АСТРОНОМИЯ

УДК 521.19
MSC 70F15

Вращение абсолютно твердого тела в релятивистском приближении*

В. В. Пашкевич

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65, корп. 1

Для цитирования: *Пашкевич В. В.* Вращение абсолютно твердого тела в релятивистском приближении // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 494–508. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.313

В данной работе проводилось изучение релятивистского вращения абсолютно твердого тела. Релятивистское вращение абсолютно твердого тела порождается метрическими свойствами псевдориманова пространства общей теории относительности. Основная цель данного исследования — вывод функции Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твердого тела. Для этого рассматривается система точечных масс m_i, в которой некоторая совокупность точечных масс dm_n образует «абсолютно твердое тело» m_n. Таким образом, выполняется условие, заключающееся в том, что расстояние между любыми двумя точечными массами этой совокупности dm_n всегда остается неизменным. При этом тело m_n может вращаться вокруг собственного центра масс с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}| \geq 0$. Остальные точечные массы m_j из совокупности точечных масс m_i являются точечными телами, которые не вращаются. В результате функция Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твердого тела получается из функции Лагранжа системы невращающихся точечных масс в постньютоновом приближении.

Ключевые слова: вращение абсолютно твердого тела, функция Лагранжа, псевдориманово пространство, общая теория относительности, пост-ньютоновое приближение.

Введение. Производится построение функции Лагранжа для случая, когда некоторая совокупность точечных масс $m_{n_\alpha} = dm_n$ (см. рисунок) из всей системы точечных масс m_i образует «абсолютно твердое тело» m_n так, что для любых

*Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках сотрудничества между ЦКИ ПАН и ГАО РАН и персональных грантов Александра Бжезиньского и Иоланты Настулы.

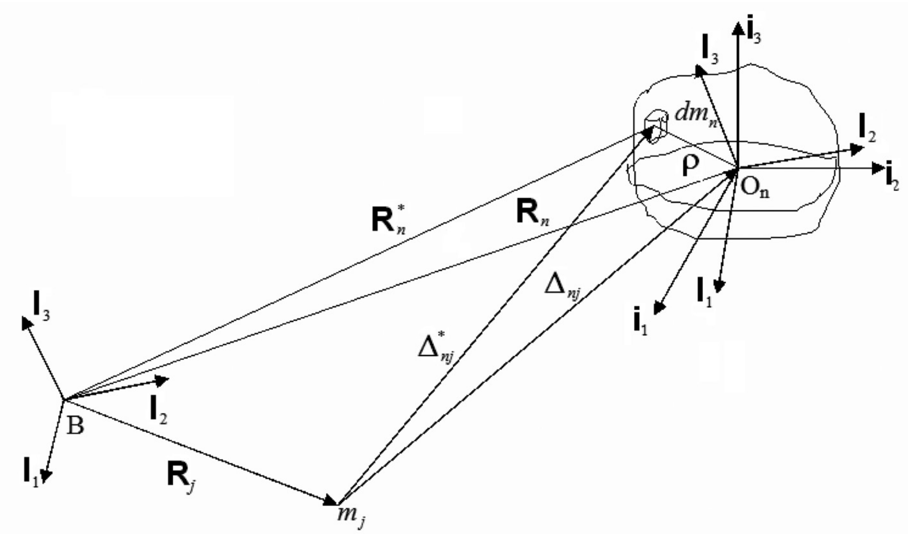

Рис. «Абсолютно твердое тело» m_n, образованное некоторой совокупностью точечных масс dm_n.

точечных масс m_{n_p} и m_{n_q} из совокупности m_{n_α} выполняется условие $\Delta_{n_p n_q} \equiv \mathrm{const}$ [1]. При этом тело m_n может вращаться вокруг собственного центра масс с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}| \geq 0$, остальные точечные тела m_j из совокупности m_i не вращаются; m_j является массой j-го тела.

Как известно, в общей теории относительности не существует понятия «абсолютно твердое тело» [2] ввиду конечности скорости распространения гравитационного взаимодействия. Однако погрешность, следующая из нашего предположения, пренебрежимо мало исказит моделируемое динамическое явление [3].

Вводится вспомогательная система координат $O_n\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ (см. рис.) с началом в центре масс «абсолютно твердого тела» m_n и осями, соответственно параллельными осям барицентрической системы координат $B\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$. Вводится система координат $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ с началом в центре масс «абсолютно твердого тела» m_n. Орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ направлены по главным осям инерции тела m_n. Координатная система $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ вращается относительно барицентрической системы координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Вектор $\mathbf{R}_j$ является барицентрическим вектором точечного тела m_j; $\boldsymbol{\Delta}_{nj}^*$ — вектор элемента массы dm_n абсолютно твердого тела m_n относительно точечного тела m_j; $\boldsymbol{\Delta}_{nj}$ — вектор центра масс абсолютно твердого тела m_n относительно точечного тела m_j.

Радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ элемента массы dm_n тела m_n в координатной системе $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ может быть представлен в виде $\boldsymbol{\rho} = \xi\mathbf{i}_1 + \eta\mathbf{i}_2 + \zeta\mathbf{i}_3$. При этом все три координаты ξ, η, ζ являются постоянными величинами. Радиус-вектор элемента dm_n в координатной системе $B\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 - \mathbf{R}_n^* = X_n^*\mathbf{I}_1 + Y_n^*\mathbf{I}_2 + Z_n^*\mathbf{I}_3$, в проекциях на оси вращающейся системы координат $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ обозначается $\mathbf{R}_n^* = x_n^*\mathbf{i}_1 + y_n^*\mathbf{i}_2 + z_n^*\mathbf{i}_3$. Радиус-вектор центра масс тела m_n в координатной системе $B\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ обозначается $\mathbf{R}_n = X_n\mathbf{I}_1 + Y_n\mathbf{I}_2 + Z_n\mathbf{I}_3$, в проекциях на оси вращающейся системы координат $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 - \mathbf{R}_n = x_n\mathbf{i}_1 + y_n\mathbf{i}_2 + z_n\mathbf{i}_3$. Эти три радиус-вектора связаны соотношением $\mathbf{R}_n^* = \mathbf{R}_n + \boldsymbol{\rho}$. Почленное дифференцирование по времени дает $\dot{\mathbf{R}}_n^* = \dot{\mathbf{R}}_n + \dot{\boldsymbol{\rho}}$. Производные взяты здесь в барицентрической системе $B\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$; однако производную $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ будет удобнее понимать как производную в системе $O_n\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$, что допустимо ввиду орбитального движения $O_n\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ относительно $B\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$. В таком случае производная $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, как скорость тела с неподвижной точкой, может быть выражена по формуле Эйлера $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ и, следовательно, предыдущее равенство перепишется как $\dot{\mathbf{R}}_n^* = \dot{\mathbf{R}}_n + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$. Здесь и далее символ $\times$ обозначает векторное произведение. Вектор угловой скорости в координатной системе $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ может быть представлен в виде $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3$, где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции абсолютно твердого тела m_n. Вектор кинетического момента вращательного движения абсолютно твердого тела m_n представляется в виде $\mathbf{H}_n = A_n\omega_1\mathbf{i}_1 + B_n\omega_2\mathbf{i}_2 + C_n\omega_3\mathbf{i}_3$, где A_n, B_n, C_n — главные моменты инерции 2-го порядка абсолютно твердого тела m_n:

$$A_n = \int\limits_{m_n} (\eta^2 + \zeta^2) dm_n; \quad B_n = \int\limits_{m_n} (\zeta^2 + \xi^2) dm_n;$$

$$C_n = \int\limits_{m_n} (\xi^2 + \eta^2) dm_n; \quad dm_n = p(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta;$$

$p(\xi, \eta, \zeta)$ — функция распределения масс абсолютно твердого тела m_n. В частном случае, если тело m_n является однородным трехосным эллипсоидом с полуосями a, b, c, то его моменты инерции определяются следующими выражениями [4]:

$$A_n = 0.2m_n(b^2 + c^2), \quad B_n = 0.2m_n(c^2 + a^2), \quad C_n = 0.2m_n(a^2 + b^2).$$

Легко видеть, что если $a, b, c \to 0$, то и $A_n, B_n, C_n \to 0$.

1. Математическая модель задачи. Функция Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твердого тела может быть получена из функции Лагранжа системы невращающихся точечных масс в пост-ньютоновом приближении [5]:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_i\sum_{k\neq i} \frac{Gm_im_k}{\Delta_{ik}} + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\sum_i\sum_{k\neq i}\frac{Gm_im_k}{\Delta_{ik}}\dot{\mathbf{R}}_i^2 + \frac{1}{8}\sum_i m_i\dot{\mathbf{R}}_i^4 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4}\sum_i\sum_{k\neq i}\frac{Gm_im_k}{\Delta_{ik}}\left[7\dot{\mathbf{R}}_i\cdot\dot{\mathbf{R}}_k + \dot{\mathbf{R}}_i\cdot\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k}{\Delta_{ik}}\dot{\mathbf{R}}_k\cdot\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k}{\Delta_{ik}} + 2\sum_{s\neq i}\frac{Gm_s}{\Delta_{is}}\right]\right\}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$, где $j = k$ или s; $\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k$ — барицентрические векторы положения и скорости i-й и k-й точечных масс соответственно; m_i, m_k, m_s — массы i-го, k-го и s-го точечных тел соответственно; c — скорость света в вакууме; G обозначает квадрат гауссовой гравитационной постоянной.

Функция Лагранжа, учитывающая взаимодействие абсолютно твердого тела m_n с другими телами, может быть представлена следующим образом. Из суммы по индексу i выделяются члены с индексом n, соответствующие телу m_n. При этом индекс j во второй сумме, если она есть, принимает все значения кроме значений, соответствующих индексу n. Оставляя в следующих разложениях сумм только члены, соответствующие абсолютно твердому телу m_n для одинарных сумм, и возмущающие члены между массами абсолютно твердого тела m_n и других точечных тел для двойных сумм, можно представить эти суммы в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\sum_i f_i = \underbrace{\sum_n f_n}_{\text{в теле } m_n} + \underbrace{\sum_j f_j}_{\text{вне тела } m_n}; \\ &\sum_i \sum_{l\neq i} f_{il} = \underbrace{\sum_n \sum_j f_{nj}}_{\text{возмущающие члены}} + \underbrace{\sum_j \sum_{k\neq j} f_{jk}}_{\text{вне тела } m_n} + \underbrace{\sum_j \sum_n f_{jn}}_{\text{возмущающие члены}}, \end{aligned} \tag{2}$$

f_i, f_{il} — некоторые фунции точечных тел, стоящие под суммами выражения (1).

После объединения подобных членов получаем функцию Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твердого тела m_n:

$$\begin{aligned} L_n = &\frac{1}{2}\sum_n dm_n \dot{\mathbf{R}}_n^{*2} + \sum_n \sum_j \frac{G dm_n m_j}{\Delta_{nj}^*} + \\ &+ \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\sum_n\sum_j \frac{G dm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\mathbf{R}}_n^{*2} + \frac{3}{2}\sum_n\sum_j \frac{G dm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\mathbf{R}}_j^2 + \frac{1}{8}\sum_n dm_n \dot{\mathbf{R}}_n^{*4} - \right. \\ &- \frac{1}{2}\sum_n\sum_j \frac{G dm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\left[7\dot{\mathbf{R}}_n^* \cdot \dot{\mathbf{R}}_j + \dot{\mathbf{R}}_n^* \cdot \frac{\mathbf{R}_n^* - \mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\mathbf{R}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_n^* - \mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\right] - \\ &\left. - \frac{1}{2}\sum_n dm_n\left(\sum_j \frac{G m_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\sum_n \frac{G dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

После естественной замены знаков суммирования по индексу n на знаки интегрирования по области m_n эти члены принимают вид

$$\begin{aligned} L_n = &\frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_j G m_j \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \\ &+ \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{8}\int_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^{*4} dm_n + \sum_j G m_j \left[\frac{3}{2}\int_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_j^2 \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \right.\right. \\ &\left. - \frac{7}{2}\int_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^* \cdot \dot{\mathbf{R}}_j \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^* \cdot \frac{\mathbf{R}_n^* - \mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\mathbf{R}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_n^* - \mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right] - \\ &\left. - \frac{1}{2}\int_{m_n}\left(\sum_j \frac{G m_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\int_{m_n} \frac{G dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и далее $\Delta_{nj}^* = |\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j + \boldsymbol{\rho}|$. Очень часто в небесной механике $\boldsymbol{\rho} \ll \boldsymbol{\Delta}_{nj}$. Таким образом, подынтегральные выражения разлагаются в ряд Тейлора по степеням параметра $|\boldsymbol{\rho}|/\Delta_{nj}$, который является малой величиной, например, ввиду того, что размеры больших тел Солнечной системы малы по сравнению с расстояниями между ними. В силу определения координатной системы $O_n\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ все интегралы вида

$$\int_{m_n} \xi dm_n, \quad \int_{m_n} \eta dm_n, \quad \int_{m_n} \zeta dm_n, \quad \int_{m_n} \xi\eta dm_n, \quad \int_{m_n} \eta\zeta dm_n, \quad \int_{m_n} \zeta\xi dm_n$$

тождественно равны нулю $(*)$ [4].

Аналитические вычисления вспомогательных формул, выражений и интегралов, необходимых для определения функции Лагранжа (4), приводятся в приложении.

2. Вычисление функции Лагранжа. ***2.1. Вычисление ньютоновой части функции Лагранжа.*** Первые два слагаемых выражения (4) относятся к ньютоновой части функции Лагранжа:

$$L_n^{Newton} = \frac{1}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_j Gm_j \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}.$$

Используя разложение (28) (см. приложение), будем вычислять определенный интеграл, зависящий от $\dot{\mathbf{R}}_n^*$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^{*2} dm_n = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}_n^2 m_n + \frac{1}{2}\int\limits_{m_n} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 dm_n. \tag{5}$$

Подставляя в (5) вычисленный интеграл (35) из приложения, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n^{*2} dm_n = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}_n^2 m_n + \frac{1}{2}\mathbf{H}_n \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{6}$$

Легко видеть, что данное выражение представляет собой кинетическую энергию абсолютно твердого тела m_n, которая является суммой кинетических энергий поступательного и вращательного движений тела m_n соответственно.

Используя разложение (33) (см. приложение) вычислим другой определенный интеграл, не зависящий от $\dot{\mathbf{R}}_n^*$:

$$\sum_j Gm_j \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} =$$
$$= \sum_j Gm_j \left\{ \frac{m_n}{\Delta_{nj}} - \frac{1}{2\Delta_{nj}^3} \int\limits_{m_n} \boldsymbol{\rho}^2 dm_n + \frac{3}{2\Delta_{nj}^5} \int\limits_{m_n} [\boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)]^2 dm_n \right\}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) вычисленные интегралы (36) и (37) из приложения, получаем

$$\sum_j Gm_j \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} = \sum_j Gm_j \left\{ \frac{m_n}{\Delta_{nj}} + \frac{1}{2\Delta_{nj}^3} \times \right.$$
$$\left. \times \left\{ A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{nj}^2} [A_n(x_n - x_j)^2 + B_n(y_n - y_j)^2 + C_n(z_n - z_j)^2] \right\} \right\}. \tag{8}$$

Полученное выражение (8) является возмущающей функцией гравитационного взаимодействия абсолютно твердого тела m_n с другими телами.

2.2. Вычисление пост-ньютоновой части функции Лагранжа. *2.2.1. Вычисление определенных интегралов, зависящих от* $\dot{\mathbf{R}}_n^*$. Геодезическое вращение совокупности точечных масс, образующих тело m_n, порождается пост-ньютоновыми членами функции Лагранжа (4), содержащими угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения тела m_n вокруг собственного центра масс, то есть зависящими от вектора барицентрической скорости $\dot{\mathbf{R}}_n^*$ элемента dm_n:

$$L_n = \ldots + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{8}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^{*4}dm_n + \sum_j Gm_j\left[\frac{3}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \ldots - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{7}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^*\cdot\dot{\mathbf{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^*\cdot\frac{\mathbf{R}_n^*-\mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\mathbf{R}}_j\cdot\frac{\mathbf{R}_n^*-\mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right] - \ldots\right\}. \quad (9)$$

Используя разложение (29) и применяя интегралы (38) и (35) из приложения, вычисляем определенный интеграл

$$\frac{1}{8}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^{*4}dm_n = \frac{1}{8}\dot{\mathbf{R}}_n^4 m_n + \frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\left(\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega}\right)^2dm_n + \frac{1}{4}\dot{\mathbf{R}}_n^2\int\limits_{m_n}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2dm_n =$$

$$= \frac{1}{8}\dot{\mathbf{R}}_n^4 m_n + \frac{1}{4}\dot{\mathbf{R}}_n^2(A_n\omega_1^2 + B_n\omega_2^2 + C_n\omega_3^2) + (\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2)^2\frac{B_n+C_n-A_n}{4} +$$

$$+ (\dot{z}_n\omega_1 - \dot{x}_n\omega_3)^2\frac{C_n+A_n-B_n}{4} + (\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1)^2\frac{A_n+B_n-C_n}{4}. \quad (10)$$

Применяя разложение (31) и интегралы (35), (39), (36) и (37) из приложения, вычисляем определенный интеграл

$$\frac{3}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} = \frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_n^2\frac{m_n}{\Delta_{nj}} + \frac{3\dot{\mathbf{R}}_n^2}{4\Delta_{nj}^3}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{nj}^2}[A_n(x_n-x_j)^2 + \right.$$

$$\left. + B_n(y_n-y_j)^2 + C_n(z_n-z_j)^2]\right\} - \frac{3}{2\Delta_{nj}^3}\left\{(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_n) + \right.$$

$$+ A_n(x_n-x_j)(\omega_2\dot{z}_n - \omega_3\dot{y}_n) + B_n(y_n-y_j)(\omega_3\dot{x}_n - \omega_1\dot{z}_n) +$$

$$+ C_n(z_n-z_j)(\omega_1\dot{y}_n - \omega_2\dot{x}_n) + A_n\dot{x}_n[\omega_2(z_n-z_j) - \omega_3(y_n-y_j)] +$$

$$\left. + B_n\dot{y}_n[\omega_3(x_n-x_j) - \omega_1(z_n-z_j)] + C_n\dot{z}_n[\omega_1(y_n-y_j) - \omega_2(x_n-x_j)]\right\} +$$

$$+ \frac{3}{2\Delta_{nj}}(A_n\omega_1^2 + B_n\omega_1^2 + C_n\omega_3^2). \quad (11)$$

Используя разложение (32) и интегралы (40), (36) и (37) из приложения, вычисляем определенный интеграл

$$
-\frac{7}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^*\cdot\dot{\mathbf{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}=-\frac{7}{2}\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j\frac{m_n}{\Delta_{nj}}-\frac{7\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}\Bigg\{A_n+B_n+C_n-
$$

$$
-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}[A_n(x_n-x_j)^2+B_n(y_n-y_j)^2+C_n(z_n-z_j)^2]\Bigg\}+
$$

$$
+\frac{7}{4\Delta_{nj}^3}\Big\{(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j)+
$$

$$
+A_n(x_n-x_j)(\omega_2\dot{z}_n-\omega_3\dot{y}_n)+B_n(y_n-y_j)(\omega_3\dot{x}_n-\omega_1\dot{z}_n)+
$$

$$
+C_n(z_n-z_j)(\omega_1\dot{y}_n-\omega_2\dot{x}_n)+A_n\dot{x}_n[\omega_2(z_n-z_j)-\omega_3(y_n-y_j)]+
$$

$$
+B_n\dot{y}_n[\omega_3(x_n-x_j)-\omega_1(z_n-z_j)]+C_n\dot{z}_n[\omega_1(y_n-y_j)-\omega_2(x_n-x_j)]\Big\}. \quad (12)
$$

Применяя разложение (34) и интегралы (36), (37), (41)–(44) и (46) из приложения, вычисляем определенный интеграл

$$
-\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\mathbf{R}}_n^*\cdot\frac{\mathbf{R}_n^*-\mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\mathbf{R}}_j\cdot\frac{\mathbf{R}_n^*-\mathbf{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}=\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\,\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\times
$$

$$
\times\left(-\frac{m_n}{2\Delta_{nj}^3}++\frac{15}{4\Delta_{nj}^7}[A_n(x_n-x_j)^2+B_n(y_n-y_j)^2+C_n(z_n-z_j)^2]\right)-
$$

$$
-\frac{3\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^5}[A_n\dot{x}_j(x_n-x_j)+B_n\dot{y}_j(y_n-y_j)+C_n\dot{z}_j(z_n-z_j)]-
$$

$$
-\frac{3\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^5}[A_n\dot{x}_n(x_n-x_j)+B_n\dot{y}_n(y_n-y_j)+C_n\dot{z}_n(z_n-z_j)]-
$$

$$
-\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}(A_n+B_n+C_n)+\frac{1}{2\Delta_{nj}^3}(A_n\dot{x}_n\dot{x}_j+B_n\dot{y}_n\dot{y}_j+C_n\dot{z}_n\dot{z}_j)+
$$

$$
+\frac{3\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^5}[(B_n-A_n)\omega_3(x_n-x_j)(y_n-y_j)+
$$

$$
+(A_n-C_n)\omega_2(z_n-z_j)(x_n-x_j)+(C_n-B_n)\omega_1(y_n-y_j)(z_n-z_j)]+
$$

$$
+\frac{1}{4\Delta_{nj}^3}\Big\{(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j)-
$$

$$
-A_n(x_n-x_j)(\omega_2\dot{z}_n-\omega_3\dot{y}_n)-B_n(y_n-y_j)(\omega_3\dot{x}_n-\omega_1\dot{z}_n)-
$$

$$
-C_n(z_n-z_j)(\omega_1\dot{y}_n-\omega_2\dot{x}_n)-A_n\dot{x}_n[\omega_2(z_n-z_j)-\omega_3(y_n-y_j)]-
$$

$$
-B_n\dot{y}_n[\omega_3(x_n-x_j)-\omega_1(z_n-z_j)]-C_n\dot{z}_n[\omega_1(y_n-y_j)-\omega_2(x_n-x_j)]\Big\}. \quad (13)
$$

2.2.2. Вычисление определенных интегралов, не зависящих от $\dot{\mathbf{R}}_n^*$. Вычислим оставшиеся пост-ньютоновые члены функции Лагранжа (4), не содержащие угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения тела m_n вокруг собственного центра масс, то есть не зависящие от вектора барицентрической скорости $\dot{\mathbf{R}}_n^*$ элемента dm_n:

$$L_n = \dots + \frac{1}{c^2}\left\{\dots + \sum_j Gm_j \left[\dots + \frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_j^2 \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \dots\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\left(\sum_j \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\int\limits_{m_n} \frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2\right\}. \quad (14)$$

Используя выражение (33) и применяя интегралы (36) и (37) из приложения, вычисляем определенный интеграл

$$\frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_j^2 \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} = \frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_j^2 \frac{m_n}{\Delta_{nj}} + \frac{3\dot{\mathbf{R}}_j^2}{4\Delta_{nj}^3} \times$$

$$\times \left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{nj}^2}[A_n(x_n - x_j)^2 + B_n(y_n - y_j)^2 + C_n(z_n - z_j)^2]\right\}. \quad (15)$$

Применяя разложение (30) и интегралы (45), (36) и (37) из приложения, вычисляем определенный интеграл

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\left(\sum_j \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n = -\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\left(\sum_j \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)\left(\sum_k \frac{Gm_k}{\Delta_{nk}^*}\right) dm_n =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_j\sum_k Gm_j Gm_k \int\limits_{m_n} \frac{1}{\Delta_{nj}^*}\frac{1}{\Delta_{nk}^*} dm_n = -\frac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\frac{Gm_k}{\Delta_{nk}}\left\{m_n + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_k)}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta_{nj}^2} + \frac{1}{\Delta_{nk}^2}\right)\right](A_n + B_n + C_n) -$$

$$- \frac{1}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}[A_n(x_n - x_j)(x_n - x_k) + B_n(y_n - y_j)(y_n - y_k) +$$

$$+ C_n(z_n - z_j)(z_n - z_k)] - \frac{3}{2\Delta_{nj}^4}[A_n(x_n - x_j)^2 + B_n(y_n - y_j)^2 +$$

$$\left. + C_n(z_n - z_j)^2] - \frac{3}{2\Delta_{nk}^4}[A_n(x_n - x_k)^2 + B_n(y_n - y_k)^2 + C_n(z_n - z_k)^2]\right\}. \quad (16)$$

Используя (8), вычисляем определенный интеграл

$$-\frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\int\limits_{m_n} \frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 = -\frac{1}{2}\sum_j G^2 m_j \left\{\frac{m_n}{\Delta_{nj}} + \frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left\{A_n + B_n + C_n - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{3}{\Delta_{nj}^2}[A_n(x_n - x_j)^2 + B_n(y_n - y_j)^2 + C_n(z_n - z_j)^2]\right\}\right\}^2. \quad (17)$$

Опуская малые члены $\leq o(\Delta_{nj}^{-6})$ из (17), в результате получаем

$$-\frac{1}{2}\sum_{j} m_j\left(\int\limits_{m_n}\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^{*}}\right)^2 = -\frac{Gm_n}{2}\sum_{j}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^2}\left\{m_n+\frac{1}{\Delta_{nj}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}[A_n(x_n-x_j)^2+B_n(y_n-y_j)^2+C_n(z_n-z_j)^2]\right\}\right\}. \quad (18)$$

3. Результаты. Пост-ньютоновая часть функции Лагранжа абсолютно твердого тела m_n может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta L_n = \Delta L_{n_0}(\omega_k^0)+\Delta L_{n_1}(\omega_k^1)+\Delta L_{n_2}(\omega_k^2), \quad (19)$$

где $\omega_k, k=1,2,3$, являются компонентами угловой скорости вращения абсолютно твердого тела m_n.

После приведения подобных членов дополнительная часть $\Delta L_{n_0}(\omega_k^0)$, не зависящая от компонент угловой скорости ω_k, имеет вид

$$\Delta L_{n_0}(\omega_k^0) = \frac{1}{8c^2}\dot{\mathbf{R}}_n^4 m_n+\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left\langle\left(\frac{3\dot{\mathbf{R}}_n^2}{2\Delta_{nj}}+\frac{3\dot{\mathbf{R}}_j^2}{2\Delta_{nj}}-\frac{7\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{2\Delta_{nj}}\right)\left(m_n+\frac{1}{2\Delta_{nj}^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n(x_n-x_j)^2+B_n(y_n-y_j)^2+C_n(z_n-z_j)^2\right]\right\}\right)-\right.$$

$$-\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^3}\left\{m_n-\right.$$

$$\left.-\frac{15}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n(x_n-x_j)^2+B_n(y_n-y_j)^2+C_n(z_n-z_j)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{3\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^5}\left[A_n(x_n-x_j)\dot{x_j}+B_n(y_n-y_j)\dot{y_j}+C_n(z_n-z_j)\dot{z_j}\right]-$$

$$-\frac{3\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^5}\left[A_n(x_n-x_j)\dot{x_n}+B_n(y_n-y_j)\dot{y_n}+C_n(z_n-z_j)\dot{z_n}\right]-$$

$$\left.-\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}(A_n+B_n+C_n)+\frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left[A_n\dot{x_n}\dot{x_j}+B_n\dot{y_n}\dot{y_j}+C_n\dot{z_n}\dot{z_j}\right]\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n}\sum_{k\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\frac{Gm_k}{\Delta_{nk}}\left\{m_n+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_k)}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta_{nj}^2}+\frac{1}{\Delta_{nk}^2}\right)\right](A_n+B_n+C_n)-$$

$$-\frac{1}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}[A_n(x_n-x_j)(x_n-x_k)+B_n(y_n-y_j)(y_n-y_k)+$$

$$+C_n(z_n-z_j)(z_n-z_k)]-\frac{3}{2\Delta_{nj}^4}[A_n(x_n-x_j)^2+B_n(y_n-y_j)^2+$$

$$+ C_n(z_n - z_j)^2] - \frac{3}{2\Delta_{nk}^4}\left[A_n(x_n - x_k)^2 + B_n(y_n - y_k)^2 + C_n(z_n - z_k)^2\right]\Bigg\} -$$

$$- \frac{Gm_n}{2c^2}\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^2}\Bigg\langle m_n + \frac{1}{\Delta_{nj}^2}\{A_n + B_n + C_n -$$

$$-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n(x_n - x_j)^2 + B_n(y_n - y_j)^2 + C_n(z_n - z_j)^2\right]\Bigg\}\Bigg\rangle. \quad (20)$$

Если тело m_n является сферически симметричным, т. е. $A_n = B_n = C_n = I_n$, то выражение (20) принимает вид

$$\Delta L_{n_0}(\omega_k^0) = \frac{1}{8c^2}\dot{\mathbf{R}}_n^4 m_n + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\Bigg(\frac{3\dot{\mathbf{R}}_n^2}{2\Delta_{nj}}m_n - \frac{7\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{2\Delta_{nj}}m_n - \frac{3\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}I_n -$$

$$-\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^3}m_n + \frac{15\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{4\Delta_{nj}^5}I_n\Bigg). \quad (21)$$

Дополнительная часть $\Delta L_{n_1}(\omega_k^1)$, линейно зависящая от компонент угловой скорости ω_k после приведения подобных членов, имеет вид

$$\Delta L_{n_1}(\omega_k^1) = -\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left\{\left(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\left(\frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_n - 2\dot{\mathbf{R}}_j\right)\right) + \right.$$

$$+ \frac{3}{2}(C_n - B_n)\omega_1\left[(y_n - y_j)(\dot{z}_n - \dot{z}_j) + (z_n - z_j)(\dot{y}_n - \dot{y}_j)\right] +$$

$$+ \frac{3}{2}(A_n - C_n)\omega_2\left[(z_n - z_j)(\dot{x}_n - \dot{x}_j) + (x_n - x_j)(\dot{z}_n - \dot{z}_j)\right] +$$

$$+ \frac{3}{2}(B_n - A_n)\omega_3\left[(x_n - x_j)(\dot{y}_n - \dot{y}_j) + (y_n - y_j)(\dot{x}_n - \dot{x}_j)\right] -$$

$$- \frac{3\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{2\Delta_{nj}^2}\left[(x_n - x_j)(y_n - y_j)\omega_3(B_n - A_n) + \right.$$

$$\left. + (z_n - z_j)(x_n - x_j)\omega_2(A_n - C_n) + (y_n - y_j)(z_n - z_j)\omega_1(C_n - B_n)\right]\Bigg\}. \quad (22)$$

Эта дополнительная часть функции Лагранжа для случая геодезического вращения абсолютно твердого тела была получена в наших предыдущих исследованиях [6]. Для случая сферически симметричного тела m_n выражение (22) принимает вид

$$\Delta L_{n_1}(\omega_k^1) = -\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\left(\frac{3}{2}\dot{\mathbf{R}}_n - 2\dot{\mathbf{R}}_j\right)\right). \quad (23)$$

Дополнительная часть $\Delta L_{n_2}(\omega_k^2)$, квадратично зависящая от компонент угловой скорости ω_k, после приведения подобных членов имеет вид

$$\Delta L_{n_2}(\omega_k^2) = \frac{1}{2c^2}\mathbf{H}_n \cdot \boldsymbol{\omega} \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_n^2}{2} + 3\sum_{j\neq n} \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}} \right) +$$
$$+ \sum_{j\neq n} \frac{Gm_j}{c^2} \left[(\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1)^2 \frac{A_n + B_n - C_n}{4} + (\dot{x}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_1)^2 \frac{C_n + A_n - B_n}{4} + \right.$$
$$\left. + (\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2)^2 \frac{B_n + C_n - A_n}{4} \right]. \quad (24)$$

Для случая сферически симметричного тела m_n выражение (24) принимает вид

$$\Delta L_{n_2}(\omega_k^2) = \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2}\mathbf{H}_n \cdot \boldsymbol{\omega} \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_n^2}{2} + 3\sum_{j\neq n} \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}} \right) + \frac{I_n}{4} \left(\dot{\mathbf{R}}_n \times \boldsymbol{\omega} \right)^2 \sum_{j\neq n} Gm_j \right]. \quad (25)$$

Заключение. В результате данного исследования впервые в явном виде выведена функция Лагранжа вращения абсолютно твердого тела m_n в пост-ньютоновом приближении:

$$L_n = L_n^{Newton} + \Delta L_n. \quad (26)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления определенных интегралов в (4) удобно иметь следующие вспомогательные формулы и выражения, при этом используется тождественные преобразования смешанного произведения векторов:

$$\dot{\mathbf{R}}_n^{*2} = \dot{\mathbf{R}}_n^2 + 2(\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2 = \dot{\mathbf{R}}_n^2 + 2(\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2;$$
$$\dot{\mathbf{R}}_n^{*}\dot{\mathbf{R}}_j = \dot{\mathbf{R}}_n\dot{\mathbf{R}}_j + (\dot{\mathbf{R}}_j\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}) = \dot{\mathbf{R}}_n\dot{\mathbf{R}}_j + (\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_j\boldsymbol{\omega});$$
$$\Delta_{nj}^* = \sqrt{\Delta_{nj}^2 + 2\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j) + \boldsymbol{\rho}^2} = \Delta_{nj}\sqrt{1 + 2\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{\Delta_{nj}^2} + \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\Delta_{nj}^2}};$$
$$\frac{1}{\Delta_{nj}^*} = \frac{1}{\Delta_{nj}} - \frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{\Delta_{nj}^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta_{nj}^3} + \frac{3[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta_{nj}^5} + \ldots;$$
$$\frac{1}{\Delta_{nj}^{*2}} = \frac{1}{\Delta_{nj}^2}\left\{1 - 2\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{\Delta_{nj}^2} - \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\Delta_{nj}^2} + 4\frac{[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)]^2}{\Delta_{nj}^4} + \ldots\right\};$$
$$\frac{1}{\Delta_{nj}^{*3}} = \frac{1}{\Delta_{nj}^3} - 3\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{\Delta_{nj}^5} - \frac{3\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta_{nj}^5} + \frac{15[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta_{nj}^7} + \ldots \quad (27)$$

В разложениях подынтегральных выражений сохранены только главные члены разложения и члены, зависящие от угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ или содержащие $\boldsymbol{\rho}$ не выше (и не ниже в силу (*)) второй степени:

$$\dot{\mathbf{R}}_n^{*2} = \dot{\mathbf{R}}_n^2 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2; \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_n^{*4} = \dot{\mathbf{R}}_n^4 + 4\left(\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega}\right)^2 + 2\dot{\mathbf{R}}_n^2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2; \quad (29)$$

$$\frac{1}{\Delta^*_{nj}\Delta^*_{nk}}=\frac{1}{\Delta_{nj}\Delta_{nk}}\left\{1+\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_k)}{\Delta^2_{nj}\Delta^2_{nk}}-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta^2_{nj}}-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta^2_{nk}}+\right.$$
$$\left.+\frac{3[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta^4_{nj}}+\frac{3[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_k)]^2}{2\Delta^4_{nk}}\right\};\quad (30)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{R}}^{*2}_n}{\Delta^*_{nj}}=\frac{\dot{\mathbf{R}}^2_n}{\Delta_{nj}}+\frac{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2}{\Delta_{nj}}-2\frac{(\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{\Delta^3_{nj}}-\dot{\mathbf{R}}^2_n\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta^3_{nj}}+$$
$$+\frac{3\dot{\mathbf{R}}^2_n[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta^5_{nj}};\quad (31)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{R}}^*_n\dot{\mathbf{R}}_j}{\Delta^*_{nj}}=\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\dot{\mathbf{R}}_j}{\Delta_{nj}}-\frac{(\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_j\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{\Delta^3_{nj}}-\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta^3_{nj}}+$$
$$+\frac{3\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta^5_{nj}};\quad (32)$$

$$\frac{1}{\Delta^*_{nj}}=\frac{1}{\Delta_{nj}}-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta^3_{nj}}+\frac{3[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta^5_{nj}};\quad (33)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{R}}^*_n\cdot(\mathbf{R}^*_n-\mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}^*_n-\mathbf{R}_j)}{\Delta^{*3}_{nj}}=\frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{\Delta^3_{nj}}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{3\boldsymbol{\rho}^2}{2\Delta^2_{nj}}+\frac{15[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)]^2}{2\Delta^4_{nj}}\right\}+$$
$$+\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{\Delta^3_{nj}}\left\{\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\mathbf{R}}_n+(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\boldsymbol{\omega})\right\}-\frac{3\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)}{\Delta^5_{nj}}\times$$
$$\times\left\{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\mathbf{R}}_j+\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\mathbf{R}}_n\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)+(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\boldsymbol{\omega})\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)\right\}.\quad (34)$$

Вычисление некоторых вспомогательных интегралов.

$$\int\limits_{m_n}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})^2dm_n=\int\limits_{m_n}[(\omega_2\zeta-\omega_3\eta)^2+(\omega_3\xi-\omega_1\zeta)^2+(\omega_1\eta-\omega_2\xi)^2]dm_n=$$
$$=A_n\omega_1^2+B_n\omega_2^2+C_n\omega_3^2=\mathbf{H}_n\cdot\boldsymbol{\omega};\quad (35)$$

$$\int\limits_{m_n}\boldsymbol{\rho}^2dm_n=\int\limits_{m_n}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)dm_n=\frac{1}{2}(A_n+B_n+C_n);\quad (36)$$

$$\int\limits_{m_n}[\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_j)]^2dm_n=\int\limits_{m_n}[(x_n-x_j)^2\xi^2+(y_n-y_j)^2\eta^2+(z_n-z_j)^2\zeta^2]dm_n=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\Delta^2_{nj}(A_n+B_n+C_n)-2[(x_n-x_j)^2A_n+(y_n-y_j)^2B_n+(z_n-z_j)^2C_n]\right\};\quad (37)$$

$$\int\limits_{m_n} (\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega})^2 dm_n =$$

$$= \int\limits_{m_n} [(\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2)^2\xi^2 + (\dot{z}_n\omega_1 - \dot{x}_n\omega_3)^2\eta^2 + (\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1)^2\zeta^2] dm_n =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2)^2(B_n + C_n - A_n) + (\dot{z}_n\omega_1 - \dot{x}_n\omega_3)^2(C_n + A_n - B_n) + \right.$$
$$\left. + (\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1)^2(A_n + B_n - C_n)\right\}; \quad (38)$$

$$\int\limits_{m_n} (\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_n\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j) dm_n = \int\limits_{m_n} (\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2)(x_n - x_j)\xi^2 dm_n +$$

$$+ \int\limits_{m_n} (\dot{z}_n\omega_1 - \dot{x}_n\omega_3)(y_n - y_j)\eta^2 dm_n + \int\limits_{m_n} (\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1)(z_n - z_j)\zeta^2 dm_n =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_n) + (C_n - B_n)\omega_1[(y_n - y_j)\dot{z}_n + (z_n - z_j)\dot{y}_n] +$$
$$+ (A_n - C_n)\omega_2[(z_n - z_j)\dot{x}_n + (x_n - x_j)\dot{z}_n] +$$
$$+ (B_n - A_n)\omega_3[(x_n - x_j)\dot{y}_n + (y_n - y_j)\dot{x}_n]\Big\}; \quad (39)$$

$$\int\limits_{m_n} (\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_j\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j) dm_n = \frac{1}{2}\Big\{(\mathbf{H}_n(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\dot{\mathbf{R}}_j) +$$
$$+ (C_n - B_n)\omega_1[(y_n - y_j)\dot{z}_j + (z_n - z_j)\dot{y}_j] +$$
$$+ (A_n - C_n)\omega_2[(z_n - z_j)\dot{x}_j + (x_n - x_j)\dot{z}_j] +$$
$$+ (B_n - A_n)\omega_3[(x_n - x_j)\dot{y}_j + (y_n - y_j)\dot{x}_j]\Big\}; \quad (40)$$

$$\int\limits_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_j\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\cdot\boldsymbol{\rho} dm_n = \frac{\dot{\mathbf{R}}_j\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{2}(A_n + B_n + C_n) -$$
$$- [\dot{x}_j(x_n - x_j)A_n + \dot{y}_j(y_n - y_j)B_n + \dot{z}_j(z_n - z_j)C_n]; \quad (41)$$

$$\int\limits_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\cdot\boldsymbol{\rho} dm_n = \frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)}{2}(A_n + B_n + C_n) -$$
$$- [\dot{x}_n(x_n - x_j)A_n + \dot{y}_n(y_n - y_j)B_n + \dot{z}_n(z_n - z_j)C_n]; \quad (42)$$

$$\int\limits_{m_n} \dot{\mathbf{R}}_n\cdot\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{R}}_j\cdot\boldsymbol{\rho} dm_n = \frac{\dot{\mathbf{R}}_n\cdot\dot{\mathbf{R}}_j}{2}(A_n + B_n + C_n) - [\dot{x}_n\dot{x}_j A_n + \dot{y}_n\dot{y}_j B_n + \dot{z}_n\dot{z}_j C_n]; \quad (43)$$

$$\int\limits_{m_n} (\boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j) dm_n = (C_n - B_n)\omega_1(y_n - y_j)(z_n - z_j)+$$
$$+ (A_n - C_n)\omega_2(z_n - z_j)(x_n - x_j) + (B_n - A_n)\omega_3(x_n - x_j)(y_n - y_j); \quad (44)$$

$$\int\limits_{m_n} \boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_k) dm_n = \frac{(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j) \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_k)}{2}(A_n + B_n + C_n)-$$
$$- [A_n(x_n - x_j)(x_n - x_k) + B_n(y_n - y_j)(y_n - y_k) + C_n(z_n - z_j)(z_n - z_k)]; \quad (45)$$

$$\int\limits_{m_n} (\boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j)\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j dm_n = \frac{1}{2}\Big\{(\mathbf{H}_n\dot{\mathbf{R}}_j(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j))+$$
$$+ (C_n - B_n)\omega_1[(y_n - y_j)\dot{z}_j + (z_n - z_j)\dot{y}_j]+$$
$$+ (A_n - C_n)\omega_2[(z_n - z_j)\dot{x}_j + (x_n - x_j)\dot{z}_j]+$$
$$+ (B_n - A_n)\omega_3[(x_n - x_j)\dot{y}_j + (y_n - y_j)\dot{x}_j]\Big\}. \quad (46)$$

Благодарность. Исследования проводились в Главной (Пулковской) астрономической обсерватории Российской академии наук (ГАО РАН) под руководством Георгия Ивановича Ерошкина и в Центре космических исследований Польской академии наук (ЦКИ ПАН).

Автор выражает благодарность рецензентам за полезные советы и рекомендации.

Литература

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.: ОГИЗ, 1946.

2. *Klioner S. A.* Angular velocity of rotation of extended bodies in general relativity // Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System / eds S. Ferraz-Mello et al. 1996. P. 309–320.

3. *Xu C., Tao J.-H., Wu X.* Post Newtonian Rigid Body. 2003. URL: http://arxiv.org/abs/gr-qc/0306015 (дата обращения: 11.04.2018).

4. *Мак-Миллан В. Д.* Динамика твердого тела. М., 1951.

5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.

6. *Eroshkin G. I., Pashkevich V. V.* Numerical simulation of the rotation motion of the Earth and Moon // Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies, IAU Colloquium 165 / eds I. M. Wytrzyszczak, J. H. Lieske, R. A. Feldman. Dordrecht: Kluwer, 1997. P. 275–281.

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Пашкевич Владимир Витальевич — канд. физ.-мат. наук; apeks@gaoran.ru

Rigid body rotation in relativistic approximation

V. V. Pashkevich

Pulkovo Observatory of RAS, Pulkovskoe shaussee, 65-1, St. Petersburg, 196140, Russian Federation

For citation: Pashkevich V. V. Rigid body rotation in relativistic approximation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 494–508. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.313

In this research, relativistic rotation of a rigid body, which is generated by metric properties of Riman space of general relativity, is studied. The main purpose of this investigation is to obtain Lagrange function for the relativistic rotation of a rigid body. In order to attain this aims the whole system of point masses m_i, in which a certain set of point masses dm_n forms an "absolutely rigid body" m_n in such a way that the condition of a constant distance between any two point masses from the set of point masses dm_n holds, was investigated. In this case, the body m_n can rotate around its own center of mass with angular velocity $|\boldsymbol{\omega}| \geq 0$. The remaining point masses m_j from the set m_i are point bodies, which do not rotate. Lagrange function for the relativistic rotation of a rigid body is deriving from Lagrange function of the non-rotation point of masses system in the post-newtonian approximation.

Keywords: rigid body rotation, Lagrange function, Riman space, general relativity, post-newtonian approximation.

References

1. Suslov G. K., *Theoretical mechanics* (OGIZ Publ., Moscow, 1946) [in Russian].

2. Klioner S. A., "Angular velocity of rotation of extended bodies in general relativity", *Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System*, 309–320 (eds S. Ferraz-Mello et al., 1996).

3. Xu C., Tao J.-H., Wu X., "Post Newtonian Rigid Body". Available at: http://arxiv.org/abs/gr-qc/0306015 (accessed April 11, 2018).

4. MacMillan W. D., *Dynamics of rigid bodies* (New York, London, 1936).

5. Landau L. D., Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].

6. Eroshkin G. I., Pashkevich V. V., "Numerical simulation of the rotation motion of the Earth and Moon", *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies, IAU Colloquium 165*, 275–281 (eds I. M. Wytrzyszczak, J. H. Lieske, R. A. Feldman, Kluwer, Dordrecht, 1997).

Author's information:

Vladimir V. Pashkevich — apeks@gaoran.ru