

Из последнего равенства следует, что

$$P_j(k)=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_j)}\rho_{i_1}(k)\rho_{i_2}(k)\ldots\rho_{i_j}(k),\quad j=1,2,\ldots,2n+1, \tag{19}$$

суммирование ведется по всем возможным наборам индексов i_1, i_2,. . . ,i_j, выбранным из конечной последовательности индексов $1,2,\ \ldots\ ,2n{+}1$. Число слагаемых в сумме, стоящей в правой части формулы (19), равно числу сочетаний C_{2n+1}^j.

Ясно, что

$$P_1(k)=\sum_{j=1}^{2n+1}\rho_j(k),$$

$$P_{2n+1}(k)=\prod_{j=1}^{2n+1}\rho_j(k).$$

Пусть $\bar\beta=\frac{\beta}{2n+1}$.

Применяя методы, описанные в [6], с учетом условий (6), (15), (17)–(19) можем заключить, что существует такая, не зависящая от k положительная постоянная T, что

$$|\rho_j(k)|\le T\mu^{-\bar\beta m_k},\quad j=1,2,\ldots,2n+1.$$

Последние неравенства справедливы при достаточно больших номерах k.

Известно, что характеристические показатели периодических точек диффеоморфизма f определяются как

$$v_j(k)=(\omega+m_k)^{-1}\ln|\rho_j(k)|,\quad j=1,2,\ldots,2n+1,$$

откуда получим

$$v_j(k)\le(\omega+m_k)^{-1}\left(\ln T-\bar\beta m_k\ln\mu\right)\le-0.5\bar\beta\ln\mu,\quad j=1,2,\ldots,2n+1.$$

Последние неравенства справедливы для всех номеров k, начиная с некоторого номера.

Теорема доказана.

Следующие рассуждения показывают, что класс функций, удовлетворяющих условиям (14), (15), достаточно широк.

Пусть
$$\max\left[\lambda\mu, (\mu_1)^{-1}\right] < \sigma < 1, \tag{20}$$
где λ, μ, μ_1 удовлетворяют условиям (2).

Определим
$$p_k = \sigma^{k+1} + (\lambda\mu)^{k+1},$$
$$q_k = \sigma^k - (\lambda\mu)^k.$$

Ясно, что $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = \lim\limits_{k\to+\infty} q_k = 0$, и при достаточно больших номерах k
$$q_k > p_k > 0.$$

Положим
$$\sigma_k = \sigma^k, \quad \varepsilon_k = (\lambda\mu)^k. \tag{21}$$
При таких определениях неравенства (11), (12) справедливы.

Пусть $h_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, — такие непрерывные на $[-q_1, q_1]$ функции, что
$$h_j(t) = \begin{cases} 4\left(\gamma_k^{(j)} - \gamma_{k+1}^{(j)}\right)(q_k - p_k)^{-2}(t - p_k), \quad t \in [p_k, 0.5(p_k+q_k)], \\ 4\left(\gamma_k^{(j)} - \gamma_{k+1}^{(j)}\right)(q_k - p_k)^{-2}(q_k - t), \quad t \in [0.5(p_k+q_k), q_k], \\ 0, \quad t \in [q_{k+1}, p_k], \end{cases} \tag{22}$$
где последовательность векторов γ_k определяется формулами (13). Непрерывность функций $h_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, в точке нуль следует из условий (5), (20). Ясно, что $h_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (20)–(22), *а вектор-функция* $g(t) = col\,(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{2n}(t))$ *определяется в окрестности точки* 0 *как*
$$g_j(t) = \int\limits_0^t h_j(s)ds, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$
Тогда непрерывно дифференцируемая функция $g(t)$ *удовлетворяет следующим соотношениям:*
$$g_j(t) = \gamma_k^{(j)}, \quad \frac{dg_j(t)}{dt} = 0$$
при любых k, $t \in [\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k]$ *и* $j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Доказательство. Ясно, что при любых k, j выполняется равенство
$$\int\limits_{p_k}^{q_k} h_j(s)ds = \gamma_k^{(j)} - \gamma_{k+1}^{(j)}.$$

Зафиксируем k и j. Пусть $t \in [\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k]$, тогда
$$g_j(t) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\gamma_{k+l}^{(j)} - \gamma_{k+l+1}^{(j)}\right).$$

Частные суммы последнего ряда имеют вид

$$\sum_{l=0}^{r} \left(\gamma_{k+l}^{(j)} - \gamma_{k+l+1}^{(j)} \right) = \gamma_k^{(j)} - \gamma_{k+r+1}^{(j)}.$$

Из последних равенств и определения функций $h_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть дан диффеоморфизм f $(2n+1)$-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия* (1)–(5), (7)–(10), (13), *пусть вектор-функция g, определенная в* (9), *является функцией только одной переменной, а именно $g_j(y - y^0) = g_j\left(y_1 - y_1^0\right)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$. Также пусть вектор-функция g удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда произвольная окрестность точки u_1 содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Литература

1. *Иванов Б. Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.
2. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Доклады академии наук. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
3. *Newhouse Sh.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. V. 12. P. 9–18.
4. *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 20–26.
5. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
6. *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 3–13.
7. *Васильева Е. В.* К вопросу устойчивости периодических точек трехмерных диффеоморфизмов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4(62). Вып. 2. С. 193–200.
8. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974. 158 с.

Статья поступила в редакцию 3 февраля 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, доц.; ekvas1962@mail.ru

Stability of periodic points of diffeomorphisms of multidimensional space

E. V. Vasilieva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasilieva E. V. Stability of periodic points of diffeomorphisms of multidimensional space. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 356–366. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.302

We study a diffeomorphism of a multidimensional space into itself with a hyperbolic fixed point at the origin and a non-transversal homoclinic to it point. From the works of Sh. Newhouse, B. F. Ivanov, L. P. Shilnikov and other authors it follows that under a certain method of tangency of the stable and unstable manifolds, a neighborhood of a non-transversal homoclinic point can contain an infinite set of stable periodic points, but at least one of the characteristic exponents of these points tends to zero with increasing period. In this paper, we study diffeomorphisms for which the method of tangency of the stable and unstable manifolds differs from the case studied in the works of the above-mentioned authors. This paper is a continuation of the author's previous works, in which diffeomorphisms were studied, whose Jacobi matrices at the origin had only real eigenvalues. Conditions were obtained under which the neighborhood of a non-transversal homoclinic point of such diffeomorphism contains an infinite set of stable periodic points with characteristic separated from zero. In this paper, it is assumed that the Jacobi matrix of the original diffeomorphism at the origin has not only real eigenvalues, but also a non-unique pair of complex conjugate eigenvalues. Under this assumption, conditions are obtained for the presence in the neighborhood of a non-transversal homoclinic point of an infinite set of stable periodic points with characteristic exponents separated from zero.

Keywords: multidimensional diffeomorphism, hyperbolic point, non-transversal homoclinic point, stability.

References

1. Ivanov B. F., "Stability of the Trajectories That Do Not Leave the Neighborhood of a Homoclinic Curve", *Differ. Uravn.* **15**(8), 1411–1419 (1979) [in Russian].

2. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P., "Dynamical Phenomena in Mutidimensional Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Poincare Curve", *Doklady Mathematics* **17**(3), 410–415 (1993).

3. Newhouse Sh., "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks", *Topology* **12**, 9–18 (1973).

4. Vasil'eva E. V., "Stable Periodic Points of Two-dimensional C^1-Diffeomorphisms", *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **40**(2), 107–113 (2007).

5. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977, 304 p.) [in Russian].

6. Vasil'eva E. V., "Diffeomorphisms of Multidimensional Space with Infinite Set of Stable Periodic Points", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **45**(3), 115–124 (2012).

7. Vasil'eva E. V., "To the Question of Stability of Periodic Points of Three-dimensional Diffeomorphisms", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **50**(2), 111–116 (2016).

8. Oxtoby J., *Measure and Category* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971, 160 p.).

Author's information:

Ekaterina V. Vasilieva — ekvas1962@mail.ru