УДК 511.238.6 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2
MSC 11F85

Аналог неравенства Хиодо для глубины ветвления в расширениях степени p^{2*}

С. В. Востоков[1], *Н. В. Хаустов*[2], *И. Б. Жуков*[1], *О. Ю. Иванова*[3], *С. С. Афанасьева*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] ООО «Люксофт Профешнл»,
Российская Федерация, 195027, Санкт-Петербург, Свердловская наб., 44
[3] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, лит. А

Для цитирования: *Востоков С. В., Хаустов Н. В., Жуков И. Б., Иванова О. Ю., Афанасьева С. С.* Аналог неравенства Хиодо для глубины ветвления в расширениях степени p^2 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 189–200. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.202

Изучается ветвление в полных дискретно нормированных полях. Для случая совершенного поля вычетов имеется хорошо разработанная теория групп ветвления. Хиодо ввел понятие глубины ветвления, связанное с дифферентой расширения, и получил неравенство, которое объединяет понятие глубины ветвления в циклическом расширении степени p^2 с понятием глубины ветвления в подрасширении степени p. В данной работе авторы детально рассматривают структуру расширений степени p^2, которые могут быть получены композитом двух расширений степени p. При этом не требуется, чтобы поле вычетов было совершенным. Используя понятия дикого и свирепого расширений, а также дефекта главной единицы, авторы классифицируют расширения степени p^2 и получают более точные оценки для глубины ветвления. В ряде случаев приводятся точные формулы для глубины ветвления.

Ключевые слова: неравенство Хиодо, глубина ветвления.

1. Введение. В данной работе изучается ветвление в полных дискретно нормированных полях без предположения о том, что поле вычетов является совершенным. В случае, когда поле вычетов совершенно, имеется хорошо разработанная теория групп ветвления [1]. К сожалению, многие результаты не могут быть получены в общем случае. Хиодо в своей статье [2] ввел понятие глубины ветвления, которое очень просто связано с дифферентой расширения. Им было получено неравенство, устанавливающее связь между глубиной ветвления в циклическом расширении степени p^2 и глубиной ветвления в подрасширении степени p. Целью данной работы является нахождение глубины ветвления в расширениях степени p^2, которые могут быть получены композитом двух расширений степени p. Обзор результатов по теории ветвления можно найти в статье [3].

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 1716-11-10200).

2. Обозначения. В данной работе используются следующие обозначения:

- k — полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с полем вычетов $\bar{k}$ характеристики p;
- $v_k : k \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ — нормирование поля k;
- π — простой элемент поля k;
- $\mathcal{O}_k = \{x \in k, v_k(x) \geqslant 0\}$ — кольцо нормирования поля k;
- $\mathcal{U}_k = \{x \in k, v_k(x) = 0\}$ — группа единиц кольца $\mathcal{O}_k$;
- $\mathcal{U}_{i,k} = \mathcal{U}_i = \{x \in k, v_k(x-1) \geqslant i\}$ — i-я группа главных единиц кольца $\mathcal{O}_k$;
- $e = v_k(p)$ — абсолютный индекс ветвления поля k;
- $\theta = p/\pi^e \in \mathcal{U}_k$;
- $e' = e/(p-1)$.

3. Основные понятия и определения. Введем следующие определения.

Определение 1. Расширение K/k называется

- *неразветвленным*, если $[\bar{K} : \bar{k}] = [\bar{K} : \bar{k}]_{sep} = [K : k]$;
- *полностью разветвленным*, если $[\bar{K} : \bar{k}]_{sep} = 1$;
- *вполне разветвленным*, если $[\bar{K} : \bar{k}] = 1$;
- *свирепым*, если оно полностью разветвлено и

$$[\bar{K} : \bar{k}] = [\bar{K} : \bar{k}]_{insep} = [K : k];$$

- *диким*, если оно вполне разветвлено и имеет степень p^r:

$$[K : k] = [\bar{K} : \bar{k}] = p^r.$$

В дальнейшем предполагается, что все рассматриваемые поля содержат поле k.

Определение 2. Пусть L/K — конечное расширение полей. *Глубина ветвления* L/K — это

$$d_k(L/K) = \inf \left\{ v_k\left(\frac{\mathrm{Tr}_{L/K}(y)}{y}\right), y \in L^* \right\}.$$

Глубина ветвления и дифферента связаны между собой следующим образом (см. [2]):

$$d_k(L/K) = v_k(\mathfrak{D}_{L/K}) - (v_k(\pi_L) - v_k(\pi_K)).$$

Предложение 3.1. *Глубина ветвления обладает следующими свойствами:*

1) *если L — промежуточное поле в M/K, то $d_k(M/K) = d_k(M/L) + d_k(L/K)$;*
2) *если k_1/k — дикое расширение степени p, то $d_{k_1}(L/K) = pd_k(L/K)$;*
3) *если k_1/k — свирепое, то $d_{k_1}(L/K) = d_k(L/K)$;*
4) *$d_k(M(\zeta_p)/K(\zeta_p)) = d_k(M/K)$;*
5) *пусть k_1, k_2 — два расширения поля k, тогда $d_k(k_1k_2/k) \leqslant d_k(k_1/k) + d_k(k_2/k)$.*

Теорема 3.2. *(Неравенство Хиодо). Пусть k_2/k — циклическое расширение степени p^2, k_1 — промежуточное поле. Тогда*

$$d_k(k_2/k_1) \geqslant \min\left(\frac{(p-1)e + d_k(k_1/k)}{p}, \frac{p^2-p+1}{p} d_k(k_1/k)\right).$$

Далее будет предполагаться, что $\zeta_p \in k$.

Определение 3. Расширения k_1/k и k_2/k называются *независимо разветвленными* (или *расширениями с независимым ветвлением*), если

$$d_k(k_1k_2/k) = d_k(k_1/k) + d_k(k_2/k).$$

Из предложения 3.1 следует, что расширения k_1/k и k_2/k имеют независимое ветвление тогда и только тогда, когда

$$d_k(k_1k_2/k_2) = d_k(k_1/k).$$

Следующая теорема взята из [4].

Предложение 3.3. *Пусть $\zeta_p \in k$, $k_1 = k(\sqrt[p]{\epsilon_1}), k_2 = k(\sqrt[p]{\epsilon_2}), \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{U}_k$, — два расширения поля k степени p. Для каждого $i = 1, 2$ положим $\epsilon_i = \rho_i$ или $\epsilon_i = 1+\rho_i$, где $v_k(\rho_i) \geqslant 0$, $\rho_i \notin K^{*p}\mathcal{U}_1$. Предположим, что расширения k_1/k и k_2/k дикие. Тогда следующие два условия равносильны:*

1) k_1/k и k_2/k имеют независимое ветвление;

2) $\forall i = 1, 2, \ldots, p-1$ $\rho_1/\rho_2^i \notin K^{*p}\mathcal{U}_1$.

Замечание 1. Если одно из расширений k_1/k и k_2/k дикое, а другое свирепое, то они независимо разветвлены.

Определение 4. Пусть K/k — расширение Галуа, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$. *Скачком ветвления* автоморфизма σ называется

$$h(\sigma) = \min_{a \in K^*} v_K(a^{\sigma-1} - 1).$$

Если h одно и то же для всех $\sigma \neq 1$, то оно называется скачком ветвления расширения K/k и обозначается $h(K/k)$.

В частности, если K/k — циклическое расширение степени p, то

1) $h(K/k) = \frac{p}{p-1} d_k(K/k)$, если K/k дикое;
2) $h(K/k) = \frac{1}{p-1} d_k(K/k)$, если K/k свирепое или неразветвленное.

Теорема 3.4. *Пусть $\zeta_p \in k$. Тогда любое полностью разветвленное расширение степени p поля k имеет вид $k(\sqrt[p]{\epsilon})$, где ϵ может быть выбрано в соответствие со следующей таблицей:*

ϵ	*ветвление*	$d_k(k(\sqrt[p]{\epsilon})/k)$	$h(k(\sqrt[p]{\epsilon})/k)$
$c\pi$	*дикое*	e	pe'
$1 + a\pi^t$	*дикое*	$e - \frac{p-1}{p}t$	$pe' - t$
b	*свирепое*	e	e'
$1 + b\pi^{ps}$	*свирепое*	$e - (p-1)s$	$e' - s$

Здесь $a, b, c \in \mathcal{U}_k$, $\bar{b} \notin \bar{k}^{*p}, 0 < t < e'p$, $(t, p) = 1$, $0 < s < e'$.

Понятие дефекта было впервые введено Б. Вайман [5]. Следующие определение и свойства взяты из [6].

Определение 5. Пусть $x \in \mathcal{U}_k$. Дефект x — это

$$\operatorname{def}_k(x) = \sup\{v_k(x - y^p), y \in k^*\}.$$

Предложение 3.5. *Пусть $a \in \mathcal{U}_k$. Дефект обладает следующими свойствами:*

1) $0 \leqslant \operatorname{def}_k(a) \leqslant pe'$ *или* $\operatorname{def}_k(a) = +\infty$;
2) *если* $a \equiv b(\mod \mathcal{U}_k^p)$, *то* $\operatorname{def}_k(a) = \operatorname{def}_k(b)$;
3) $\operatorname{def}_k(ab) \geqslant \min(\operatorname{def}_k(a), \operatorname{def}_k(b))$ *и выполнено равенство, если* $\operatorname{def}_k(a) \neq \operatorname{def}_k(b)$;
4) $\operatorname{def}_k(a) = +\infty \Longleftrightarrow a \in \mathcal{U}_k^p$;
5) $\operatorname{def}_k(a) = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} \notin \bar{k}^{*p}$;
6) *если* $v_k(a - 1) = t$, *где* $(t, p) = 1$, *то* $\operatorname{def}_k(a) = t$;
7) $\operatorname{def}_k(a) = ps$, *где* $0 < s < e' \Longleftrightarrow a \equiv 1 + b\pi^{ps}(\mod k^{*p})$, *где* $0 < s < e', \bar{b} \notin \bar{k}^{*p}$;
8) *если* $v_k(a - 1) = pe'$, *то* $\operatorname{def}_k(a) = pe'$ *или* $\operatorname{def}_k(a) = +\infty$.

Предложение 3.6. *Пусть* $\zeta_p \in k$, $K = k(\sqrt[p]{\epsilon})$, *где* $\epsilon \in \mathcal{U}_k$. *Обозначим* $t = \operatorname{def}_k(\epsilon)$. *Тогда*

1) K/k *дикое* $\Longleftrightarrow (t, p) = 1$;
2) K/k *свирепое* $\Longleftrightarrow p \mid t$;
3) $K = k \Longleftrightarrow t = +\infty$.

Кроме того, $d_k(K/k) = e - \frac{p-1}{p}t$.

Пусть $k_1 = k(\sqrt[p]{\epsilon_1}), k_2 = k(\sqrt[p]{\epsilon_2})$ — два расширения степени p поля k, K — их композит. Последние два утверждения показывают, что для вычисления глубины ветвления в расширении K/k_1 достаточно вычислить $\operatorname{def}_{k_1}(\epsilon_2)$.

Лемма 1. *Пусть $\epsilon \in \mathcal{U}_1$. Тогда ϵ может быть представлено в виде*

$$\epsilon = 1 + a_0^p \pi^{pt} + \ldots + a_r^p \pi^{p(t+r)} + b\pi^{t_1},$$

где $a_i \in \mathcal{U}_k, t_1 > p(t + r)$ *и* $\bar{b} \notin \bar{k}^{*p}$, *если* $p \mid t_1, t_1 < pe'$. *Если ϵ представлено в таком виде, то справедливо неравенство*

$$\operatorname{def}_k(\epsilon) \geqslant \min(t + e, t_1)$$

и имеет место равенство, если $t + e \neq t_1$.

Доказательство. Индукция по $pe' - t$. База индукции: $t = pe'$.

Индукционный переход. Пусть $\epsilon = 1 + a\pi^s$, где $s < pe'$. Если $\bar{a} \notin \bar{k}^{*p}$ или $(s, p) = 1$ то это и есть нужное представление. Иначе получаем $\overline{a} = \overline{c}_0^p$, где $\bar{c}_0 \in \bar{k}$. Мы можем выбрать $a_0 \in \mathcal{U}_k$, такое что $\bar{a}_0 = \bar{c}_0$. Применяя предположение индукции к $\epsilon - a_0^p \pi^{ps}$, получаем нужное представление. Неравенство следует из предложения 3.5, так как выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{def}_k(1 + a_0^p \pi^{pt} + \ldots + a_r^p \pi^{p(t+r)}) &= \\ * = \operatorname{def}_k((1 + a_0^p \pi^{pt} + \ldots + a_r^p \pi^{p(t+r)})(1 - a_0 \pi^t - \ldots - a_r \pi^{t+r})^p) &= \\ = \operatorname{def}_k(1 - pa_0 \pi^{e+t} - \ldots) &= e + t.\end{aligned}$$

4. Дикий и дико-свирепый случаи. Пусть k_1, k_2 — два диких расширения степени p поля k, $K = k_1k_2$ — их композит. Если расширения k_1/k и k_2/k не являются независимо разветвленными, то

$$k_1 = k(\sqrt[p]{\epsilon_1}), \quad k_2 = k(\sqrt[p]{\epsilon}),$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{U}_k$ можно выбрать одним из следующих способов в зависимости от значений $d_k(k_1/k)$ и $d_k(k_2/k)$:

(1) $\epsilon_1 = \pi, \epsilon_2 = \pi u$, где $u \in \mathcal{U}_{1,k}$, если $d_k(k_1/k) = d_k(k_2, k) = e$;

(2) $\epsilon_1 = \pi, \epsilon_2 = 1 + u\pi^s$, где $u \in \mathcal{U}_{1,k}, 0 < s < pe', (s,p) = 1$, если $d_k(k_1/k) = e$, $d_k(k_2/k) = e - \frac{p-1}{p}s < e$.

(3) $\epsilon_1 = 1 + a\pi^m, \epsilon_2 = 1 + b\pi^s = 1 + a^iuc^p\pi^{mi+rp}$, где $u \in \mathcal{U}_{1,k}, c \in \mathcal{U}_k, 0 < m, s < pe'$, $(s,p) = (m,p) = 1, 0 < i \leqslant p-1$, если $d_k(k_1/k) = e - m(p-1)/p < e$, $d_k(k_2/k) = e - \frac{p-1}{p}s < e$.

Лемма 2. *Простой элемент π_1 поля k_1 может быть выбран таким образом, что*

1) $\pi = \pi_1^p$ в случае (2);

2) $\pi = \pi_1^p a^{-j}u_1$, где $u_1 \in \mathcal{U}_{1,k_1}, (j,p) = 1$ в случае (3);

Доказательство.

1. $\pi_1 = \sqrt[p]{\epsilon_1}$.
2. Так как $(m,p) = 1$, то мы можем выбрать j таким образом, что $mj = 1 + pr', (j,p) = 1$. Пусть $z = \sqrt[p]{\epsilon_1} - 1$. Тогда $v_{k_1}(z) = m$ и

$$a\pi^m = z^p + pz^{p-1} + \ldots + pz = z^p(1 + pz^{-1} + \ldots + pz^{-(p-1)}) = z^pu',$$

где $u' = 1 + b'\pi^{e-m(p-1)}$. Положим $\pi_1 = z^j\pi^{-r'}$. Тогда $v_{k_1}(\pi_1) = 1$ и

$$\pi_1^p = \frac{z^{pj}}{\pi^{pr'}} = \frac{a^j\pi^{mj}u'^{-j}}{\pi^{pr'}} = \pi a^j u'^{-j}.$$

Замечание 2. В случае (3) имеем $mi + pr = s$. Так как $mj = 1 + pr'$, то $m(js) = s + p(r's)$. Следовательно, $i \equiv js \mod p$.

Лемма 3. *Пусть $\epsilon \in \mathcal{U}_{1,k}, k_1/k$ — дикое расширение. Тогда*

1) $\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon) \geqslant p\mathrm{def}_k(\epsilon)$;

2) если $\mathrm{def}_k(\epsilon) = ps$, *то* $\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon) = p\mathrm{def}_k(\epsilon)$.

Доказательство. Пусть π_1 — простой элемент k_1, $\pi = \pi_1^pc$, где $c \in \mathcal{U}_{k_1}$.

1. Очевидно.
2. Если $u \equiv 1 + b\pi^{ps}(\mathrm{mod}\bar{k}^{*p})$, где $\bar{b} \notin \bar{k}^{*p}$, то $u \equiv 1 + c^{ps}b\pi_1^{p^2s}(\mathrm{mod}\bar{k_1}^{*p})$.

Замечание 3. К сожалению, если $(\mathrm{def}_k(\epsilon), p) = 1$, то дефект ϵ в поле k_1 в общем случае никак не связан с дефектом в поле k. Например, если $k_1 = k(\sqrt[p]{\pi}), \epsilon = 1 + b\pi^t$, где $(t,p) = 1, b \notin \bar{k}^{*p}$, то $\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon) = pt$, а если $\epsilon = 1 + \pi^t + b\pi^{t'}$, где $(t,p) = 1$, $t < t' < pe'$, произвольное, $b \notin \bar{k}^{*p}$, то $\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon) = pt'$.

Пусть $t = \mathrm{def}_{k_1}(u)$. В случае (1) имеем $K = k_1 k(\sqrt[p]{u})$ и, следовательно,

$$d_k(K/k_1) = \frac{1}{p}\left(pe - \frac{p-1}{p}t\right).$$

Мы можем записать $u = c^p(1 + c_1\pi^t)$, где $c_1 \notin \bar{k}^{*p}$.

Теорема 4.1. *В случае (2) справедливы утверждения:*

1) *если K/k_1 дикое, то $d_k(K/k_1) = \frac{1}{p}d_k(k_2/k)$;*
2) *если K/k_1 свирепое, то $d_k(K/k_1) = d_k(k_2/k) - \frac{p-1}{p}t$.*

Доказательство. В данном случае имеем $K = k(\sqrt[p]{1 + u\pi^s})$. Но выполняется равенство

$$1 + u\pi^s = 1 + c^p\pi_1^{ps} + c^p c_1 \pi_1^{p(t+s)},$$

где $c_1 \notin \bar{k_1}^{*p} = \bar{k}^{*p}$.

Если K/k_1 дикое, необходимо $pe + s < p(t+s)$. Это означает, что $\mathrm{def}_{k_1}(1 + u\pi^s) = pe + s$. Следовательно, можем записать

$$d_k(K/k_1) = \frac{1}{p}d_{k_1}(K/k_1) = \frac{1}{p}\left(pe - \frac{p-1}{p}(pe+s)\right) = \frac{1}{p}d_k(k_2/k).$$

Если K/k_1 свирепое, то $pe + s > p(t+s)$. В этом случае $\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon) = p(t+s)$ и

$$d_k(K/k_1) = \frac{1}{p}d_{k_1}(K/k_1) = \frac{1}{p}\left(pe - \frac{p-1}{p}p(t+s)\right) = d_k(k_2/k) - \frac{p-1}{p}t.$$

Замечание 4. В некоторых случаях дефект u можно вычислить с помощью леммы 3 или с помощью леммы 1.

Теорема 4.2. *Предположим, что K/k — дикое расширение. Тогда в случае (3) справедливо неравенство*

$$d_k(K/k_1) \leqslant \max\left(d_k(k_2/k) - \frac{p-1}{p}d_k(k_1/k), \frac{1}{p}d_k(k_2/k)\right).$$

Равенство имеет место, если $d_k(k_1/k) \neq d_k(k_2/k)$.

Доказательство. В данном случае, имеем $\epsilon_2 = 1 + a^{i-j}\pi_1^{ps}uu_1$. При дальнейшем разложении, как в лемме 1, ненулевые коэффициенты могут получиться только при степенях, делящихся на p, и при степени $e - m(p-1) + ps$. При этом все коэффициенты при степенях, делящихся на p, будут p-ми степенями, так как расширение K/k_1 дикое. Следовательно, можем записать

$$\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon_2) \geqslant \min(e - m(p-1) + ps, e + s).$$

Нужное утверждение получается применением предложения 3.6.

Замечание 5. Если $d_k(k_1/k) = d_k(k_2/k)$, то глубина ветвления в K/k_1 может быть намного меньше, что показывает следующий пример ($t > m$):

$$\epsilon_1 = 1 + a\pi^m, \quad \epsilon_2 = \epsilon_1(1 + ab\pi^t) = 1 + a(1 + b\pi^{t-m} + ab\pi^t)\pi^m.$$

В данном случае, $d_k(k_1/k) = d_k(k_2/k) = e - \frac{p-1}{p}m$, а $d_k(K/k_1) = e - \frac{p-1}{p}t$.

Теорема 4.3. *Предположим, что K/k_1 — свирепое расширение. Тогда в случае (3) справедливо неравенство*

$$d_k(K/k_1) \geqslant$$
$$\geqslant \max\left(d_k(k_2/k) - \frac{p-1}{p}d_k(k_1/k), \frac{1}{p}d_k(k_2/k), \quad d_k(k_2/k) - \frac{p-1}{p}\mathrm{def}_{k_1}(u)\right).$$

Доказательство. В поле k_1 мы имеем $\epsilon_2 = 1 + a^i uc^p\pi^s = 1 + a^{i-js}uc^p\pi_1^{ps}u_1^s$, где j такое, что $mj = 1 + pr$. Заметим, что $i - js$ делится на p.

Имеем $\mathrm{def}_{k_1}(a^{i-js}u) = \mathrm{def}_{k_1}(u)$. Предположим, что

$$u = c_1^p(1 + u_2\pi_1^{\mathrm{def}_{k_1}(u)}),$$

где $u_2 \notin \bar{k}_1^*$. Заметим, что $\mathrm{def}_{k_1}(u_1) = e - m(p-1)$, следовательно, будем иметь

$$\epsilon_2 = 1 + c_1^p\pi_1^{ps} + c_2^p u_2\pi_1^{\mathrm{def}_{k_1}(u)+ps} + c_3^p u_3\pi_1^{e-m(p-1)+ps} + \dots,$$

где $u_3 \in \bar{k}$, а точки обозначают члены с большими степенями π_1. Значит, справедливо неравенство

$$\mathrm{def}_{k_1}(\epsilon_2) \geqslant \min(s + e, \mathrm{def}_{k_1}(u) + ps, e - m(p-1) + ps)$$

и имеет место равенство при $d_k(k_1/k) \neq d_k(k_2/k)$.

Если $s \equiv 1(\mathrm{mod} p)$, то $p \mid i-j$ и $\mathrm{def}_{k_1}(a^{i-j}u) = \mathrm{def}_{k_1}(u)$. Далее можно рассуждать аналогично. Нужное утверждение получается применением предложения 3.6.

Замечание 6. Если $d_k(k_1/k) = d_k(k_2/k)$, то ситуация может быть такой же, как в диком случае. Например, если $\epsilon_1 = 1+a\pi^m$, $\epsilon_2 = (1+a\pi^m)(1+b\pi^{pt})$, где $pt > m$, $(m,p) = 1, b \notin \bar{k}_1^p$, то $d_k(k_1/k) = d_k(k_2/k) = e - \frac{p-1}{p}m$, но $d_k(K/k_1) = e - (p-1)t$.

5. Свирепый и свирепо-дикий случаи. Пусть $k_1 = k(\sqrt[p]{\epsilon_1})$, $k_2 = k(\sqrt[p]{\epsilon_2})$, $K = k_1k_2$, расширения k_1/k и k_2/k свирепые; $e = e_k$; $\theta \in O_k$ таков, что $\overline{\theta} = \overline{p\pi^{-e}}$. Будем предполагать, что $d_k(k_2/k) \leq d_k(k_1/k)$. Оценим $d(k_1k_2/k)$ через $d_k(k_1/k)$ и $d_k(k_2/k)$. Для этого достаточно оценить $d_k(k_1k_2/k_1)$.

При $d_k(k_1/k) \neq d_k(k_2/k)$ будет дополнительное условие на поле: $\overline{\theta} \in \overline{k^p}$ или $p \nmid d_k(k_2/k)$.

Заметим, что для свирепых расширений $d_k(k_1/k)$ и $d_k(k_2/k)$ целые.

Лемма 4. *Пусть l/k — свирепое расширение степени p, и $x \in O_l$. Тогда*

$$v_l\big(x^p - \mathrm{N}_{l/k}(x)\big) \geq d_k(l/k).$$

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ — автоморфизмы l над k. Имеем

$$0 = \prod_{i=1}^{p}(x - \sigma_i(x)) = x^p - \mathrm{N}_{l/k}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} x^i \mathrm{Tr}_{l/k}\left(\prod_{j=1}^{p-i}\sigma_i(x)\right)$$

и

$$v_l\left(\mathrm{Tr}_{l/k}\left(\prod_{j=1}^{p-i}\sigma_i(x)\right)\right) \geq d_k(l/k).$$

Лемма 5. *Пусть l/k — свирепое расширение степени p, элементы $x, y \in O_k$, $z, u \in O_l$ и число i таковы, что $p \nmid i$, $\overline{x} \notin \overline{k^p}$, $v_l(y) > 0$, $v_l(u) > 0$, $v_l(x - z^p - z^i y - u^p) > v_l(y)$. Тогда $v_k(y) \geq d_k(l/k)$.*

Доказательство. Предположим, что $v_l(y) < d_k(l/k)$. Тогда из леммы 4 следует равенство

$$\overline{z^i} = \overline{(x - z^p - u^p)y^{-1}} = \overline{\big(x - \mathrm{N}_{l/k}(z) - \mathrm{N}_{l/k}(u)\big)y^{-1}} \in \overline{k}.$$

Получаем, что $\overline{x^i} = \overline{(z^i)^p} \in \overline{k^p}$. Противоречие.

Предложение 5.1. *Пусть k_1, k_2 таковы, как описано выше, $d_k(k_2/k) < d_k(k_1/k)$, и выполнено $\overline{\theta} \in \overline{k^p}$ или $p \nmid d_k(k_2/k)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{d_k(k_2/k)}{p} \leq d_k(k_1k_2/k_1) \leq d_k(k_2/k).$$

Доказательство. Неравенство $d_k(k_1k_2/k_1) \leq d_k(k_2/k)$ следует из того, что $\mathrm{Tr}_{k_2/k}$ является сужением $\mathrm{Tr}_{k_1k_2/k_1}$.

Докажем неравенство $d_k(k_1k_2/k_1) \geq d_k(k_2/k)/p$.

Положим $d = d_k(k_2/k)$, $s = \frac{e-d}{p-1}$. Предположим, что $d_k(k_1k_2/k_1) < d/p$. Имеем

$$\frac{d}{p} = e - \frac{p-1}{p}\Big(e + \frac{e-d}{p-1}\Big) = e - \frac{p-1}{p}(e+s),$$

поэтому $\epsilon_2 \in U_{k_1}^p U_{k_1}(e+s+1)$.

Представим ϵ_2 в виде $\epsilon_2 = 1 + x\pi^{ps}$. Тогда $x \in U_k$, $\overline{x} \notin \overline{k^p}$, $\overline{x} \in \overline{k_1^p}$. Представим x в виде $x = z^p + z'\pi^r$, где $z, z' \in U_{k_1}$, $r > 0$, и $\overline{z'} \notin \overline{k_1^p}$ или $p \nmid r$.

Заметим, что $\overline{z} \notin \overline{k_1^p}$, так как если для некоторого $z_1 \in U_{k_1}$ выполнено $\overline{z_1^p} = \overline{z}$, то $\overline{z_1^{p^2}} = \overline{x} \in \overline{k} \setminus \overline{k^p}$, и степень элемента $\overline{z}_1$ над $\overline{k}$ равна p^2, но степень расширения $\overline{k}_1/\overline{k}$ равна p. Положим

$$\epsilon_2' = \epsilon_2\Big(\frac{1}{1 + z\pi^s}\Big)^p.$$

Имеем $\epsilon_2' \in U_{k_1}^p U_{k_1}(e+s+1)$ и

$$\begin{aligned}\epsilon_2' &\equiv (1 + z^p\pi^{ps} + z'\pi^{r+ps})(1 - z\pi^s + z^2\pi^{2s} - z^3\pi^{3s} + \ldots)^p \equiv \\ &\equiv 1 + z'\pi^{r+ps} - p\pi^s z \equiv 1 + z'\pi^{r+ps} - \theta z\pi^{e+s} \qquad \mod U_{k_1}(\min\{e+s, r+ps\}+1).\end{aligned}$$

Предположим, что $r + ps < e + s$. Тогда можем записать

$$\epsilon_2' \equiv 1 + z'\pi^{r+ps} \mod U_{k_1}(r+ps+1);$$

и из того, что $\overline{z'} \notin \overline{k_1^p}$ или $p \nmid r$, следует соотношение

$$\epsilon_2' \notin U_{k_1}^p U_{k_1}(r+ps+1) \subset U_{k_1}^p U_{k_1}(e+s+1).$$

Предположим, что $r + ps > e + s$. Имеем

$$\epsilon_2' \equiv 1 - \theta z\pi^{e+s} \mod U_{k_1}(e+s+1).$$

Из того, что $\overline{z} \notin \overline{k_1^p}$ и выполнено $\overline{\theta} \in \overline{k^p}$ или $p \nmid d$, следует $\overline{\theta z} \notin \overline{k_1^p}$ или

$$p \nmid e + \frac{e-d}{p-1} = e + s.$$

Следовательно, $\epsilon_2' \notin U_{k_1}^p U_{k_1}(e+s+1)$.

Получаем, что $r + ps = e + s$. Имеем $r = e + s - ps$ и

$$\epsilon_2' \equiv 1 + (z' - \theta z)\pi^{e+s} \mod U_{k_1}(e+s+1).$$

Из того, что $\epsilon_2' \in U_{k_1}^p U_{k_1}(e+s+1)$, следует

$$p \mid e+s, \qquad \overline{z' - \theta z} \in \overline{k_1^p} \tag{1}$$

или

$$\overline{z' - \theta z} = \overline{0}. \tag{2}$$

В случае (1) обозначим через u_1 произвольный элемент поля k_1, для которого выполнено $\overline{z' - \theta z} = \overline{u_1^p}$, и положим $u = u_1 \pi^{r/p}$; число r/p в этом случае целое.

В случае (2) положим $u = u_1 = 0$.

В обоих случаях положим $y = \theta \pi^r$. Тогда $y \in O_k$, $v_{k_1}(y) = r = e + s - ps = d$,

$$v_{k_1}\big(x - z^p - zy - u^p\big) = v_{k_1}\big(\pi^r(z' - \theta z - u_1^p)\big) > r = v_{k_1}(y).$$

Следовательно, x, y, z, u удовлетворяют условию леммы 5 для $i = 1$, $l = k_1$ и должно выполняться неравенство $v_{k_1}(y) \geq d_k(k_1/k)$. Но получаем $v_{k_1}(y) = d < d_k(k_1/k)$, т. е. противоречие.

Предложение 5.2. *Пусть $e, d \in \mathbb{N}$, $d' \in \mathbb{Q}_+$ таковы, что $\frac{e-d}{p-1}$, $\frac{(e-d')p}{p-1}$ — целые неотрицательные числа, и $d' \leq d$. Тогда существуют поля k, k_1, k_2, такие, как описано выше, для которых выполнено $d_k(k_1/k) = d_k(k_2/k) = d$, $d_k(k_1k_2/k_1) = d'$.*

Доказательство. Пусть k_0 — локальное поле, такое что $\mathrm{char} k_0 = 0$, $\mathrm{char} \overline{k}_0 = p$, $e_{k_0} = e$. Положим

$$k = k_0\{\{t_1, t_2\}\}, \qquad r = \frac{e-d}{p-1}, \qquad s = \frac{(e-d')p}{p-1}.$$

Тогда $r \leq ps$.

При $d < e$, $d' < e$ подойдут $k_1 = k\big(\sqrt[p]{1 + t_1\pi^{pr}}\big)$, $k_2 = k\big(\sqrt[p]{(1 + t_1\pi^{pr})(1 + t_2\pi^s)}\big)$.

При $d = e$, $d' < e$ подойдут $k_1 = k\big(\sqrt[p]{t_1}\big)$, $k_2 = k\big(\sqrt[p]{t_1(1 + t_2\pi^s)}\big)$.

При $d = d' = e$ подойдут $k_1 = k(\sqrt[p]{t_1})$, $k_2 = k(\sqrt[p]{t_1 t_2})$.

Предложение 5.3. *Пусть поле k таково, что поле $\overline{k}$ несовершенно, пусть числа $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ таковы, что $\frac{e-d_1}{p-1}$, $\frac{e-d_2}{p-1}$ — целые неотрицательные числа, и $d_2 < d_1$. Тогда существуют поля k_1, k_2, такие, как описано выше, для которых выполнено*

$$d_k(k_1/k) = d_1, \quad d_k(k_2/k) = d_2, \quad d_k(k_1k_2/k_1) \leq \frac{d_2}{p}.$$

Доказательство. Обозначим через t такой элемент U_k, что $\overline{t} \notin \overline{k^p}$.

Если $d_1 < e$, положим

$$r = \frac{e - d_1}{p - 1}, \qquad \epsilon_1 = 1 + t\pi^{pr}, \qquad t_1 = \frac{\sqrt[p]{\epsilon_1} - 1}{\pi^r};$$

если $d_1 = e$, положим $\epsilon_1 = t$, $t_1 = \sqrt[p]{t}$.

Положим также

$$s = \frac{e - d_2}{p - 1}, \qquad \epsilon_2 = 1 + t\pi^{ps}.$$

Тогда выполнено $d_k(k_1/k) = d_1$, $d(k_2/k) = d_2$, и в случае $d_1 < e$ выполнено $s > r$. Для t_1 в обоих случаях выполнено $\overline{t_1^p} = \overline{t}$, следовательно, $\overline{t}_1 \notin \overline{k_1^p}$.

Докажем неравенство

$$v_{k_1}(t - t_1^p) > e + s - ps. \tag{3}$$

В случае $d_1 = e$ левая часть (3) равна $+\infty$. Рассмотрим случай $d_1 < e$. Имеем

$$t = \frac{\epsilon_1 - 1}{\pi^{pr}} = \frac{(t_1\pi^r + 1)^p - 1}{\pi^{pr}} = t_1^p + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i \pi^{ir-pr},$$

и, следовательно, $v_{k_1}(t - t_1^p) \geq e + r - pr > e + s - ps$.

Докажем соотношение

$$\epsilon_2\Big(\frac{1}{1 + t_1\pi^s}\Big)^p \equiv 1 - \theta t_1 \pi^{e+s} \mod U_{k_1}(e + s + 1). \tag{4}$$

Имеем

$$\epsilon_2\Big(\frac{1}{1 + t_1\pi^s}\Big)^p \equiv (1 + t\pi^{ps})(1 - t_1\pi^s + t_1^2\pi^{2s} - t_1^3\pi^{3s} + \ldots)^p \equiv$$
$$\equiv 1 - pt_1\pi^s + \sum_{i\geq 0}\Big(t\pi^{ps}(-1)^i t_1^{pi}\pi^{psi} + (-1)^{i+1}t_1^{p(i+1)}\pi^{ps(i+1)}\Big) \equiv$$
$$\equiv 1 - \theta t_1\pi^{e+s} + (t - t_1^p)\pi^{ps}\sum_{i\geq 0}(-1)^i t_1^{pi}\pi^{si} \mod U_{k_1}(e + s + 1).$$

Применяя (3), получаем (4), из которого следует

$$d_k(k_1k_2/k_1) \leq e - \frac{p-1}{p}(e + s) = e - \frac{p-1}{p}\Big(e + \frac{e - d_2}{p - 1}\Big) = \frac{d_2}{p}.$$

Лемма 6. *Пусть k, k_1, k_2 таковы, как описано выше, $d_k(k_2/k) < e$, и число $d \in \mathbb{Q}_+$ таково, что*

$$d_k(k_1k_2/k_1) < d \leq d_k(k_2/k), \qquad \frac{(e - d)p}{p - 1} \in \mathbb{Z}.$$

Тогда существуют поля k', k_1', k_2', удовлетворяющие тем же условиям, что и поля k, k_1, k_2, такие что

$$e_{k'} = e, \quad d_{k'}(k_1'/k') = d_k(k_1/k), \quad d_{k'}(k_2'/k') = d_k(k_2/k), \quad d_{k'}(k_1'k_2'/k_1') = d.$$

Доказательство. Положим $d_1 = d_k(k_1/k)$, $d_2 = d_k(k_2/k)$. Получаем

$$s = \frac{e-d_2}{p-1}, \qquad r = \frac{\big(e - d_k(k_1k_2/k_1)\big)p}{p-1}, \qquad r' = \frac{(e-d)p}{p-1}.$$

Тогда $\epsilon_2 = 1 + a\pi^{ps}$, где $\overline{a} \notin \overline{k^p}$, и существует $\epsilon \in k_1$, такой что $\epsilon\epsilon_2^{-1} \in k_1^p$, $\epsilon = 1 + b\pi^r$, где $p \nmid r$ или $\overline{b} \notin \overline{k}_1^p$.

Положим $k' = k\{\{t\}\}$, $k_1' = k_1\{\{t\}\}$. Для таких полей верны равенства $e_{k'} = e$ и $d_{k'}(k_1'/k') = d_1$. Обозначим через $\tilde{\epsilon_2}, \tilde{\epsilon}$ подъемы элементов ϵ_2, ϵ в поля k', k_1' соответственно, положим $\epsilon_2' = \tilde{\epsilon_2}(1 + t\pi^{r'})$ и $k_2' = k'(\sqrt[p]{\epsilon_2'})$.

Так как $d \leq d_2$, то $r' \geq ps$. Имеем

$$\epsilon_2' \equiv 1 + x\pi^{ps} \mod U_{k'}(ps+1),$$

где

$$\overline{x} = \begin{cases} \overline{a}, & r' < ps, \\ \overline{a} + \overline{t}, & r' = ps. \end{cases}$$

В обоих случаях выполнено $x \notin \overline{k^p}$ и, следовательно, $d_{k'}(k_2'/k') = d_2$.

Имеем

$$k_1'k_2' = k_1'\Big(\sqrt[p]{\tilde{\epsilon}(1 + t\pi^{r'})}\Big).$$

Из условия $d_k(k_1k_2/k_1) < d$ следует, что $r' < r$,

$$\tilde{\epsilon}(1 + t\pi^{r'}) \equiv 1 + t\pi^{r'} \mod U_{k_1'}(r'+1)$$

и, следовательно, $d_{k'}(k_1'k_2'/k_1') = d$.

Предложение 5.4. *Пусть числа $e, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, $d_2' \in \mathbb{Q}_+$ таковы, что $\frac{e-d_1}{p-1}$, $\frac{e-d_2}{p-1}$, $\frac{(e-d_2')p}{p-1}$ — целые неотрицательные числа, $d_2 < d_1$, $\frac{d_2}{p} \leq d_2' \leq d_2$. Тогда существуют поля k, k_1, k_2, такие, как описано выше, для которых выполнено*

$$d_k(k_1/k) = d_1, \qquad d_k(k_2/k) = d_2, \qquad d_k(k_1k_2/k_1) = d_2'.$$

Доказательство. Следует из предложения 5.3 и леммы 6.

Литература

1. *Serre J.-P.* Corps locaux. Paris: Hernmann, 1962.

2. *Hyodo O.* Wild Ramification in the imperfect residue case // Advanced Studies in Pure Mathematics. 1987. Vol. 12. P. 287–314.

3. *Востоков С. В., Афанасьева С. С., Бондарко М. В. и др.* Явные конструкции и арифметика числовых локальных полей // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 3. С. 402–435. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.305

4. *Востоков С. В., Жуков И. Б., Пак Г. К.* Расширения с почти максимальной глубиной ветвления // Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 265. С. 77–109.

5. *Wyman B.* Wildy ramnified gamma extensions // Amer. J. of Math. 1969. Vol. 91. P. 135–152.

6. *Spriano L.* Well ramified extension of complete discrete valuation fields with applications to the Kato conductor // Canad. J. Math. 2000. Vol. 52, No. 6. P. 1269–1309.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Востоков Сергей Владимирович — проф.; sergei.vostokov@gmail.com
Хаустов Николай Викторович — ведущий архитектор ПО; nhaustov@gmail.com
Жуков Игорь Борисович — проф.; igor.zhukov@mail.ru
Иванова Ольга Юрьевна — старший преподаватель; olgaiv80@mail.ru
Афанасьева Софья Сергеевна — инженер-исследователь; cheery_sonya@mail.ru

Analogue of the Chiodo inequality for the ramification depth in the case of degree p^2 extensions

S. V. Vostokov[1], *N. V. Haustov*[2], *I. B. Zhukov*[1], *O. Yu. Ivanova*[3], *S. S. Afanas'eva*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Luxoft Professional, LLC, Sverdlovskaya nab., 44, St. Petersburg, 195027, Russian Federation
[3] St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Bolshaya Morskaya ul., 67, St. Petersburg, 190000, Russian Federation

For citation: Vostokov S. V., Haustov N. V., Zhukov I. B., Ivanova O. Yu., Afanas'eva S. S. Analogue of the Chiodo inequality for the ramification depth in the case of degree p^2 extensions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 189–200. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.202

In this paper we study the ramification in extensions of complete discrete valuation fields. In the perfect residue field case, there is a classical theory of ramification groups due to J. P. Serre. A. Chiodo introduced the notion of ramification depth, which is close to the classical notion of different. He also obtained an inequality, which pointed out a fundamental relation between the ramification depth in a cyclotomic extension of degree p^2 with the ramification depth in a subextension of degree p. In the present paper we focus on the case of the degree p^2 extension, which is a composit field of two degree p extensions.

Keywords: Chiodo inequality, ramification depth.

References

1. Serre J.-P., *Corps locaux* (Hernmann, Paris, 1962).
2. Hyodo O., "Wild Ramification in the imperfect residue case", *Advanced Studies in Pure Mathematics* **12**, 287–314 (1987).
3. Vostokov S. V., Afanas'eva S. S., Bondarko M. V., et al., "Explicit constructions and the arithmetic of local number fields", *Vestn. St. Petersburg Univ., Math.* **50**, issue 3, 242–264 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117030128
4. Vostokov S. V., Zhukov I. B., Pak G. K., "Extensions with almost maximal depth of ramification", *J. Math. Sci.* **112**(3), 4285–4302 (2002).
5. Wyman B., "Wildy ramnified gamma extensions", *Amer. J. of Math.* **91**, 135–152 (1969).
6. Spriano L., "Well ramified extension of complete discrete valuation fields with applications to the Kato conductor", *Canad. J. Math.* **52**(6), 1269–1309 (2000).

Author's information:

Sergei V. Vostokov — sergei.vostokov@gmail.com
Nikolay V. Haustov — nhaustov@gmail.com
Igor B. Zhukov — igor.zhukov@mail.ru
Olga Yu. Ivanova — olgaiv80@mail.ru
Sofia S. Afanas'eva — cheery_sonya@mail.ru