

Условия существования двух предельных циклов в системе с гистерезисной нелинейностью*

Т. Е. Звягинцева, В. А. Плисс

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Звягинцева Т. Е., Плисс В. А.* Условия существования двух предельных циклов в системе с гистерезисной нелинейностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 402–410. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.304>

В статье рассматривается двумерная система автоматического управления, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент общего вида. В работе приведены достаточные условия существования в системе по крайней мере двух предельных циклов. Для доказательства существования циклов на фазовом многообразии строятся три вложенных друг в друга замкнутых контура, которые «сшиваются» из кусков линий уровня различных функций Ляпунова. Внутренний контур траектории системы пересекают «снаружи внутрь», средний контур — «изнутри наружу». Внешний контур прошивается траекториями системы «снаружи внутрь». Существование таких контуров доказывает наличие в системе по крайней мере двух предельных циклов. Статья является продолжением ранее опубликованной работы авторов «Условия глобальной устойчивости одной системы с гистерезисной нелинейностью», в которой сформулированы условия глобальной устойчивости такой системы.

Ключевые слова: система с гистерезисом, предельный цикл, второй метод Ляпунова.

Введение. При изучении большого числа прикладных задач в качестве математических моделей рассматриваются системы дифференциальных уравнений с различными гистерезисными нелинейностями. Такие системы появляются при исследовании проблем теории автоматического управления, а также во многих физических, механических, химических и инженерных задачах. Изучению систем с гистерезисом в последние десятилетия посвящено большое количество работ (например, [1–10]), в которых исследуются важные для практического применения вопросы устойчивости и поведения решений таких систем. В настоящее время интерес к гистерезисным системам возрос в связи с их применением для описания процессов, происходящих во многих современных технических устройствах. Обширную библиографию по данной тематике можно найти, например, в монографиях [7, 10].

В данной работе рассматривается двумерная система, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент общего вида. В статье приведены условия, при выполнении которых в системе существуют два предельных цикла. Для доказательства существования циклов применяется второй метод Ляпунова.

Статья является продолжением работы [11], в которой описано фазовое пространство такой системы, представляющее собой многообразие с краем, и сформулированы условия глобальной устойчивости системы.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

Постановка задачи. Рассмотрим двумерную систему, содержащую один нелинейный гистерезисный элемент,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi(\sigma(t)), \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma = ay + bx$, $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\varphi(\sigma(t))$ – гистерезисная нелинейность с характеристикой, представленной на рис. 1.

Гистерезисная функция $\varphi(\sigma(t))$ состоит из двух ветвей однозначных функций:

$$\varphi(\sigma(t)) = \begin{cases} \varphi_1(\sigma(t)), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2(\sigma(t)), & \text{если } \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$\delta > 0$, $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ – дифференцируемые функции, $\varphi_1(\sigma) = -\varphi_2(-\sigma)$ для всех $\sigma \geq -\delta$, $\varphi_1(\pm\delta) = \varphi_2(\pm\delta)$. Направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: фазовая точка $(\sigma(t), \varphi(\sigma(t)))$ при $\sigma(t) \in (-\delta, \delta)$ движется по кривой $\varphi = \varphi_1(\sigma)$, если $\sigma(t)$ убывает с ростом t , и по кривой $\varphi = \varphi_2(\sigma)$, если $\sigma(t)$ возрастает с ростом t . Переход точки с ветви $\varphi_1(\sigma)$ на ветвь $\varphi_2(\sigma)$ и наоборот, с ветви $\varphi_2(\sigma)$ на ветвь $\varphi_1(\sigma)$, возможен только при $\sigma(t) = \pm\delta$.

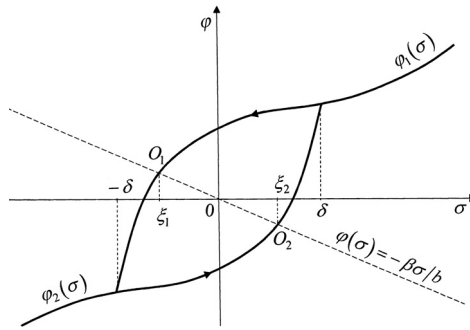


Рис. 1.

Известным преобразованием (см., например, [11]) систему (1) можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f(\sigma), \\ \dot{u} = -g(\sigma), \end{cases} \quad (2)$$

где $f(\sigma)$, $g(\sigma)$ – гистерезисные функции:

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_1(\sigma), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ f_2(\sigma), & \text{если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \quad g(\sigma) = \begin{cases} g_1(\sigma), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ g_2(\sigma), & \text{если } \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$$f_j = a(\alpha\sigma + a\varphi_j(\sigma)), \quad g_j = a^2(\beta\sigma + b\varphi_j(\sigma)), \quad j = 1, 2.$$

Из сделанных выше предположений относительно функции $\varphi(\sigma)$ следует, что $f_1(\pm\delta) = f_2(\pm\delta)$, $g_1(\pm\delta) = g_2(\pm\delta)$ и $f_1(\sigma) = -f_2(-\sigma)$, $g_1(\sigma) = -g_2(-\sigma)$ для всех $\sigma \geq -\delta$.

Фазовая поверхность P системы (2) – многообразие с краем, состоящее из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

На листе $P_1 = \{(\sigma, u) : \sigma \geq -\delta, \dot{\sigma}|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} = (u - f_1(\sigma))|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \leq 0\}$ система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f_1(\sigma), \\ \dot{u} = -g_1(\sigma), \end{cases} \quad (3)$$

на листе $P_2 = \{(\sigma, u) : \sigma \leq \delta, \dot{\sigma}|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} = (u - f_2(\sigma))|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \geq 0\}$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f_2(\sigma), \\ \dot{u} = -g_2(\sigma). \end{cases} \quad (4)$$

По лучу $L_1 = \{(\sigma, u) : \sigma = -\delta, (u - f_1(\sigma))|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \leq 0\}$ фазовая точка (σ, u) переходит с листа P_1 на лист P_2 , а по лучу $L_2 = \{(\sigma, u) : \sigma = \delta, (u - f_2(\sigma))|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \geq 0\}$ — с листа P_2 на лист P_1 .

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_j = \{(\sigma, u) : \sigma \in (-\delta, \delta), (u - f_j(\sigma))|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} = 0\}$, $j = 1, 2$, — край многообразия P .

Решением системы (2) с начальными данными $t = \tau_0, (\sigma_0, u_0) \in P_1$ является решение системы (3) с этими же начальными данными. Траектория этого решения при $t > \tau_0$ либо стремится при $t \rightarrow +\infty$ к положению равновесия O_1 системы (3), либо достигает в конечный момент времени множества $\Gamma_1 \setminus O_1$, либо при некотором $t = \tau_1 > \tau_0$ выходит на луч L_1 в точке (σ_1, u_1) . В последнем случае решение (2) продолжается при $t > \tau_1$ на лист P_2 и является решением системы (4) с начальными данными (τ_1, σ_1, u_1) . Аналогично определяется решение системы (2) с начальными данными $t = \tau_0, (\sigma_0, u_0) \in P_2$.

В этой работе рассмотрим один из частных случаев возможного поведения функций $f(\sigma)$ и $g(\sigma)$. Будем предполагать, что, во-первых, существует единственное $\xi_1 \in (-\delta, \delta)$ такое, что

$$g_1(\xi_1) = 0, \quad g_1(\sigma) < 0 \text{ при } \sigma \in (-\delta, \xi_1), \quad g_1(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \in (\xi_1, +\infty), \quad (5)$$

и, во-вторых, существуют значения $\bar{\sigma}$ и $\bar{\bar{\sigma}}$ такие, что $-\delta < \bar{\sigma} < \delta < \bar{\bar{\sigma}}$,

$$f'_1(\bar{\sigma}) = 0, \quad f'_1(\bar{\bar{\sigma}}) = 0, \quad f'_1(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \in (-\delta, \bar{\sigma}) \cup (\bar{\bar{\sigma}}, +\infty), \quad f'_1(\sigma) < 0 \text{ при } \sigma \in (\bar{\sigma}, \bar{\bar{\sigma}}). \quad (6)$$

В силу равенств $f_1(\sigma) = -f_2(-\sigma)$, $g_1(\sigma) = -g_2(-\sigma)$ аналогичные условиям (5), (6) требования выполнены и для функций $f_2(\sigma)$, $g_2(\sigma)$.

Согласно условию (5) существует по одной особой точке на каждом из листов фазового пространства системы (2) (рис. 2). Обозначим через O_j положение равновесия системы (2) на листе P_j . Особая точка O_j имеет координаты (ξ_j, η_j) , где $g_j(\xi_j) = 0$, $\eta_j = f_j(\xi_j)$ ($j = 1, 2$).

Условие (6) накладывает ограничение на поведение функций $f_j(\sigma)$, то есть на скорость роста функций $\varphi_j(\sigma)$, $j = 1, 2$.

Теорема о существовании двух предельных циклов в системе (2). Введем обозначение: $S = 2 \int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma) d\sigma$. Легко показать [11], что S — площадь петли гистерезиса, умноженная на коэффициент a^2b .

Теорема. При сделанных выше предположениях (5), (6), если выполнены следующие условия:

$$f_1(\xi_1) \leq f_1(\delta), \quad (7)$$

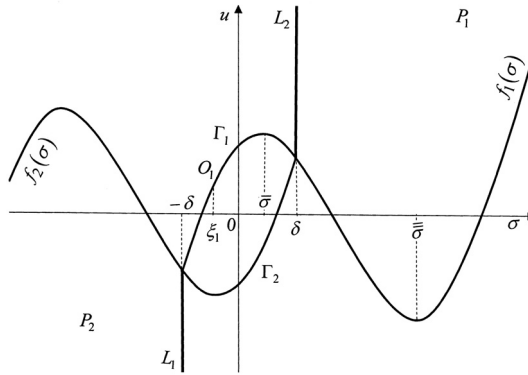


Рис. 2.

$$S \leq (f_1(\xi_1) + f_1(\delta))^2, \quad (8)$$

величина $f_1(\bar{\sigma})$ достаточно мала, то есть верно неравенство

$$\left(\sqrt{(f_1(\delta) - f_1(\bar{\sigma}))^2 + 2 \int_{\delta}^{\bar{\sigma}} g_1(\sigma) d\sigma} - 2f_1(\delta) \right)^2 + S > 2 \int_{\delta}^{\bar{\sigma}} g_1(\sigma) d\sigma, \quad (9)$$

и существует значение $\sigma^* > \bar{\sigma}$ такое, что

$$f_1(\sigma^*) > -f_1(\bar{\sigma}), \quad (10)$$

то в системе (2) существует по крайней мере два предельных цикла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Для доказательства теоремы построим на многообразии P три вложенных друг в друга замкнутых контура: внутренний контур, который траектории системы (2) пересекают «снаружи внутрь», средний контур, который траектории пересекают «изнутри наружу», и внешний контур, который траекториями системы (2) прошивается «снаружи внутрь». Существование таких контуров доказывает наличие по крайней мере двух предельных циклов в системе.

Контур на листе P_1 будем «сшивать» из кусков линий уровня следующих функций Ляпунова.

А. Функция

$$W(\sigma, u) = \frac{1}{2} (u - f_1(\sigma))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} g_1(\tau) d\tau \quad (11)$$

равна нулю в точке $(\xi_1, f_1(\xi_1))$ и положительна во всех остальных точках листа P_1 . Производная функции (11) в силу системы (3)

$$\dot{W}(\sigma, u) = -f_1'(\sigma) (u - f_1(\sigma))^2$$

меньше либо равна 0 на множестве $\Omega = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \mu \leq \sigma \leq \eta\}$, если $f_1'(\sigma) \geq 0$ на отрезке $[\mu, \eta]$, и больше либо равна 0 на этом множестве, если $f_1'(\sigma) \leq 0$ на $[\mu, \eta]$.

В. Функция

$$V_{\sigma_0}(\sigma, u) = \frac{1}{2} (u - f_1(\sigma_0))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} g_1(\tau) d\tau \quad (12)$$

равна нулю в точке $(\xi_1, f_1(\sigma_0))$ и положительна во всех остальных точках листа P_1 . Производная функции (12) в силу системы (3)

$$\dot{V}_{\sigma_0}(\sigma, u) = -g_1(\sigma)(f_1(\sigma) - f_1(\sigma_0))$$

меньше либо равна 0 на множестве $\Omega = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \mu \leq \sigma \leq \eta\}$, если $g_1(\sigma)(f_1(\sigma) - f_1(\sigma_0)) \geq 0$ на отрезке $[\mu, \eta]$, и положительна в противном случае.

Составляя контур, будем использовать краткую запись:

$$A(\sigma_1, u_1) \xrightarrow[\mu, \eta]{V} B(\sigma_2, u_2),$$

которая обозначает следующее. Часть контура, соединяющая точки $A(\sigma_1, u_1)$ и $B(\sigma_2, u_2)$, содержится в множестве $\Omega = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \mu \leq \sigma \leq \eta\}$ и является частью линии уровня функции Ляпунова $V(\sigma, u)$, проходящей через A и B .

1. Сначала построим внутренний контур, который траектории системы (2) пересекают «снаружи внутрь».

Из условия (7) следует, что на листе P_1 существует точка $(\sigma_1, 0)$ такая, что $\sigma_1 \in (\xi_1, \delta)$ и $f_1(\sigma_1) = f_1(\delta)$.

Определим на листе P_1 точку $(\sigma_2, 0)$, где $\sigma_2 \in (\delta, \bar{\sigma})$, равенством

$$f_1(\sigma_2) = f_1(\delta) - \frac{1}{2}\sqrt{(f_1(\delta) + f_1(\xi_1))^2 - S}. \quad (13)$$

Не трудно показать, используя неравенство (9), что

$$f_1(\bar{\sigma}) < f_1(\delta) - \frac{1}{2}\sqrt{(f_1(\delta) + f_1(\xi_1))^2 - S} < f_1(\delta).$$

Функция $f_1(\sigma)$ непрерывна и убывает на отрезке $[\delta, \bar{\sigma}]$, принимая значения от $f_1(\delta)$ до $f_1(\bar{\sigma})$, поэтому точка σ_2 , определенная равенством (13), существует.

Внутренний контур на листе P_1 строим по схеме (рис. 3):

$$A_1(\delta, f_1(\delta)) \xrightarrow[\delta, \sigma_2]{V_{\sigma_2}} B_1(\delta, u_1) \xrightarrow[\sigma_1, \delta]{V_{\xi_1}} C_1(\sigma_1, u_2) \xrightarrow[\xi_1, \sigma_1]{W} D_1(\xi_1, u_3) \xrightarrow[-\delta, \xi_1]{V_{\xi_1}} E_1(-\delta, u_4). \quad (14)$$

Производная каждой из функций Ляпунова в цепочке (14) отрицательна на соответствующем множестве Ω_j , $j = 1, 2, 3, 4$, поэтому линию $A_1B_1C_1D_1E_1$ на листе P_1 траектории системы (3) пересекают «снаружи внутрь».

При этом точка A_1 совпадает с началом луча L_2 ,

$$u_1 = f_1(\delta) - \sqrt{(f_1(\delta) + f_1(\xi_1))^2 - S},$$

$$\begin{aligned} (u_4 - f_1(\xi_1))^2 &= (u_3 - f_1(\xi_1))^2 + 2 \int_{-\delta}^{\xi_1} g_1(\sigma) d\sigma = \\ &= (u_2 - f_1(\delta))^2 + 2 \int_{-\delta}^{\sigma_1} g_1(\sigma) d\sigma = (u_1 - f_1(\delta))^2 + S = (f_1(\delta) + f_1(\xi_1))^2, \end{aligned}$$

и, следовательно, $u_4 = -f_1(\delta)$, то есть точка E_1 совпадает с началом луча L_1 .

Линию $A_1^*B_1^*C_1^*D_1^*E_1^*$ на листе P_2 , симметричную кривой $A_1B_1C_1D_1E_1$ относительно начала координат, траектории системы (4) тоже пересекают «снаружи внутрь» в силу симметрии поля. (Точка A_1^* совпадает с точкой E_1 , и точка E_1^* совпадает с точкой A_1 .) Замкнутый контур $A_1B_1C_1D_1A_1^*B_1^*C_1^*D_1^*A_1$ — искомый внутренний контур.

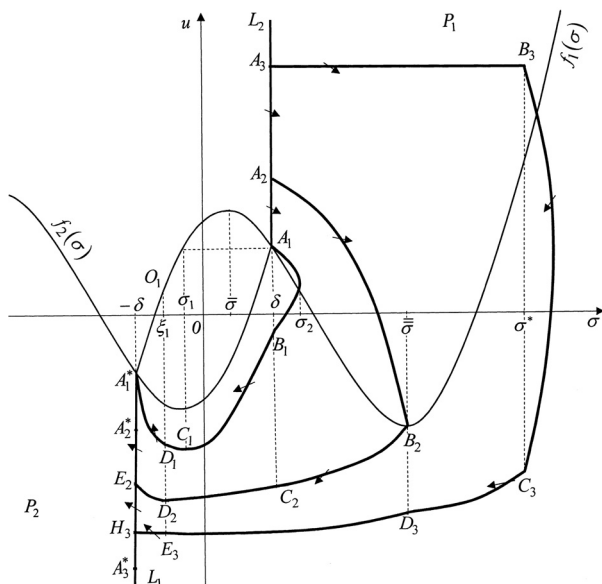


Рис. 3.

2. Построим средний контур, который траектории системы (2) пересекают «изнутри наружу». На листе P_1 строим кривую по следующей схеме (рис. 3):

$$A_2(\delta, v_1) \xrightarrow[\delta, \bar{\sigma}]{W} B_2(\bar{\sigma}, f_1(\bar{\sigma})) \xrightarrow[\delta, \bar{\sigma}]{V_{\delta}^{\bar{\sigma}}} C_2(\delta, v_2) \xrightarrow[\xi_1, \delta]{V_{\bar{\sigma}}^{\delta}} D_2(\xi_1, v_3) \xrightarrow[-\delta, \xi_1]{V_{-\delta}^{\xi_1}} E_2(-\delta, v_4). \quad (15)$$

Производная каждой из функций Ляпунова в цепочке (15) положительна на соответствующем множестве Ω_j , $j = 1, 2, 3, 4$, поэтому линию $A_2B_2C_2D_2E_2$ на листе P_1 траектории системы (3) пересекают «изнутри наружу».

При этом выполняются равенства

$$v_1 = f_1(\delta) + \sqrt{2 \int_{\delta}^{\bar{\sigma}} g_1(\sigma) d\sigma}, \quad v_2 = f_1(\delta) - \sqrt{(f_1(\bar{\sigma}) - f_1(\delta))^2 + 2 \int_{\delta}^{\bar{\sigma}} g_1(\sigma) d\sigma},$$

$$(v_4 + f_1(\delta))^2 = (v_3 + f_1(\delta))^2 + 2 \int_{-\delta}^{\xi_1} g_1(\sigma) d\sigma =$$

$$= \left(\sqrt{(v_2 - f_1(\bar{\sigma}))^2 + 2 \int_{\xi_1}^{\delta} g_1(\sigma) d\sigma} - f_1(\delta) - f_1(\bar{\sigma}) \right)^2 + 2 \int_{-\delta}^{\xi_1} g_1(\sigma) d\sigma.$$

Не трудно показать, что неравенство $v_4 \leq -v_1$ верно, если выполнено условие (9). Следовательно, точка E_2 лежит на луче L_1 ниже точки A_2^* с координатами $(-\delta, -v_1)$.

Линию $A_2^*B_2^*C_2^*D_2^*E_2^*$ на листе P_2 , симметричную кривой $A_2B_2C_2D_2E_2$ относительно начала координат, траектории системы (4) пересекают «изнутри наружу» в силу симметрии поля.

На отрезке $E_2A_2^* \subset L_1$ имеем следующее направление поля: $\dot{\sigma} < 0$, $\dot{u} > 0$; на симметричном отрезке $A_2E_2^* \subset L_2$: $\dot{\sigma} > 0$, $\dot{u} < 0$, поэтому построенный замкнутый контур $A_2B_2C_2D_2E_2A_2^*B_2^*C_2^*D_2^*E_2^*A_2$ является искомым средним контуром, который траектории системы (2) пересекают «изнутри наружу».

3. Построим внешний контур, который траектории системы (2) пересекают «снаружи внутрь». Сначала строим часть контура на листе P_1 .

Возьмем на луче L_2 точку $A_3(\delta, w_1)$, где w_1 достаточно велико: $w_1 > v_1$, $w_1 > f_1(\sigma^*)$, σ^* удовлетворяет неравенству (10).

Горизонтальный отрезок $A_3B_3 = \{(\sigma, w_1), \delta \leq \sigma \leq \sigma^*\} \subset P_1$, соединяющий точки $A_3(\delta, w_1)$ и $B_3(\sigma^*, w_1)$, траектории системы (3) пересекают «сверху вниз» (рис. 3), поскольку на этом отрезке $\dot{\sigma} > 0$, $\dot{u} < 0$.

Далее строим кривую $B_3C_3D_3E_3$ по схеме (рис. 3)

$$B_3(\sigma^*, w_1) \xrightarrow[\sigma^*, +\infty]{V_{\bar{\sigma}}} C_3(\sigma^*, w_2) \xrightarrow[\bar{\sigma}, \sigma^*]{W} D_3(\bar{\sigma}, w_3) \xrightarrow[\xi_1, \bar{\sigma}]{V_{\bar{\sigma}}} E_3(\xi_1, w_4). \quad (16)$$

Производная каждой из функций Ляпунова в цепочке (16) отрицательна на соответствующем множестве Ω_j , $j = 1, 2, 3$, поэтому линию $B_3C_3D_3E_3$ на листе P_1 траектории системы (3) пересекают «снаружи внутрь».

При этом выполняются равенства

$$w_2 = 2f_1(\sigma^*) - w_1,$$

$$(w_4 - f_1(\bar{\sigma}))^2 = (w_3 - f_1(\bar{\sigma}))^2 + 2 \int_{\xi_1}^{\bar{\sigma}} g_1(\sigma) d\sigma = (w_1 - f_1(\sigma^*))^2 + 2 \int_{\xi_1}^{\sigma^*} g_1(\sigma) d\sigma.$$

Горизонтальный отрезок $E_3H_3 = \{(\sigma, w_4), -\delta \leq \sigma \leq \xi_1\} \subset P_1$, соединяющий точки $E_3(\xi_1, w_4)$ и $H_3(-\delta, w_4) \in L_1$, завершает построение части контура на листе P_1 . Траектории системы (3) пересекают отрезок E_3H_3 «снизу вверх» (рис. 3), поскольку на этом отрезке $\dot{\sigma} < 0$, $\dot{u} > 0$.

Покажем, что $w_4 \geq -w_1$ при достаточно большом w_1 . Имеем

$$\begin{aligned} w_4 + w_1 &= f_1(\bar{\sigma}) + w_1 - \sqrt{(w_1 - f_1(\sigma^*))^2 + 2 \int_{\xi_1}^{\sigma^*} g_1(\sigma) d\sigma} = \\ &= f_1(\bar{\sigma}) + \frac{2w_1f_1(\sigma^*) - f_1^2(\sigma^*) - 2 \int_{\xi_1}^{\sigma^*} g_1(\sigma) d\sigma}{w_1 + \sqrt{(w_1 - f_1(\sigma^*))^2 + 2 \int_{\xi_1}^{\sigma^*} g_1(\sigma) d\sigma}} \xrightarrow{w_1 \rightarrow +\infty} f_1(\bar{\sigma}) + f_1(\sigma^*). \end{aligned}$$

Согласно неравенству (10) $f_1(\bar{\sigma}) + f_1(\sigma^*) > 0$, следовательно, при достаточно больших w_1 точка H_3 лежит на луче L_1 выше точки A_3^* с координатами $(-\delta, -w_1)$.

На отрезке $A_3^*H_3 \subset L_1$ получаем следующее направление поля: $\dot{\sigma} < 0$, $\dot{u} > 0$, на симметричном отрезке $A_3H_3^* \subset L_2$: $\dot{\sigma} > 0$, $\dot{u} < 0$.

Следовательно, построенная на листе P_1 кривая $A_3B_3C_3D_3E_3H_3$ вместе с симметричной кривой $A_3^*B_3^*C_3^*D_3^*E_3^*H_3^*$ на листе P_2 и отрезками $A_3H_3^*$, $A_3^*H_3$ образует внешний контур, который траектории системы (2) пересекают «снаружи внутрь».

Не трудно доказать, что построенные три контура не пересекаются между собой. Теорема доказана.

Литература

1. Попов В. М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1961. № 8. С. 961–973.
2. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 288–291.

3. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // Автоматика и телемеханика. 1967. № 6. С. 5–30.

4. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / под ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука, 1975. 447 с.

5. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

6. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 575 с.

7. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.

8. Камачкин А. М., Шамберов В. Н. Отыскание периодических решений в нелинейных динамических системах. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. 86 с.

9. Шумафов М. М. Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2012. № 4. С. 10–21.

10. Леонов Г. А., Шумафов М. М., Тешев В. А. Устойчивость систем с гистерезисом. Майкоп: Изд-во Адыгейского гос. ун-та, 2012. 178 с.

11. Звягинцева Т. Е., Плисс В. А. Условия глобальной устойчивости одной системы с гистерезисной нелинейностью // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 2. С. 227–235. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.206>

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; zv_tatiana@mail.ru

Плисс Виктор Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vapliss@yandex.ru

Conditions for the two limit cycles existence in a system with hysteresis nonlinearity

T. E. Zviagitceva, V. A. Pliss

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zviagitceva T. E., Pliss V. A. Conditions for the two limit cycles existence in a system with hysteresis nonlinearity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 402–410. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.304>

In this paper, a two-dimensional automatic control system containing a single nonlinear hysteresis element of the general form is considered. Phase space of the system is a manifold with boundary consisting of two connected sheets. Existence of manifold boundary is conditioned by the motion of the phase point along hysteresis loop. This work is a continuation of the paper “Conditions for the global stability of a single system with hysteresis nonlinearity” published previously by the authors, where it is shown that under some conditions on the functions defining hysteresis such system is in a way globally stable. This paper presents sufficient conditions for considered system to have at least two limit cycles. Three closed contours embedded into each other are constructed in order to prove the existence of cycles on the phase manifold. The contours are composed of the pieces of the level lines of various Lyapunov functions. The inner contour is crossed by system trajectories from the outside to the inside, the middle contour is crossed by the trajectories from the inside to the outside. The outer contour is crossed by the system trajectories from the outside to the inside. The existence of such contours proves the presence of at least two limit cycles in the system.

Keywords: system with hysteresis, limit cycle, Lyapunov’s second method.

References

1. Popov V. M., “Absolute stability of nonlinear systems of automatic control”, *Avtomatika i telemekhanika* (8), 961–973 (1961) [in Russian].
2. Yakubovich V. A., “Frequency conditions for the absolute stability of controlled systems with hysteresis nonlinearities”, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **149**(2), 288–291 (1963) [in Russian].
3. Yakubovich V. A., “Frequency conditions for the absolute stability of control systems with multiple non-linear or linear non-stationary units”, *Avtomatika i telemekhanika* (6), 5–30 (1967) [in Russian].
4. *Methods for the study of nonlinear systems of automatic control* (ed. by R. A. Nelepin, Nauka Publ., Moscow, 1975, 447 p.) [in Russian].
5. Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A., *Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state* (Nauka Publ., Moscow, 1978, 400 p.) [in Russian].
6. Tsypkin Ya. Z., *The relay automatic system* (Nauka Publ., Moscow, 1974, 575 p.) [in Russian].
7. Krasnosel'skiy M. A., Pokrovskiy A. V., *Systems with hysteresis* (Nauka Publ., Moscow, 1983, 271 p.) [in Russian].
8. Kamachkin A. M., Shamberov V. N., *The determination of periodic solutions of nonlinear dynamical systems* (St. Petersburg State University Press, St. Petersburg, 2002, 86 p.) [in Russian].
9. Shumafov M. M., “Stability of systems of differential equations with hysteresis nonlinearities”, *The Bulletin of the Adyghe State University, the series “Natural-Mathematical and Technical Sciences”* (4), 10–21 (2012) [in Russian].
10. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., *Stability of systems with a hysteresis* (Adyghe State University Publ., Maikop, 2012, 182 p.) [in Russian].
11. Zviagitceva T. E., Pliss V. A., “Conditions for the global stability of a single system with hysteresis nonlinearity”, *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4(62)**, issue 2, 227–235 (2017) [in Russian]. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.206>

Author's information:

Tatiana E. Zviagitceva — zv_tatiana@mail.ru

Viktor A. Pliss — vapliss@yandex.ru