УДК 519.214 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2
MSC 60-02, 60F05, 60F10, 60G50

К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. I. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*

А. Ю. Зайцев[1,3], *А. А. Зингер*[2],
М. А. Лифшиц[3], *Я. Ю. Никитин*[3], *В. В. Петров*[3]

[1] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27
[2] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, лит. А
[3] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Зайцев А. Ю., Зингер А. А., Лифшиц М. А., Никитин Я. Ю., Петров В. В.* К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. I. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 201–232. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.203

Первая статья из серии обзоров, посвященных научным достижениям Ленинградской — Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики в период с 1947 по 2017 г. посвящена традиционной для Санкт-Петербурга тематике предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Речь идет о классических предельных теоремах: законе больших чисел, центральной предельной теореме и законе повторного логарифма, а также о круге примыкающих к ним важных задач, сформировавшемся во второй половине XX века. К последним относятся аппроксимация распределений сумм независимых слагаемых безгранично делимыми распределениями, оценка точности сильной гауссовской аппроксимации таких сумм и предельные теоремы о слабой сходимости почти наверное эмпирических мер, порожденных последовательностью сумм независимых случайных величин и векторов.

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, центральная предельная теорема, закон больших чисел, закон повторного логарифма, безгранично делимые распределения, функции концентрации, проблема Литтлвуда—Оффорда, эмпирическая мера, предельная теорема почти наверное.

1. Введение. Настоящая статья, написанная по любезному приглашению редакции журнала «Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия», открывает серию обзоров достижений ленинградской — петербургской школы теории вероятностей и математической статистики в период с 1947 г. до настоящего времени. При этом в основном будут описаны достижения сотрудников кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета ЛГУ (СПбГУ), основанной Ю. В. Линником в 1948 г., а также ее выпускников, продол-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-01-00237, 16-01-00258 и 16-01-00367), СПбГУ (грант СПбГУ — ННИО 6.65.37.2017) и при поддержке программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

живших работу в Ленинграде — Санкт-Петербурге. Такое обширное описание деятельности научной школы делается впервые. Известный обзор Ю. В. Линника [1] был краток и покрывал только период до 1969 г.

Исследования по теории вероятностей в Санкт-Петербурге были начаты В. Я. Буняковским (1804–1889), учеником Коши, получившим превосходное образование в Лозанне и Париже и защитившем в Парижском университете докторскую диссертацию. Он был первым, кто начал читать в Санкт-Петербургском университете курс теории вероятностей, причем написал первый русский учебник по этому предмету [2]. Этот учебник, «прекрасный для своего времени» по словам Б. В. Гнеденко [3, с. 28], приобрел большую популярность, причем есть свидетельства, что Гаусс и Бьенэме учили русский язык, чтобы его читать [4]. Он содержал оригинальное изложение как самой теории вероятностей, так и ее приложений к страхованию, демографии и т. п.

В обзоре [1] Ю. В. Линник писал: «Весьма важна постановка Буняковским вопросов приемочного статистического контроля — например, приема партии мешков сахара на основе выборки. Это первый в истории математики материал по статистическому контролю качества промышленной продукции». Ряд позднейших статей Буняковского относится к различным прикладным вопросам теории вероятностей и математической статистики, например, подсчету вероятной численности русской армии после призыва и определению погрешностей наблюдений. С 1858 г. Буняковский состоял главным экспертом правительства по вопросам статистики и страхования. С 1864 по 1889 г. он был вице-президентом Академии наук.

Новый этап исследований по теории вероятностей начался в Петербурге после переезда в Петербург П. Л. Чебышёва (1821–1894), который в 1860 г. сменил В. Я. Буняковского в качестве лектора курса теории вероятностей в университете. В работах П. Л. Чебышёва и его учеников, в первую очередь А. А. Маркова (1856–1922) и А. М. Ляпунова (1857–1918), были получены многочисленные блестящие результаты, которые хорошо известны и подробно описаны в учебниках теории вероятностей и математической статистики, а также в трудах по истории математики. Представление о достигнутом научном уровне и уровне преподавания дают также записи лекций Чебышёва, осуществленные А. М. Ляпуновым [5], и учебник А. А. Маркова [6].

Предвоенный период в исследованиях по теории вероятностей связан с именем выдающегося математика, академика С. Н. Бернштейна (1880–1968), который в 1933–1941 гг. читал в университете лекции в качестве профессора математико-механического факультета. В этот период им были, в частности, заложены основы стохастических дифференциальных уравнений (в дискретном варианте), была доказана справедливость центральной предельной теоремы для новых классов зависимых случайных величин и обнаружен один из первых вариантов характеризации нормального закона независимостью суммы и разности случайных величин. В 1937 г. С. Н. Бернштейн дал ряд далеких обобщений неравенства Чебышёва, ныне называемых неравенствами Бернштейна и широко используемых в теории больших уклонений и других вопросах предельных теорем. В период с 1927 по 1946 г. вышло четыре издания замечательного учебника С. Н. Бернштейна по теории вероятностей [7]. (О работах С. Н. Бернштейна в области теории вероятностей см. также [8, 9].)

Затем С. Н. Бернштейн переехал в Москву, и возрождение исследований по теории вероятностей и математической статистике в Ленинградском университете в послевоенный период связано с именем академика Ю. В. Линника (1915–1972), к тому времени прославленного автора исключительно сильных результатов в аналитической теории чисел. По словам самого Линника, заняться теорией вероятностей ему посоветовал выдающийся московский математик А. Я. Хинчин, считавший, что математики должны работать по крайней мере в двух различных областях своей науки. Это побудило Ю. В. Линника начать интенсивные исследования в новой для себя области. По его инициативе в 1948 г. на математико-механическом факультете была открыта кафедра теории вероятностей и математической статистики.

Постепенно интересы Ю. В. Линника распространились на математическую статистику и привели к ряду замечательных книг и статей, с которыми можно познакомиться по сборникам его избранных трудов [10, 11] (см. также юбилейную статью [12]).

Яркая индивидуальность Ю. В. Линника привлекала множество талантливых учеников, часть из них (В. В. Петров, В. П. Скитович, И. А. Ибрагимов) стала работать на кафедре теории вероятностей и математической статистики, другие работали в Ленинградском отделении Математического института Академии наук (ЛОМИ, ныне ПОМИ), в вузах и научно-исследовательских учреждениях города. У них также появились ученики, главным образом, студенты и аспиранты кафедры. Постепенно образовалась многочисленная научная школа, которая в 1990-х годах под руководством академика И. А. Ибрагимова была официально признана Министерством образования и науки России и Советом по грантам Президента Российской Федерации.

Упомянутая выше серия статей призвана дать краткое изложение основных достижений этой научной школы. В этом выпуске речь идет главным образом о предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. При этом разделы 2–4 написаны В. В. Петровым (СПбГУ), раздел 5 принадлежит А. Ю. Зайцеву (ПОМИ РАН и СПбГУ), раздел 6 — А. А. Зингеру (ГУАП), раздел 7 — М. А. Лифшицу (СПбГУ). Введение составлено Я. Ю. Никитиным (СПбГУ).

2. Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Среди работ создателей Петербургской школы теории вероятностей П. Л. Чебышёва, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова, ставших классиками нашей науки, важное место занимают исследования по предельным теоремам для сумм независимых случайных величин. В тридцатых годах прошлого века их работы были продолжены в Ленинградском университете С. Н. Бернштейном, а с конца сороковых годов — основателем кафедры теории вероятностей и математической статистики Ю. В. Линником, его многочисленными учениками и учениками его учеников.

Первой публикацией Ю. В. Линника по теории вероятностей была работа [13], в которой получены оптимальные в некотором смысле неравномерные оценки отклонения функции распределения суммы независимых неодинаково распределенных случайных величин от нормальной функции распределения на произвольном конечном интервале. Наряду с традиционным аппаратом характеристических функций в [13] использованы новые приемы исследования, ранее применявшиеся в аналитической теории чисел — области математики, в которой Ю. В. Линником были сделаны выдающиеся открытия.

Оценкам скорости сходимости распределений сумм независимых случайных величин к нормальному распределению посвящена обширная литература. Классическими результатами в этой области являются неравенства Ляпунова, Берри—Эссеена и Эссеена. Обобщения и усиления этих результатов, содержащие как равномерные, так и более точные неравномерные оценки, получены в работах В. В. Петрова [14], И. А. Ибрагимова [15], Л. В. Осипова [16], Л. В. Осипова и В. В. Петрова [17], Б. А. Лифшица [18]. Сформулируем один результат И. А. Ибрагимова.

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $V(x)$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, и пусть существуют такие последовательности постоянных $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что $F_n(x) \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$ для любого x, где $F_n(x) = \mathbf{P}(S_n/a_n - b_n < x)$, $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. Положим $r_n = \inf_{a_n, b_n} \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$. Для того чтобы $r_n = O(n^{-\delta/2})$, где $0 < \delta < 1$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dV(x) < \infty, \qquad \int_{|x| \geq z} x^2\, dV(x) = O(z^{-\delta}) \quad \text{при } z \to \infty. \tag{1}$$

Для того чтобы $r_n = O(n^{-1/2})$, необходимо и достаточно выполнение условий (1) при $\delta = 1$ и условия

$$\int_{-z}^{z} x^3\, dV(x) = O(1) \quad \text{при } z \to \infty. \tag{2}$$

Л. В. Осипов и В. В. Петров [17] получили оценку отклонения функции распределения нормированной произвольным образом суммы n независимых неодинаково распределенных случайных величин от нормальной функции распределения без предположений о существовании каких-либо моментов. Хейде [19] обнаружил оптимальное асимптотическое поведение этой оценки. При сравнительной простоте формулировок полученных оценок их следствиями являются неравенства Ляпунова и Эссеена.

Для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией Л. В. Осипов [20] получил смыкающиеся верхние и нижние оценки остаточного члена в центральной предельной теореме.

Рассматривая последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения, В. А. Егоров [21] и Л. В. Розовский [22] исследовали связь между моментными свойствами этой функции и различными формами асимптотической нормальности функции распределения нормированной произвольным образом суммы n случайных величин из исходной последовательности.

Большое место в литературе по предельным теоремам теории вероятностей занимают теоремы об асимптотических разложениях для распределений сумм независимых случайных величин. Для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин И. А. Ибрагимов [23] получил необходимые и достаточные условия справедливости классической формы асимптотического разложения в центральной предельной теореме. Л. В. Осипов [24] получил неравномерные оценки остаточного члена в асимптотическом разложении функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным абсолютным моментом порядка $k \geq 3$; при этом не делается никаких других дополнительных предположений. Эти оценки справедливы для всех x и n. Простыми следствиями полученных результатов являются известные неравномерные оценки.

В. В. Петров [25] нашел явные формулы для любых членов классического асимптотического разложения в центральной предельной теореме. В [26] получены теоремы об асимптотических разложениях функции распределения нормированной суммы независимых неодинаково распределенных случайных величин, а также производных любого порядка этой функции распределения. Часть этих результатов относится к локальным теоремам для плотностей распределения нормированных сумм таких случайных величин.

Локальные предельные теоремы для плотностей распределения сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин с оценками остаточного члена и асимптотическими разложениями получены В. В. Петровым [27, 28].

Видное место в литературе занимают предельные теоремы для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. Во многих приложениях существенное значение имеет информация о вероятностях вида $\mathbf{P}(Z_n \geq x)$, где Z_n — нормированная сумма n независимых случайных величин, при $x = x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Основополагающим результатом в области предельных теорем для вероятностей больших уклонений является теорема Крамера [29], полученная для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}$ при условии конечности производящей функции моментов $\mathbf{E}\, e^{tX_1}$ в области $|t| < H$ при некотором $H > 0$ (условие Крамера). Эта теорема содержит асимптотические равенства для отношений $(1-F_n(x))/(1-\Phi(x))$ и $F_n(-x)/\Phi(-x)$ при $x = x_n = o(\sqrt{n}/\log n)$ $(n \to \infty)$, где $F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x\,\sigma\sqrt{n})$, при условиях $\mathbf{E}\, X_1 = 0$ и $\mathbf{D}\, X_1 = \sigma^2$. Наиболее простым следствием теоремы Крамера является утверждение о том, что при выполнении условия Крамера каждое из этих отношений стремится к 1 при $x = o(n^{1/6})$.

В. В. Петров [30] получил обобщение предельной теоремы Крамера для последовательностей независимых неодинаково распределенных случайных величин с заменой условия $x = o(\sqrt{n}/\log n)$ оптимальным в данной ситуации условием $x = o(\sqrt{n})$ и с соответствующим улучшением порядка малости остаточного члена в асимптотических разложениях для отношений хвостовых вероятностей. Предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин ранее исследовались Феллером [31], но из результатов Феллера, рассматривавшего лишь последовательности ограниченных неодинаково распределенных случайных величин, не следует теорема Крамера.

В. Рихтер [32] получил локальные предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных величин при выполнении условия Крамера.

Условие Крамера является довольно жестким; оно означает аналитичность характеристической функции рассматриваемых случайных величин в некоторой окрестности нуля, а следовательно, в некоторой полосе, содержащей действительную прямую. Ю. В. Линник [33, 34] разработал новые методы, позволившие исследовать вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин при нарушении условия Крамера.

Приведем один из результатов Ю. В. Линника. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Положим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x\,\sigma\sqrt{n})$. Пусть $\rho(n)$ — функция, удовлетворяющая условию $\rho(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Если $0 < \alpha \leq 1/6$, то условие

$$\mathbf{E}\, \exp\{|X_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\} < \infty \tag{3}$$

достаточно для того, чтобы

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \to 1, \quad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \to 1 \tag{4}$$

равномерно относительно x в области $0 \le x \le n^\alpha/\rho(n)$, и необходимо для того, чтобы соотношения (4) имели место равномерно относительно x в области $0 \le x \le n^\alpha \rho(n)$. Если же $1/6 < \alpha < 1/2$, то условия (3) и

$$\gamma_m = 0 \quad (m = 3, \ldots, s+2) \tag{5}$$

достаточны для того, чтобы соотношения (4) имели место равномерно относительно x в области $0 \le x \le n^\alpha/\rho(n)$, и необходимы для того, чтобы эти соотношения имели место равномерно относительно x в области $0 \le x \le n^\alpha \rho(n)$. Здесь γ_m — кумулянт порядка m случайной величины X_1, а s есть целое неотрицательное число, определяемое неравенствами $s/(2(s+2)) < \alpha < (s+1)/(2(s+3))$. Заметим, что при $\alpha = 1/2$ условие (3) совпадает с условием Крамера, а при $\alpha < 1/2$ представляет собой ослабление условия Крамера.

Ю. В. Линник получил также соответствующие локальные предельные теоремы для больших уклонений при ослаблении условия Крамера и предельные теоремы для больших уклонений на всей оси, т. е. теоремы об асимптотическом поведении вероятностей вида $\mathbf{P}(S_n \ge x)$ для сумм независимых случайных величин, без каких-либо ограничений на порядок роста x.

Работы Ю. В. Линника по предельным теоремам для больших уклонений сумм независимых случайных величин получили большой отклик в отечественной и зарубежной литературе. В. В. Петров [35] при условиях (3) и $\alpha < 1/2$ исследовал зоны, в которых вместо нормальной сходимости (4) имеют место более общие асимптотические соотношения, связанные с отрезками ряда Крамера. Л. В. Осипов [36] нашел условия, необходимые и достаточные для того, чтобы соотношения (4) (или только что упомянутые асимптотические соотношения) выполнялись в области $0 \le x \le bn^\alpha$ равномерно относительно x, где $\alpha < 1/2$ и b — положительные постоянные. Предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин, обобщающие теоремы Ю. В. Линника, получены В. В. Петровым [35]. В [37] найдены асимптотические представления для вероятностей $\mathbf{P}(S_n \ge nx)$ и $\mathbf{P}(S_n = nx)$, равномерные относительно x в области $\mathbf{E}\, X_1 + \varepsilon \le x \le A - \varepsilon$, где S_n есть сумма n независимых случайных величин с одинаковым нерешетчатым или решетчатым распределением соответственно, удовлетворяющим одностороннему аналогу условия Крамера, ε — произвольная положительная постоянная, для постоянной A указано явное представление. Интересные дополнения к этим результатам получены Л. В. Розовским (см., например, [38, 39]).

Наряду с предельными теоремами могут быть полезными неравенства для вероятностей больших уклонений сумм S_n независимых случайных величин, справедливые для любого числа слагаемых. В. В. Петров получил следующий результат для распределений сумм n независимых случайных величин. Пусть существуют положительные постоянные $g_1, \ldots, g_n$ и T, такие что $\mathbf{E}\, e^{tX_k} \le e^{g_k t^2/2}$ $(k = 1, \ldots, n)$ для $0 \le t \le T$. Положим $G_n = \sum_{k=1}^n g_k$. Тогда справедливы неравенства

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \le \exp\{-x^2/(2\, G_n)\}, \qquad \text{если } 0 \le x \le G_n T,$$

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \le \exp\{-Tx/2\}, \qquad \text{если } x \ge G_n T.$$

Имеет место левосторонний аналог этого утверждения и следствие этих утверждений, в котором условие на производящую функцию моментов предполагается выполненным в области $|t| \le T$. Совокупность сформулированных условий влечет за собой выполнение условия Крамера. Полученный результат сильнее, чем более сложно формулируемые неравенства С. Н. Бернштейна, и доказывается гораздо проще.

Книги И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [40] и В. В. Петрова [41, 42] содержат результаты авторов и другие материалы, связанные с предельными теоремами для сумм независимых случайных величин.

3. Закон больших чисел. Большое место в современных исследованиях занимают работы по сильным предельным теоремам теории вероятностей, включающие различные формы усиленного закона больших чисел и закона повторного логарифма для последовательностей независимых случайных величин, а также при замене условия независимости каким-либо условием зависимости или при снятии условия независимости.

Для последовательности независимых неодинаково распределенных случайных величин А. И. Мартикайнен [43] нашел необходимые и достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел с произвольной (не обязательно монотонной) последовательностью нормирующих постоянных. Если $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин и $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая что $\liminf a_{n+1}/a_n > 1$, то $S_n/a_n \to 0$ п. н. тогда и только тогда, когда $\sum \mathbf{P}(|X_n| \geq \varepsilon a_n) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, как показал Л. В. Розовский [44].

Представляют интерес оценки роста сумм случайных величин почти наверное в терминах суммы моментов этих величин. Для формулировки результатов этого типа, полученных В. В. Петровым [45], потребуются некоторые дополнительные обозначения. Множество функций $\psi(x)$, таких что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 (не обязательно одном и том же для различных функций ψ) и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится (расходится), будет обозначаться Ψ_c (соответственно Ψ_d). Например, $\psi(x) = x^\alpha \in \Psi_c$ для любого $\alpha > 0$, $\psi(x) = (\log x)^{1+\delta} \in \Psi_c$ для любого $\delta > 0$, $\psi(x) = \log x \in \Psi_d$.

Пусть $g(x)$ — четная непрерывная функция, положительная и строго возрастающая в области $x > 0$, причем $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, такая что $\mathbf{E}\, g(X_n) < \infty$ при всех n. Предположим, что выполнено какое-нибудь из следующих двух условий:

(A) функция $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$,

(B) $x/g(x)$ и $g(x)/x^2$ не возрастают в области $x > 0$.

В случае (B) дополнительно предполагается, что $\mathbf{E}\, X_n = 0$ для всех n.

Пусть далее, $M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\, g(X_k) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$S_n = o\big(g^{-1}(M_n\, \psi(M_n))\big) \quad \text{п. н.} \tag{6}$$

для любой функции $\psi \in \Psi_c$, где g^{-1} обозначает функцию, обратную к g.

Если вместо $\psi \in \Psi_c$ взять медленнее растущую функцию $\psi \in \Psi_d$, то, как показано в [45], сделанное утверждение может не выполняться.

Формулировки сильно упрощаются, если положить $g(x) = |x|^p$, где $0 < p \leq 2$. В частности, для $p = 2$ получаем следующее утверждение.

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $B_n = \mathbf{D}\, S_n$. Если $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то $S_n - \mathbf{E}\, S_n = o(\sqrt{B_n\, \psi(B_n)})$ п. н. для любой $\psi \in \Psi_c$. Это утверждение может не выполняться для медленнее растущей функции $\psi \in \Psi_d$.

Отсюда следует, что для суммы S_n независимых случайных величин с конечными дисперсиями и неограниченно возрастающей дисперсией суммы $B_n = \mathbf{D}\, S_n$ справедливы следующие оценки порядка роста, каждая из которых сильнее предыдущей: при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$S_n - \mathbf{E}\, S_n = o\big(B_n^{1/2+\varepsilon}\big) \quad \text{п. н.},$$

$$S_n - \mathbf{E}\, S_n = o\big(B_n^{1/2}(\log B_n)^{1/2+\varepsilon}\big) \quad \text{п. н.},$$

$$S_n - \mathbf{E}\, S_n = o\big(B_n^{1/2}(\log B_n)^{1/2}(\log\log B_n)^{1/2+\varepsilon}\big) \quad \text{п. н.}$$

и т. д. В этих оценках нельзя заменить ε нулем, не вводя дополнительных условий.

В работе В. А. Егорова [46] содержатся обобщения этих результатов.

Как показано в [47], при полном отказе от предположения о независимости рассматриваемых случайных величин и при условии конечности абсолютных моментов порядка $p \le 1$ этих величин написанные оценки верны при замене $S_n - \mathbf{E}\, S_n$ на S_n и B_n на $M_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\, |X_k|^p$. В [48] показано, что, кроме того, при этом условии можно дополнительно заменить сумму S_n суммой $T_n = \sum_{k=1}^n |X_k|$.

В терминах классов Ψ_c и Ψ_d можно описать поведение $\liminf\ b(n)\, S_n$, где $b(n)$ есть заданная функция и S_n — сумма n независимых случайных величин. В [42, раздел 6.6], можно найти следующие результаты, представляющие собой обобщение и усиление некоторых результатов Чжуна и Эрдёша. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с характеристической функцией $f(t)$, удовлетворяющей условию $\limsup |f(t)| < 1$ при $|t| \to \infty$. Тогда $\lim \sqrt{n}\, \psi(n)\, |S_n| = \infty$ п. н. для любой функции $\psi \in \Psi_c$, а при дополнительных условиях $\mathbf{E}\, X_1 = 0$ и $\mathbf{D}\, X_1 < \infty$ имеем $\liminf \sqrt{n}\, \psi(n)\, |S_n| = 0$ п. н. для любой функции $\psi \in \Psi_d$.

Как заметил А. А. Марков, из неравенства Чебышёва непосредственно вытекает следующее предложение: если $\{X_n\}$ — произвольная последовательность случайных величин с конечными дисперсиями и выполнено условие $\mathbf{D}\, S_n/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, то $(S_n - \mathbf{E}\, S_n)/n \to 0$ по вероятности. В [49] показано, что некоторое усиление условия Маркова приводит к усиленному закону больших чисел. Именно, если $\{X_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{D}\, S_n = O(n^2/\psi(n)) \quad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c \tag{7}$$

и условию $\mathbf{E}\,(S_n - S_m) \le C(n-m)$ для всех достаточно больших $n - m$, где C — постоянная, то $(S_n - \mathbf{E}\, S_n)/n \to 0$ п. н. В этом предложении нельзя заменить условие (7) более слабым условием $\mathbf{D}\, S_n = O(n^2/\psi(n))$ для некоторой функции $\psi \in \Psi_d$.

В. В. Петров [50] доказал следующую теорему, в которой отсутствуют условия независимости и неотрицательности исходных случайных величин. Если $\mathbf{E}\, X_n = 0$, $\mathbf{E}\, |X_n|^p < \infty$ для всех n и некоторого $p > 1$ и выполнено условие $\mathbf{E}\, |S_n - S_m|^p \le C(n-m)^{pr-1}$ для всех n, m, таких что $n > m \ge 0$, где $r \ge 1$ и C — постоянная, то $S_n/n^r \to 0$ п. н. Отсюда следует, что для последовательности случайных величин с конечными дисперсиями условие $\mathbf{D}\,(S_n - S_m) \le C(n-m)^{2r-1}$ для всех n, m, таких что $n > m$, где $r \ge 1$, влечет за собой соотношение $(S_n - \mathbf{E}\, S_n)/n^r \to 0$ п. н.

4. Закон повторного логарифма. Наиболее известными результатами среди теорем о законе повторного логарифма являются теоремы Колмогорова и

Хартмана—Винтнера, относящиеся к последовательностям независимых неодинаково распределенных и одинаково распределенных случайных величин соответственно. Формулировки этих теорем и ряда их обобщений можно найти, например, в [41].

Применимость центральной предельной теоремы к последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями не влечет за собой применимость закона повторного логарифма, однако довольно слабая оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме уже обеспечивает эту применимость, как показывает следующая теорема В. В. Петрова [51].

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, такая что $\mathbf{E}\, X_n = 0$, $\mathbf{D}\, X_n < \infty$ для всех n. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\, X_k, \quad R_n = \sup_x |\mathbf{P}(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x)|,$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. Если выполнены условия $B_n \to \infty$ $(n \to \infty)$,

$$B_{n+1}/B_n \to 1, \tag{8}$$

$$R_n = O((\log B_n)^{-1-\delta}) \quad \text{для некоторого } \delta > 0, \tag{9}$$

то имеет место соотношение

$$\limsup\ S_n/(2\, B_n \log\log B_n)^{1/2} = 1 \quad \text{п. н.} \tag{10}$$

В. А. Егоров [52, 53] показал, что в условиях этой теоремы нельзя заменить положительное число δ нулем.

Как показано в [54], если в сформулированной теореме опустить условие (8), имеет место соотношение (10) с заменой знака равенства знаком $\leq$. Имеются публикации, в которых соотношения типа (10) получены для произвольной неубывающей числовой последовательности $\{B_n\}$ и последовательности $\{X_n\}$ независимых случайных величин без предположений о существовании каких-либо моментов у этих величин.

А. И. Мартикайнен, А. Розальский и В. Пруитт независимо друг от друга и почти одновременно опубликовали следующий результат: если для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}$ справедливо равенство $\limsup\ S_n/(2\,n \log\log n)^{1/2} = 1$ п. н., то $\mathbf{E}\, X_1 = 0$ и $\mathbf{D}\, X_1 = 1$ (ссылки можно найти в [42]).

Многие работы посвящены обобщенному закону повторного логарифма для последовательностей случайных величин без предположений о независимости и существовании каких-либо моментов у рассматриваемых случайных величин. В этих работах исследованы условия, при которых справедливы соотношения $\limsup S_n/a_n \leq 1$ п. н. или $\limsup S_n/a_n = 1$ п. н., где $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$; при этом не всегда предполагается неубывание нормирующей числовой последовательности. С такого рода нормирующими последовательностями приходится сталкиваться при исследовании закона повторного логарифма для последовательностей m-зависимых или m-ортогональных случайных величин. Существует обширная литература по предельным теоремам для последовательностей m-зависимых случайных величин и для последовательностей ортогональных случайных величин. Понятие последовательности m-ортогональных случайных величин было введено в [55]; там же и в [56] получены теоремы о законе повторного логарифма для этих последовательностей.

Для последовательности независимых случайных величин А. И. Мартикайнен и В. В. Петров нашли условия, необходимые и достаточные для применимости обобщенного закона повторного логарифма с неубывающей нормирующей числовой последовательностью (см., например, [42, раздел 7.3]). Более просто формулируемые достаточные условия без предположения о независимости можно найти в [56].

Много внимания в литературе по предельным теоремам теории вероятностей уделено сильным предельным теоремам для приращений сумм независимых случайных величин. В этой области одним из предметов исследования являются условия, при которых имеют место равенства типа $\limsup U_n/b_n = \limsup W_n/b_n = 1$ п. н., где

$$U_n = \max_{0\le k\le n-a_n}(S_{k+a_n} - S_k),$$

$$W_n = \max_{0\le k\le n-a_n}\max_{1\le j\le a_n}(S_{k+j} - S_k), \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

$\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\{a_n\}$ — последовательность целых положительных чисел, $a_n \le n$. При $a_n = n$ имеем $U_n = S_n$, $W_n = \max\limits_{1\le k\le n} S_k$. В цикле работ А. Н. Фролова (см. [57, 58] и указанную там литературу) исследована зависимость асимптотического поведения U_n и W_n от скорости роста последовательности $\{a_n\}$. В частности, получены обобщения теорем Эрдёша—Реньи и Чёргё—Ревеса.

5. Аппроксимация распределений сумм независимых слагаемых. В начале 1960-х годов И. А. Ибрагимов заинтересовался двумя задачами о точности безгранично делимой аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, поставленными в середине 1950-х годов А. Н. Колмогоровым [59]. В монографии И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [40] этой тематике посвящена отдельная глава. В совместной статье И. А. Ибрагимова и Э. Л. Пресмана [60] был получен ряд результатов. В частности, была доказана оптимальная (с точностью до логарифма) оценка близости n-кратных сверток F^n симметричных одномерных вероятностных распределений F с сопровождающими безгранично делимыми законами $e(nF)$ вида

$$\rho(F^n, e(nF)) \le c\, n^{-1/2}(\log n + 1). \tag{11}$$

Здесь $\rho(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — классическое равномерное расстояние Колмогорова между соответствующими функциями распределения, а $e(nF)$ — безгранично делимое распределение с характеристической функцией $\exp\{n(\widehat{F}(t) - 1)\}$, $t \in \mathbf{R}$, где $\widehat{F}(t)$ — характеристическая функция вероятностного распределения F. Символами c и $c(\,\cdot\,)$ (иногда с индексами) здесь и далее мы обозначаем, вообще говоря, различные положительные абсолютные постоянные и величины, зависящие только от аргумента в скобках. Функция концентрации случайной величины Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ определяется с помощью равенства

$$Q(F, \tau) = \sup_{x\in\mathbf{R}} \mathbf{P}(Y \in [x, x+\tau]), \quad \tau \ge 0.$$

Указанная тематика была интересна и важна тем, что исследовался случай произвольных распределений слагаемых, без стандартных предположений моментного характера. Руководствуясь этим, И. А. Ибрагимов стал предлагать задачи Колмогорова своим ученикам. В результате обе задачи были решены его учениками, выпускниками Ленинградского университета Т. Араком и А. Ю. Зайцевым. В 1986 году в Трудах МИАН была опубликована совместная монография Арака и Зайцева [61], содержащая изложение этих результатов.

Т. Арак получил в начале 1980-х годов полное решение первой задачи Колмогорова, доказав в работе [62] следующий замечательный результат: *Существует абсолютная константа c, такая что для любого одномерного распределения вероятностей F и для любого натурального числа n существует безгранично делимое распределение D_n, такое что*

$$\rho(F^n, D_n) \le c\, n^{-2/3}. \tag{12}$$

Тем самым,

$$\varphi(n) = \sup_F \rho(F^n, \mathfrak{D}) \le c\, n^{-2/3}, \tag{13}$$

где $\mathfrak{D}$ — совокупность всех одномерных безгранично делимых распределений. Арак [63] установил также, что имеет место аналогичная оценка снизу:

$$\varphi(n) \ge c\, n^{-2/3}. \tag{14}$$

В 1986 году эти результаты докладывались Т. Араком в приглашенном докладе на Международном математическом конгрессе в Беркли.

Многомерный аналог неравенства (13) пока не получен. Э. Л. Пресман [64] получил в d-мерной ситуации оценку вида

$$\varphi_d(n) = \sup_F \rho_d(F^n, \mathfrak{D}_d) \le c(d)\, n^{-1/3}. \tag{15}$$

Здесь $\rho_d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — равномерное расстояние между соответствующими d-мерными функциями распределения, $\mathfrak{D}_d$ — совокупность всех d-мерных безгранично делимых распределений.

Несколько ранее Арак [65] показал, что если F — симметричное одномерное распределение с нетрицательной при всех $t \in \mathbf{R}$ характеристической функцией, то

$$\rho(F^n, e(nF)) \le c\, n^{-1}. \tag{16}$$

Тем самым, для конкретных распределений F скорость убывания величины $\rho(F^n, \mathfrak{D})$ может быть значительно выше, чем $O(n^{-2/3})$. В середине 1990-х годов А. Ю. Зайцев [66] сформулировал гипотезу о том, что для любого одномерного распределения F существует зависящая от F величина $c(F)$, такая что $\rho(F^n, \mathfrak{D}) \le c(F)\, n^{-1}$ для любого натурального n. Ранее Э. Л. Пресман [67] показал, что это верно для биномиального распределения, когда распределение F сосредоточено в двух точках. Для некоторых распределений гипотеза была подтверждена в работах Чяканавичюса [68, 69] и Чяканавичюса и Вана [70]. В частности, в работе [69] показано, что гипотеза верна для дискретных распределений, сосредоточенных в конечном числе точек.

Для решения упомянутых выше задач Арак использовал новые оценки для функций концентрации сумм независимых случайных величин. Эти оценки были сформулированы в терминах арифметической структуры носителей распределений слагаемых. Было показано, что если функция концентрации суммы велика, то носители распределений слагаемых сосредоточены вблизи некоторого множества с нетривиальной арифметической структурой.

В недавно опубликованной работе Ф. Гётце, Ю. С. Елисеевой и А. Ю. Зайцева [71] показано, что результаты Арака позволяют получить оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $S_a = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ в проблеме Литтлвуда—Оффорда, впервые рассмотренной в работах [72] и [73]. В этом случае мы имеем дело с суммами неодинаково распределенных случайных величин с распределениями специального вида. Получены оценки, имеющие неасимптотический характер, справедливые без дополнительных предположений, выраженных в терминах количества слагаемых n, типа условия $Q(\mathcal{L}(S_a), \tau) \geq n^{-A}$, предполагаемого в формулировке введенного в работах Нгуена, Тао и Ву [74–78] так называемого «обратного принципа» в проблеме Литтлвуда—Оффорда. Исследована взаимосвязь этих оценок. В работе [71] показано, что из результатов Арака вытекают следствия, которые можно интерпретировать как проявления обратного принципа для проблемы Литтлвуда—Оффорда. Часть из них имеет непустое пересечение с результатами Нгуена, Тао и Ву, в которых обсуждается арифметическая структура коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ при условии $Q(F_a, \tau) \geq n^{-A}$, где A — некоторая положительная константа.

Кроме того, в монографии [61] содержатся некоторые структурные результаты, из которых вытекают утверждения, являющиеся, по-видимому, новыми в проблеме Литтлвуда—Оффорда и не имеющие аналогов в литературе.

Другой ученик И. А. Ибрагимова, А. Ю. Зайцев, в начале своей научной деятельности занимался решением второй задачи, поставленной в работе А. Н. Колмогорова [59]. Ему удалось получить правильную по порядку оценку точности безгранично делимой аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, распределения которых сосредоточены на отрезке малой длины τ с точностью до малой вероятности p. Оказалось, что точность аппроксимации в метрике Леви имеет порядок $p+\tau \log(1/\tau)$, что значительно точнее как первоначального результата А. Н. Колмогорова $p^{1/5} + \tau^{1/2} \log(1/\tau)$ (см. [59]), так и полученных позднее результатов других авторов (см., например, [60]). В качестве приближающих использовались так называемые сопровождающие безгранично делимые распределения. Более того, как показал Т. Арак, оценка оказалась правильной по порядку. Изложение этих результатов можно найти в работе [79] и в монографии [61]. Позднее в работе [80] было показано, что аналогичная оценка справедлива и в многомерном случае, причем вместо абсолютной константы в оценке появляется множитель $c(d)$, зависящий только от размерности d. В процессе доказательства было установлено, что при $p = 0$ (то есть когда нормы слагаемых ограничены постоянной τ с вероятностью единица) для любого фиксированного $\lambda > 0$ случайный вектор X, имеющий то же распределение, как рассматриваемая сумма, может быть так построен на одном вероятностном пространстве с соответствующим гауссовским вектором Y, что

$$\mathbf{P}(\|X - Y\| > \lambda) \leq c_1\, d^2\, \exp\big\{ -\lambda / c_2\, d^2 \tau \big\} \tag{17}$$

(см. [81, 82]). Более того, А. Ю. Зайцев [82] доказал, что такой же результат справедлив для векторов с распределениями из введенного им класса $\mathcal{A}_d(\tau)$ распределений с достаточно медленно растущими семиинвариантами.

Класс $\mathcal{A}_d(\tau)$ (с фиксированным $\tau \geq 0$) состоит из d-мерных распределений F, для которых функция

$$g(z) = g(F,z) = \log \int_{\mathbf{R}^d} e^{\langle z,x\rangle} F\{dx\} \quad (g(0)=0) \tag{18}$$

определена и аналитична при $\|z\|\,\tau < 1$, $z \in \mathbf{C}^d$, и

$$\bigl|d_u d_v^2\, g(z)\bigr| \le \|u\|\,\tau\,\bigl\langle \mathbb{D}\,v, v\bigr\rangle \tag{19}$$

для всех $u,v \in \mathbf{R}^d$ и $\|z\|\;\tau < 1$, где $\mathbb{D} = \operatorname{cov} F$, а $d_u\, g$ — производная функции g в направлении u.

Класс $\mathcal{A}_d(\tau)$ замкнут относительно свертки и содержит, в частности, всевозможные свертки распределений, сосредоточенных на шаре радиуса $c\,\tau$ с центром в нуле. Он содержит также произвольные безгранично делимые распределения со спектральными мерами, сосредоточенными на том же шаре. Применяя к случайному вектору с распределением из класса $\mathcal{A}_d(\tau)$ линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$, мы получаем вектор с распределением из класса $\mathcal{A}_m\left(\|\mathbb{A}\|\,\tau\right)$. Если у некоторого d-мерного случайного вектора ξ конечны экспоненциальные моменты $\mathbf{E}\,e^{\langle h,\xi\rangle} < \infty$ при всех $h \in V$, где $V \subset \mathbf{R}^d$ — некоторая окрестность нуля, то $F = \mathcal{L}(\xi) \in \mathcal{A}_d(c(F))$.

Из неравенства (17) вытекают некоторые известные результаты о вероятностях больших уклонений. В предположении, что независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ с конечными экспоненциальными моментами имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии, из (17) легко выводится, что

$$\frac{\mathbf{P}(n^{-1/2}\,(X_1 + \cdots + X_n) > x)}{\mathbf{P}(\eta > x)} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{20}$$

если $0 < x = x_n = o\left(n^{1/6}\right)$ (см. (4)). Здесь η — стандартная нормальная случайная величина. Тем самым, само неравенство (17) можно интерпретировать как простую формулировку многомерного аналога соотношения (9).

Другой важный частный случай оценки точности безгранично делимой аппроксимации получается при $\tau = 0$, когда правая часть оценки равномерного расстояния между функциями распределения $\rho_d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ имеет вид $c(d)\,p$ (см. [80, 83]). В работе [84] этот результат интерпретируется как общая оценка точности аппроксимации выборки, составленной из неодинаково распределенных редких событий общего вида, пуассоновским точечным процессом. Для *любой* измеримой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^d$ справедливо неравенство

$$\rho_d\biggl(\mathcal{L}\Bigl(\sum_j f(X_j)\Bigr), \mathcal{L}\Bigl(\sum_k f(Y_k)\Bigr)\biggr) \le c(d)\,p.$$

Здесь $\mathcal{X}$ — пространство редких событий, X_j — независимые редкие события, происходящие с вероятностями, не превосходящими p, а Y_k — точки соответствующего пуассоновского точечного процесса.

Некоторые оптимальные оценки получены в других работах для равномерного расстояния $\rho(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ в общем случае. В частности, в работах [85, 86] удалось усилить результаты работ [60, 87] и получить простые одномерные формулировки результатов, из которых одновременно вытекают как правильные по порядку оценки точности безгранично делимой аппроксимации сверток сопровождающими законами, так и весьма общие оценки в центральной предельной теореме. Поскольку «хвосты» распределений слагаемых произвольны, результаты охватывают и активно изучаемый в последнее время случай «тяжелых хвостов» распределений слагаемых. В работе [88] уточняется результат Ле Кама [87] об аппроксимации сверток одномерных вероятностных распределений F_j свертками безгранично делимых распределений $e(F_j)$.

При доказательстве этих результатов А. Ю. Зайцев использовал методы, применявшиеся Араком при доказательстве неравенства (2). Ему удалось видоизменить эти методы, приспособив их к многомерному случаю (см. [89–91]). В частности, в работе [90] получен многомерный аналог неравенства (2). Аналогичными методами был получен также следующий парадоксальный результат (см. [92–94]). Существует такая зависящая только от размерности d величина $c(d)$, что для любого симметричного распределения F и любого натурального n равномерное расстояние между степенями в смысле свертки F^n допускает оценки $\rho_d(F^n, F^{n+1}) \leq c(d)\, n^{-1/2}$ и $\rho_d(F^n, F^{n+2}) \leq c(d)\, n^{-1}$, причем обе оценки имеют неулучшаемый порядок. В работе [93] удалось также убрать логарифмический множитель в неравенстве (1).

Методы Арака использовал в своих исследованиях по безгранично делимой аппроксимации сверток одномерных вероятностных распределений В. Чяканавичюс. Недавно была опубликована его монография [95], содержащая изложение результатов и методов.

В работе [96] А. Ю. Зайцеву удалось также дать отрицательный ответ на вопрос А. Н. Колмогорова и Ю. В. Прохорова о возможности безгранично делимой аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в смысле расстояния по вариации. Было построено такое одномерное вероятностное распределение, все n-кратные свертки которого равномерно отделены от множества безгранично делимых законов в смысле расстояния по вариации не менее чем на расстояние $1/14$.

Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов обычно оценивается в двух различных, но тесно связанных ситуациях. Оценивание точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности может быть сведено к этим задачам.

Одна из них формулируется следующим образом. Требуется построить на одном вероятностном пространстве независимые случайные векторы $X_1, \dots, X_n$ (с заданными, вообще говоря, неодинаковыми распределениями, $\mathbf{E}\, X_j = 0$ и $\mathbf{E}\, \|X_j\|^2 < \infty$) и независимые гауссовские случайные векторы $Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, чтобы $\mathbf{E}\, Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \dots, n$, и чтобы величина

$$\Delta_n(X, Y) = \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \Big\| \sum_{j=1}^{s} X_j - \sum_{j=1}^{s} Y_j \Big\| \tag{21}$$

была бы по возможности мала с достаточно большой вероятностью.

В рамках второй задачи требуется построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $X_1, X_2, \dots$ (с заданным распределением $\mathcal{L}(X)$ с нулевым средним и $\mathbf{E}\, \|X\|^2 < \infty$) и последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, Y_2, \dots$ таким образом, чтобы

$$\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(X), \quad \mathbf{E}\, Y_j = 0, \quad \operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X, \qquad j = 1, 2, \dots, \tag{22}$$

и чтобы

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} Y_j \Big\| = O(f(n)) \ \text{ или } \ o(f(n)) \qquad \text{п. н.}$$

при $n \to \infty$ для последовательности $f(n)$, стремящейся к бесконечности как можно медленнее.

Наиболее существенным результатом, полученным А. Ю. Зайцевым в 1990-е годы, является многомерный вариант классического одномерного результата Комлоша, Майора и Тушнади [97] об оценке точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при существовании экспоненциальных моментов у слагаемых. По аналогии с одномерным результатом А. И. Саханенко [98], результат работы [99] формулируется в виде оценки экспоненциального момента величины $\Delta_n(X, Y)$. При этом в явном виде указана зависимость постоянных от размерности и распределений слагаемых (см. [98–100]). Эта зависимость сформулирована в терминах принадлежности распределений слагаемых упомянутому выше классу $\mathcal{A}_d(\tau)$. В работе [99] удалось избавиться от излишнего логарифмического множителя в результате Айнмаля [100]. Для второй задачи это соответствует оценке порядка $O(\log n)$ (вместо $O(\log^2 n)$) для векторов с конечными экспоненциальными моментами, в одномерном случае полученной в работе [97]. Несколько позднее в работе [101] удалось перенести результат на случай разнораспределенных слагаемых и получить полный многомерный аналог одномерного результата А. И. Саханенко [98], обобщившего и уточнившего результаты [97]. В 2002 году эти результаты докладывались А. Ю. Зайцевым в приглашенном докладе на Международном математическом конгрессе в Пекине [102].

В конце прошлого десятилетия в работах [103–105] изучались оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых d-мерных случайных векторов X_j с конечными моментами вида $\mathbf{E}\, H(\|X_j\|)$, где H — монотонная функция, растущая не медленнее, чем x^2, и не быстрее, чем $\exp(cx)$. Получены многомерные обобщения результатов Комлоша, Майора и Тушнади [97] и А. И. Саханенко [106]. В частности, для второй задачи в работе [105] получена оценка вида $O(H^{-1}(n))$, где H^{-1} — обратная функция для функции H. Это уточняет многомерный результат Айнмаля [100], доказавшего то же утверждение для более узкого класса функций H.

При рассмотрении первой задачи в частном случае, когда $H(x) = x^\gamma$, $\gamma > 2$, в совместных работах Ф. Гётце и А. Ю. Зайцева [107] и [108] получены оценки, оказавшиеся оптимальными по порядку для одинаково распределенных слагаемых. В случае, когда $X_1, \dots, X_n$ — d-мерные независимые случайные векторы, одинаково распределенные со случайным вектором X со стандартным единичным ковариационным оператором $\operatorname{cov} X = \mathbb{I}_d$, в работе [108] было показано, что существует такое построение, при котором выполняется неравенство

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X, Y)\right)^\gamma \le c(\gamma)\, A\, n\, \mathbf{E}\, \|X\|^\gamma \quad \text{при всех } n = 1, 2, \dots, \tag{23}$$

где

$$A = A(\gamma, d) = \max\Big\{ d^{11\gamma},\ d^{\gamma(\gamma+2)/4}\, (\log d + 1)^{\gamma(\gamma+1)/2} \Big\}. \tag{24}$$

Это утверждение представляет собой многомерный вариант результата А. И. Саханенко [106] для частного случая одинаково распределенных слагаемых. В общем случае А. И. Саханенко [106] доказал, что при $d = 1$ для первой задачи существует такое построение, что

$$\mathbf{E}\,\big(\Delta_n(X,Y)\big)^\gamma \le c\,\gamma^{2\gamma}\,\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|X_j\|^\gamma\,. \tag{25}$$

В работе [107] было установлено, что в многомерном случае справедливо аналогичное утверждение и для неодинаково распределенных слагаемых, но при дополнительных условиях невырожденности ковариационных операторов частичных сумм и регулярности частичных сумм моментов порядка γ норм слагаемых. С помощью результатов [107] в работах [109] и [110] рассмотрен и бесконечномерный случай.

На основе перечисленных выше результатов о сильной гауссовской аппроксимации в журнале «Успехи математических наук» был опубликован обзор [111].

В работе А. Ю. Зайцева [112] для любого $\varepsilon > 0$ построены такие двумерные распределения, что расстояние по вариации между их проекциями на произвольное одномерное направление не превосходит ε, хотя равномерное расстояние между соответствующими двумерными функциями распределения равно $1/2$. Это свидетельствует о неустойчивости обращения преобразования Радона многомерных вероятностных распределений. Существуют распределения, практически неразличимые методами томографии и в то же время далекие друг от друга.

В предположении, что независимые одинаково распределенные d-мерные случайные слагаемые $X, X_1, X_2, \ldots$ имеют нулевые математические ожидания и конечные моменты четвертого порядка, в работах [113, 114] было показано, что для множеств, ограниченных поверхностями второго порядка, точность аппроксимации короткими асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме имеет порядок $O(1/n)$, где n — число слагаемых, при условии, что размерность пространства не ниже пяти. Ранее аналогичные утверждения были получены в совместной работе Ф. Гётце и В. Бенткуса [115] при условии, что размерность пространства не ниже девяти. В работе [114] девять заменено на пять, причем дальнейшее понижение размерности невозможно. Оценки равномерны относительно изометричных операторов, участвующих в определении поверхностей. В работе [114] получены явные простые выражения для степенной зависимости соответствующих констант от моментов четвертого порядка и от собственных чисел ковариационного оператора конечномерных слагаемых. Доказано, в частности, что при $5 \le d < \infty$ имеет место соотношение

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\big|\mathbf{P}(n^{-1/2}\,\|X_1+\cdots+X_n\|<x)-\mathbf{P}(\|\eta\|<x)\big| \le$$
$$\le c(d)\,\sigma^d\,(\det\mathbb{C})^{-1/2}\,\mathbf{E}\,\|\mathbb{C}^{-1/2}\,X\|^4/n.$$

Здесь $\mathbb{C}$ — ковариационный оператор случайного вектора X, $\sigma^2 = \mathbf{E}\,\|X\|^2$, а η — центрированный гауссовский вектор с ковариационным оператором $\mathbb{C}$. Заметим, что результаты работы [113] не перекрываются результатами работы [114]. Величина $\sigma^d\,(\det\mathbb{C})^{-1/2}$ при $\sigma^2 = 1$ заменяется в [113] величиной, зависящей только от пяти максимальных собственных чисел оператора $\mathbb{C}$.

В последние годы опубликовано несколько работ А. Ю. Зайцева об оценивании функций концентрации распределений сумм независимых случайных величин. Кроме уже упоминавшейся работы [71] в недавних работах [116], [117] и [118] были уточнены неравенства для оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $S_a = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ в проблеме

Литтлвуда—Оффорда из работ [119–121] и [122]. Эти результаты отражают зависимость оценок от арифметической структуры весовых коэффициентов a_k и от общего распределения случайных величин X_k.

Эссеен [123] показал, что $Q(F^n, \lambda) = o(n^{-1/2})$ при фиксированном $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\,Y^2 = \infty$ и $F = \mathcal{L}(Y)$. В работах [124] и [125] были получены количественные уточнения этого результата.

В работе [126] исследован вопрос о связи скорости убывания $Q(F^n, \lambda)$ с предположениями о существовании конечных моментов $\mathbf{E}\,\psi(Y)$ у функций $\psi(Y)$. Показано, что никакие условия бесконечности моментов не могут обеспечить существенно более быстрого, чем $o(n^{-1/2})$, убывания функций концентрации $Q(F^n, \lambda)$.

6. Об одном классе предельных распределений для нормированных сумм независимых случайных величин. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность взаимно независимых случайных величин, и

$$S_n = \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - A_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

— последовательность нормированных сумм, имеющая при надлежащем выборе нормирующих констант B_n ($B_n \to \infty$) собственное предельное распределение. В середине 1950-х годов Б. В. Гнеденко [127] поставил проблему охарактеризовать класс предельных распределений таких сумм, когда среди законов распределения случайных величин ξ_n не более r различных. Этот класс обозначим P_r.

Эта проблема вызвала с самого начала живой интерес, причем была высказана гипотеза о том, что класс P_r должен совпадать с композицией устойчивых распределений, чему способствовали некоторые факты, как, например, описания P_1 и P_2, полученные В. М. Золотаревым и В. С. Королюком [128]. Однако в дальнейшем исследования показали, что гипотеза о характере P_r должна быть существенно уточнена.

Соответствующие результаты содержатся в работах А. А. Зингера [129, 130] в трех сформулированных там теоремах, которые позволяют описать законы, принадлежащие P_r, с помощью характера спектральных мер в их представлении Леви—Хинчина. При этом в теореме 3 приводится условие, при выполнении которого реализуется гипотеза Б. В. Гнеденко. Как явствует из формулировки теоремы 1, законы класса P_r представляют собой частный случай законов более общей природы, изученных впервые Ю. В. Линником [131] в связи с исследованием законов, допускающих одинаково распределенные линейные статистики в повторных выборках.

7. Предельные теоремы почти наверное. Предельная теорема почти наверное (ПТПН) — это утверждение о слабой сходимости с вероятностью единица (почти наверное) эмпирических мер, порожденных последовательностью случайных величин. Этот тип сходимости был независимо открыт Шатте и Брозамлером в 1988 г. и вызвал большой интерес (см., например, обзор [132]). Здесь мы описываем только результаты, полученные в Петербурге, где над этой темой работали И. А. Ибрагимов, М. А. Лифшиц, Е. С. Станкевич [133–138].

Начнем с достаточного условия для ПТПН для сумм независимых неодинаково распределенных случайных векторов [135].

Пусть $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых случайных векторов, принимающих значения в сепарабельном нормированном пространстве $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Рассмотрим нормированные суммы

$$\zeta_k = \frac{1}{B_k} \sum_{j=1}^{k} \xi_j - A_k, \qquad B_k > 0,\ A_k \in \mathcal{X},\ k \ge 1,$$

и предположим, что они удовлетворяют предельной теореме

$$\zeta_k \Rightarrow G, \qquad k \to \infty, \tag{26}$$

с некоторым предельным законом распределения G в $\mathcal{X}$.

Определим эмпирические меры

$$Q_n = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{n} b_k\, \delta_{\zeta_k}, \tag{27}$$

где $\{b_k\}$ — положительная ограниченная последовательность, удовлетворяющая условию

$$b_k \le \log(B_k/B_{k-1}), \qquad k \ge 2,$$

и $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Для $u \ge 1$ и функции $H : [1,\infty) \to (0,\infty]$ положим

$$M_H(u) = \sup_{n:\ u<\gamma_n<H(u)} \mathbf{P}\big\{ \log \|\zeta_n\| > u \big\}.$$

Тогда верна следующая теорема о сходимости почти наверное.

Теорема 7.1. *Предположим, что* $B_n \nearrow \infty$ *и верно* (26). *Если существует такая функция* H, *что*

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{H(u)} < \infty \qquad \text{и} \qquad \int_1^{\infty} \frac{M_H(u)\, du}{u} < \infty,$$

то $\mathbf{P}\{Q_n \Rightarrow G\} = 1$.

Результат остается верным для любой последовательности случайных векторов ζ_k, допускающих представление

$$\zeta_k = \frac{B_\ell}{B_k}\, \pi_{k,\ell}\,(\zeta_\ell)\, + \eta_{k,\ell}$$

при всех $\ell \le k$, где ζ_ℓ и $\eta_{k,\ell}$ независимы, а семейство линейных операторов $\{\pi_{k,\ell} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}\}$ равномерно ограничено. В такой форме он может применяться, например, к выборочным траекториям процессов частных сумм, возникающих в классическом принципе инвариантности.

Необходимо отметить, что в дальнейшем такой тип результатов получил развитие в работе Беркеша и Чаки [139], рассмотревших *нелинейные* функционалы от последовательностей независимых величин.

Далее в [135] исследована тонкая разница между центральной предельной теоремой (ЦПТ) и ее аналогом почти наверное (ЦПТПН). Беркеш и Делинг [140] установили эквивалентность ЦПТ и ЦПТПН в предположении

$$\sup_n \mathbf{E}\left(\log_+ \log_+ |\zeta_n|\right)^{1+h} < \infty$$

с произвольно малым $h > 0$. Следующий результат показывает, что параметр h в этом утверждении не может быть исключен.

Теорема 7.2. *Пусть $a > 1$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{a}{2})$ и $\xi_j = Y_j + X_j$, где $\{Y_j, X_j\}$ независимы в совокупности, величины Y_j — стандартные нормальные, и $X_j = 0$ для всех j за исключением последовательности $n_m = [\exp\{a^m\}]$. Пусть $X_{n_m} = \pm U_m$ с равными вероятностями $\frac{1}{2m}$ и амплитудой $U_m = n_m^\alpha$; положим $X_{n_m} = 0$ с оставшейся вероятностью $1 - \frac{1}{m}$.*

Тогда нормированные суммы

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

удовлетворяют условию

$$\sup_n \mathbf{E} \log_+ \log_+ |\zeta_n| < \infty$$

и центральной предельной теореме $\zeta_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, но предельная теорема почти наверное для них не выполнена.

В работе [138] исследована применимость ПТПН к нормированным значениям мартингалов с дискретным временем. Оказывается, в отличие от сумм независимых величин, даже при относительно сильных моментных условиях ПТПН не следует из классической предельной теоремы. Тем не менее ПТПН удается доказать при условиях, достаточно близких к тем, при которых доказываются классические предельные теоремы. Нужно лишь дополнительно следить за тем, чтобы приращения мартингала были асимптотически меньше, чем нормирующая последовательность. Интересно, что в пределе могут возникать *случайные* предельные распределения G.

Пусть $\{X_j\}$ — квадратично интегрируемая мартингал-разность с нулевым математическим ожиданием; $B_k \nearrow \infty$ — последовательность положительных чисел. Положим $\zeta_k = \frac{1}{B_k} \sum_{j \le k} X_j$. Эмпирические меры Q_n определим соотношением (27), причем будем предполагать, что соответствующие веса $\{b_k\}$ удовлетворяют условию

$$b_k \le \frac{B_k - B_{k-1}}{B_k}.$$

Пусть $\widetilde{Q}_n$ — аналогичные эмпирические меры, получаемые заменой ζ_n на самонормированные суммы $\frac{1}{U_k} \sum_{j \le k} X_j$, где $U_k^2 = \sum_{j \le k} X_j^2$.

Наконец, если η — неотрицательная случайная величина, то через $\mathcal{N}_\eta$ обозначим η-смесь нормальных законов, то есть распределение с характеристической функцией $\phi(t) = \mathbf{E} \exp\{-\eta t^2/2\}$.

Теорема 7.3. *Пусть $X_j, B_k, \zeta_k, U_k, b_k$ определены выше и пусть выполнено условие*

$$\sup_k \mathbf{E} \max_{j \le k} |X_j|^2 / B_k^2 < \infty.$$

Предположим также, что п. н. выполнены предельные соотношения $X_j/B_j \to 0$ и

$$\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{n} b_k \, \delta_{U_k^2/B_k^2} \Rightarrow \delta_\eta.$$

Тогда п. н. верно $Q_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,\eta)$ и $\widetilde{Q}_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Несколько результатов были получены для классической постановки задачи, которая выглядит следующим образом. Пусть $\{S_k\}$ — частные суммы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией $X_1, X_2, \ldots$ Обозначим $\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{k}} S_k$. Определим соответствующие эмпирические меры как

$$Q_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{\zeta_k}. \tag{28}$$

ЦПТПН утверждает, что $\mathbf{P}\{Q_n \Rightarrow \mathcal{N}\} = 1$, где $\mathcal{N}$ — стандартное нормальное распределение. Поэтому для любой непрерывной ограниченной функции h п. н. верно

$$\int h\, dQ_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} h(\zeta_k) \to \int h\, d\mathcal{N}.$$

Следующая теорема из [136] показывает, что данное утверждение остается в силе и для неограниченной функции, если только ее рост подчиняется минимальному условию.

Теорема 7.4. *Пусть $\{X_j\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Пусть Q_n — эмпирические меры из* (28), *а $\mathcal{N}$ обозначает стандартное нормальное распределение. Пусть $A, H_0 > 0$, и пусть функция $f : [A, \infty) \mapsto \mathbf{R}_+$ не убывает, но функция $x \mapsto f(x) \exp\{-H_0 x^2\}$ не возрастает и*

$$\int_A^\infty f\, d\mathcal{N} < \infty. \tag{29}$$

Тогда для для любой непрерывной функции h, удовлетворяющей оценке

$$|h(x)| \le f(|x|), \qquad |x| \ge A,$$

верно

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{n\to\infty} \int h\, dQ_n = \int h\, d\mathcal{N} \right\} = 1.$$

Утверждение теоремы, которое естественно трактовать как сходимость обобщенных моментов, станет неверным, если убрать предположения о регулярности и оставить только основное условие (29).

Для той же классической схемы ПТПН в работе [137] найдены необходимые условия для выполнения принципа больших уклонений. Как показали М. Хек [141], П. Марч и Т. Сеппяляйнен [142], если $\mathbf{E}\,|X_1|^m < \infty$ при всех $m > 0$, то меры Q_n удовлетворяют сильному принципу больших уклонений в пространстве $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ конечных неотрицательных мер, снабженном топологией слабой сходимости. Иными словами, для всех замкнутых множеств $F \subset \mathcal{M}(\mathbf{R})$ и всех открытых множеств $G \subset \mathcal{M}(\mathbf{R})$ справедливы соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \log \mathbf{P}\{Q_n \in F\} \le -\inf_{\mu \in F} I(\mu),$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \log \mathbf{P}\{Q_n \in G\} \ge -\inf_{\mu \in G} I(\mu).$$

Здесь функция уклонений I для вероятностных распределений равна энтропии процесса Орнштейна—Уленбека I_{OU} и обращается в бесконечность на остальных мерах. Отметим, что $I(\mu) = 0$ равносильно $\mu = \mathcal{N}(0, 1)$.

Оказалось, что в этом утверждении моментные условия оптимальны (хотя в классическом принципе больших уклонений для эмпирических мер моментные ограничения вообще не требуются).

Теорема 7.5. *Пусть последовательность эмпирических мер Q_n, соответствующая независимым одинаково распределенным величинам $\{X_j\}$, удовлетворяет сильному принципу больших уклонений с такой функцией уклонений I, что множество уровня $\{\mu : I(\mu) \leq r\}$ компактно при каждом $r \geq 0$. Тогда $\mathbf{E}\,|X_j|^m < \infty$ при всех $m > 0$.*

Интересный нестандартный подход к предельным теоремам почти наверное предложен в работе А. И. Мартикайнена [143].

8. Заключение. Таким образом, Ленинградская — Санкт-Петербургская школа теории вероятностей внесла значительный вклад в развитие теории суммирования независимых случайных величин. О достижениях ее представителей в других разделах вероятностно-статистической науки будет рассказано в последующих выпусках данной серии статей.

Литература

1. *Линник Ю. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. В кн.: Математика в Петербургском — Ленинградском университете / Под ред. В. И. Смирнова. Изд-во Ленингр. ун-та, 1970. С. 243–255.

2. *Буняковский В. Я.* Основания математической теории вероятностей. СПб., 1846. 495 с. Репринтное издание осуществлено в 2017 г. изд-вом Yoyo Media.

3. *Гнеденко Б. В.* Очерк по истории теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

4. *Андреев К. А.* Виктор Яковлевич Буняковский. Некрологический очерк. В кн.: Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при Императорском Харьковском университете. Харьков, 1891. Т. 2. С. 149–161.

5. *Чебышёв П. Л.* Теория вероятностей. Лекции, читанные в 1879–80 гг. По записи А. М. Ляпунова. Изданы академиком А. Н. Крыловым. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

6. *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. 3-е изд. СПб., 1913. 388 с.

7. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. 4-е изд. М.: Гостехтеориздат, 1946. 556 с.

8. *Ибрагимов И. А.* О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей. В кн.: Труды Санкт-Петербургского математического общества. 2000. Т. 8. С. 96–120.

9. *Seneta E.* Sergei Natanovich Bernstein. In: Statisticians of the Century / Eds. C. C. Heyde and E. Seneta. Springer, 2001. P. 339–345.

10. *Линник Ю. В.* Избранные труды. Теория вероятностей. Л.: Наука, 1981.

11. *Линник Ю. В.* Избранные труды. Математическая статистика. Л.: Наука, 1982.

12. *Никитин Я. Ю., Романовский И. В.* К 100-летию со дня рождения Юрия Владимировича Линника // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2(60). Вып. 3. С. 487–492.

13. *Линник Ю. В.* О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1947. Т. 11. С. 111–138.

14. *Петров В. В.* Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. С. 1013–1015.

15. *Ибрагимов И. А.* О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых случайных величин нормальным распределением // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. 11. Вып. 4. С. 632–655.

16. *Осипов Л. В.* Уточнение теоремы Линдеберга // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. 11. Вып. 2. С. 339–342.

17. *Осипов Л. В., Петров В. В.* Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12. Вып. 2. С. 322–326.

18. *Лифшиц Б. А.* О точности аппроксимации в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 31. Вып. 1. С. 107–121.

19. *Heyde C. C.* On the uniform metric in the context of convergence to normality // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1973. Bd. 25, N 2. P. 83–95.

20. *Осипов Л. В.* О точности приближения распределения суммы независимых случайных величин к нормальному распределению // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178, № 5. С. 1013–1016.

21. *Егоров В. А.* О скорости сходимости к нормальному закону, эквивалентной существованию второго момента // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. Вып. 1. С. 180–185.

22. *Розовский Л. В.* О точности оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. Вып. 4. С. 744–761.

23. *Ибрагимов И. А.* Об асимптотических разложениях Чебышёва—Крамера // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12. Вып. 3. С. 506–519.

24. *Осипов Л. В.* Об асимптотических разложениях функции распределения суммы случайных величин с неравномерными оценками остаточного члена // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1972. Вып. 1. С. 51–59.

25. *Петров В. В.* О некоторых полиномах, встречающихся в теории вероятностей // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1962. Вып. 19. С. 150–153.

26. *Петров В. В.* Асимптотические разложения для производных функции распределения суммы независимых слагаемых // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1960. Вып. 19. С. 9–18.

27. *Петров В. В.* Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. Вып. 3. С. 349–357.

28. *Петров В. В.* О локальных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. Вып. 2. С. 343–352.

29. *Cramér H.* Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités // Actual. Sci. Industr. Paris, 1938. N 736. P. 5–23.

30. *Петров В. В.* Обобщение предельной теоремы Крамера // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9, № 4. С. 195–202.

31. *Feller W.* Generalization of a probability limit theorem of Cramér // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 54, N 3. P. 361–372.

32. *Рихтер В.* Локальные предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен. 1957. Т. 2. Вып. 2. С. 214–229.

33. *Linnik Yu. V.* On probability of large deviations for the sums of independent variables. In: Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability. Vol. 2. Berkeley; Los Angeles: Univ. California Press, 1969. P. 289–306.

34. *Линник Ю. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин при учете больших уклонений. I; II; III // Теория вероятн. и ее примен. 1961. Т. 6. Вып. 2. С. 145–163; Вып. 4. С. 377–391; 1962. Т. 7. Вып. 2. С. 121–134.

35. *Петров В. В.* Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера. I, II // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1963. Вып. 19. С. 49–68; 1964. Вып. 1. С. 58–75.

36. *Осипов Л. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17. Вып. 2. С. 320–341; 1973. Т. 18. Вып. 3. С. 679.

37. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 310–322.

38. *Розовский Л. В.* О коэффициентах ряда Крамера // Теория вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43. Вып. 1. С. 161–166.

39. *Розовский Л. В.* О точности аппроксимации в предельных теоремах для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. 31. Вып. 2. С. 301–314.

40. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

41. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

42. *Petrov V. V.* Limit Theorems of Probability Theory. New York: Oxford University Press, 1995.

43. *Мартикайнен А. И.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел // Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24. Вып. 4. С. 814–821.

44. *Розовский Л. В.* О соотношении скорости сходимости в слабом и усиленном законе больших чисел // Литовский матем. сб. 1981. Т. 21, № 1. С. 155–167.

45. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14. Вып. 2. С. 193–202.

46. *Егоров В. А.* Несколько теорем об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17. Вып. 1. С. 84–98.

47. *Петров В. В.* О порядке роста сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. Вып. 3. С. 358–361.
48. *Петров В. В.* Об абсолютной сходимости рядов случайных величин почти наверное // Записки научн. семин. ПОМИ. 2014. Т. 431. С. 140–144.
49. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 2008. Т. 53. Вып. 2. С. 379–382.
50. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности зависимых случайных величин // Записки научн. семин. ПОМИ. 2012. Т. 408. С. 285–288.
51. *Петров В. В.* О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. 11. Вып. 3. С. 514–518.
52. *Егоров В. А.* О законе повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14. Вып. 4. С. 722–729.
53. *Егоров В. А.* Обобщение теоремы Хартмана—Винтнера о законе повторного логарифма // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1971. Вып. 7. С. 22–28.
54. *Петров В. В.* О законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 46. Вып. 4. С. 569–571.
55. *Петров В. В.* Последовательности m-ортогональных случайных величин // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1982. Т. 119. С. 198–202.
56. *Петров В. В.* О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 1. С. 49–52.
57. *Фролов А. Н.* Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. Вып. 1. С. 104–121.
58. *Фролов А. Н.* Предельные теоремы теории вероятностей. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014.
59. *Колмогоров А. Н.* Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. Вып. 4. С. 426–436.
60. *Ибрагимов И. А., Пресман Э. Л.* О скорости сближения распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. Вып. 4. С. 753–766.
61. *Арак Т. В., Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 174. 214 с.
62. *Арак Т. В.* О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I; II // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. Вып. 2. С. 225–245; 1981. Т. 26. Вып. 3. С. 449–463.
63. *Арак Т. В.* Уточнение нижней оценки для скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. Вып. 4. С. 767–772.
64. *Пресман Э. Л.* О многомерном варианте равномерной предельной теоремы Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. Вып. 2. С. 396–402.
65. *Арак Т. В.* О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25. Вып. 2. С. 225–246.
66. *Зайцев А. Ю.* Аппроксимация сверток сопровождающими законами при существовании моментов невысоких порядков // Записки научн. семин. ПОМИ. 1996. Т. 228. С. 135–141.
67. *Пресман Э. Л.* О сближении по вариации распределения суммы независимых бернуллиевских величин с пуассоновским законом // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30. Вып. 2. С. 391–396.
68. *Чяканавичюс В.* Об обобщенных пуассоновских аппроксимациях при моментных ограничениях // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. Вып. 1. С. 74–86.
69. *Čekanavičius V.* Infinitely divisible approximations for discrete nonlattice variables // Adv. Appl. Probab. 2003. Vol. 35, N 4. P. 982–1006.
70. *Čekanavičius V., Wang Y. H.* Compound Poisson approximations for sums of discrete nonlattice variables // Adv. Appl. Probab. 2003. Vol. 35, N 1. P. 228–250.
71. *Гётце Ф., Елисеева Ю. С., Зайцев А. Ю.* Неравенства Арака для функций концентрации и проблема Литтлвуда—Оффорда // Теория вероятн. и ее примен. 2017. Т. 62. Вып. 2. С. 241–266.
72. *Littlewood J. E., Offord A. C.* On the number of real roots of a random algebraic equation // Матем. сб. 1943. Т. 12(54), N 3. С. 277–286.
73. *Erdös P.* On a lemma of Littlewood and Offord // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51. P. 898–902.
74. *Tao T., Vu V.* Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices // Ann. Math. 2009. Vol. 169, N 2. P. 595–632.

75. *Tao T., Vu V.* From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices // Bull. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 46, N 3. P. 377–396.

76. *Tao T., Vu V.* A sharp inverse Littlewood–Offord theorem // Random Structures and Algorithms. 2010. Vol. 37, N 4. P. 525–539.

77. *Nguyen H., Vu V.* Optimal inverse Littlewood–Offord theorems // Adv. Math. 2011. Vol. 226, N 6. P. 5298–5319.

78. *Nguyen H., Vu V.* Small ball probabilities, inverse theorems and applications // Erdös Centennial Proceeding / Eds. L. Lovász et al. Springer, 2013. P. 409–463.

79. *Зайцев А. Ю., Арак Т. В.* О скорости сходимости во второй равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 28. Вып. 2. С. 351–374.

80. *Зайцев А. Ю.* Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 34. Вып. 1. С. 128–151.

81. *Zaitsev A. Yu.* On the Gaussian approximation of convolutions under multidimensional analogues of S. N. Bernstein's inequality conditions // Probab. Theory Rel. Fields. 1987. Vol. 74, N 4. P. 535–566.

82. *Зайцев А. Ю.* Оценки расстояния Леви—Прохорова в многомерной центральной предельной теореме для случайных векторов с конечными экспоненциальными моментами // Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. 31. Вып. 2. С. 246–265.

83. *Зайцев А. Ю.* О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28. Вып. 4. С. 625–636.

84. *Зайцев А. Ю.* Об аппроксимации выборки пуассоновским точечным процессом // Записки научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 298. С. 111–125.

85. *Зайцев А. Ю.* О равномерной аппроксимации функций распределения сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. Вып. 1. С. 45–52.

86. *Зайцев А. Ю.* Аппроксимация сверток вероятностных распределений безгранично делимыми законами при ослабленных моментных ограничениях // Записки научн. семин. ПОМИ. 1992. Т. 194. С. 79–90.

87. *Le Cam L.* On the distribution of sums of independent random variables. In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume). Berlin; Heidelberg; New York: Springer. 1965. P. 179–202.

88. *Götze F., Zaitsev A. Yu.* Approximation of convolutions by accompanying laws without centering // Записки научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 320. С. 44–53.

89. *Зайцев А. Ю.* К многомерному обобщению метода треугольных функций // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 158. С. 81–104.

90. *Зайцев А. Ю.* Об аппроксимации сверток многомерных симметричных распределений сопровождающими законами // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 177. С. 55–72.

91. *Зайцев А. Ю.* Об одном классе неравномерных оценок в многомерных предельных теоремах // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 184. С. 92–105.

92. *Зайцев А. Ю.* Оценка близости распределений последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 97. С. 83–87.

93. *Зайцев А. Ю.* Некоторые свойства n-кратных сверток распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. Вып. 1. С. 152–156.

94. *Zaitsev A. Yu.* Estimates for the closeness of successive convolutions of multidimensional symmetric distributions // Probab. Theory Relat. Fields. 1988. Vol. 79, N 2. P. 175–200.

95. *Čekanavičius V.* Approximation Methods in Probability Theory. Springer, 2016. 274 p.

96. *Зайцев А. Ю.* Пример распределения, множество n-кратных сверток которого равномерно отделено от множества безгранично делимых законов в смысле расстояния по вариации // Теория вероятн. и ее примен. 1991. Т. 36. Вып. 2. С. 356–361.

97. *Komlós J., Major P. , Tusnády G.* An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF, I; II // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1975. Vol. 32. P. 111–131; 1976. Vol. 34. P. 34–58.

98. *Саханенко А. И.* Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами. В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР. Т. 3. Новосибирск: Наука, 1984. С. 4–49.

99. *Zaitsev A. Yu.* Multidimensional version of the results of Komlós, Major, and Tusnády for vectors with finite exponential moments // ESAIM: Probab. Statist. 1998. Vol. 2. P. 41–108.

100. *Einmahl U.* Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case // J. Multivar. Anal. 1989. Vol. 28, N 1. P. 20–68.

101. *Zaitsev A. Yu.* Multidimensional version of the results of Sakhanenko in the invariance principle for vectors with finite exponential moments. I; II; III // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45. Вып. 4. С. 718–738; 2001. Т. 46. Вып. 3. С. 535–561; Вып. 4. С. 744–769.

102. *Zaitsev A. Yu.* Estimates for the strong approximation in multidimensional Central Limit Theorem. In: Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians (Bejing, 2002), Invited Lectures. Vol. III / Eds. Li Ta Tsien et al. Bejing: Higher Ed. Press, 2002. P. 107–116.

103. *Зайцев А. Ю.* Оценки точности сильной аппроксимации в многомерном принципе инвариантности // Записки научн. семин. ПОМИ. 2006. Т. 339. С. 37–53.

104. *Зайцев А. Ю.* Оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Записки научн. семин. ПОМИ. 2007. Т. 351. С. 141–157.

105. *Зайцев А. Ю.* Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Записки научн. семин. ПОМИ. 2009. Т. 364. С. 148–165.

106. *Саханенко А. И.* Оценки в принципе инвариантности. В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР. Т. 5. Новосибирск: Наука, 1985. С. 27–44.

107. *Götze F., Zaitsev A. Yu.* Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle // Теория вероятн. и ее примен. 2008. Т. 53. Вып. 1. С. 100–123.

108. *Гётце Ф., Зайцев А. Ю.* Точность аппроксимации в многомерном принципе инвариантности для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечными моментами // Записки научн. семин. ПОМИ. 2009. Т. 368. С. 110–121.

109. *Гётце Ф., Зайцев А. Ю.* Оценки точности сильной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сибирский матем. журнал. 2011. Т. 52, N 4. С. 796–808.

110. *Зайцев А. Ю.* Оптимальные оценки точности сильной аппроксимации в бесконечномерном принципе инвариантности // Записки научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 396. С. 93–101.

111. *Зайцев А. Ю.* Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов // Успехи матем. наук. 2013. Т. 68, N 4(412). С. 129–172.

112. *Зайцев А. Ю.* Неустойчивость обращения преобразования Радона // Записки научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 216. С. 76–85.

113. *Гётце Ф., Зайцев А. Ю.* Равномерные оценки точности аппроксимации короткими асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме для квадратичных форм // Записки научн. семин. ПОМИ. 2010. Т. 384. С. 105–153.

114. *Götze F., Zaitsev A. Yu.* Explicit rates of approximation in the CLT for quadratic forms // Ann. Probab. 2014. Vol. 42, N 1. P. 354–397.

115. *Bentkus V., Götze F.* Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms in multidimensional spaces // Probab. Theory Relat. Fields. 1997. Vol. 109. P. 367–416.

116. *Елисеева Ю. С.* Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Записки научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 412. С. 121–137.

117. *Елисеева Ю. С., Зайцев А. Ю.* Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 2012. Т. 57. Вып. 4. С. 768–777.

118. *Елисеева Ю. С., Гётце Ф., Зайцев А. Ю.* Оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда—Оффорда // Записки научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 420. С. 50–69.

119. *Friedland O., Sodin S.* Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2007. Vol. 345, N 9. P. 513–518.

120. *Rudelson M., Vershynin R.* The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices // Adv. Math. 2008. Vol. 218, N 2. P. 600–633.

121. *Rudelson M., Vershynin R.* Smallest singular value of a random rectangular matrix // Comm. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 62, N 12. P. 1707–1739.

122. *Vershynin R.* Invertibility of symmetric random matrices // Random Structures Algorithms. 2014. Vol. 44, N 2. P. 135–182.

123. *Esseen C. G.* On the concentration function of a sum of independent random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1968. Bd. 9. P. 290–308.

124. *Götze F., Zaitsev A. Yu.* Estimates for the rapid decay of concentration functions of n-fold convolutions. // J. Theoret. Probab. 1998. Vol. 11, N 3. P. 715–731.

125. *Götze F., Zaitsev A. Yu.* A multiplicative inequality for concentration functions of n-fold convolutions. In: High dimensional probability. II. In Ser.: Progress in Probability. Vol. 47 / Eds. E. Giné, D. Mason, J. A. Wellner. Boston: Birkhäuser, 2000. P. 39–47.

126. *Зайцев А. Ю.* О скорости убывания функций концентрации n-кратных сверток вероятностных распределений // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 29–33.

127. *Гнеденко Б. В.* О роли максимального слагаемого при суммировании независимых случайных величин // Укр. матем. журнал. 1953. Т. 5, N 3. С. 291–298.

128. *Золотарев В. М., Королюк В. С.* Об одной гипотезе Б.В. Гнеденко // Теория вероятн. и ее примен. 1961. Т. 6, N 4. 469–473.

129. *Зингер А. А.* Об одной задаче Б. В. Гнеденко // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, N 6. С. 1238–1240.

130. *Зингер А. А.* Об одном классе предельных распределений для нормированных сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10. Вып. 4. С. 672–692.

131. *Линник Ю. В.* Линейные формы и статистические критерии // Укр. матем. журнал. 1953. Т. 5, N 3. С. 247–290.

132. *Berkes I.* Results and problems related to the pointwise central limit theorem. In: Asymptotic Methods in Probability and Statistics. Elsevier, 1998. P. 59–96.

133. *Ибрагимов И. А.* О почти всюду версиях предельных теорем // Докл. РАН. 1996. Т. 350. С. 301–303.

134. *Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А.* О предельных теоремах «почти наверное» // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44, N 2. С. 328–350.

135. *Лифшиц М. А.* Предельная теорема типа «почти наверное» для сумм случайных векторов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 260. С. 186–200.

136. *Ibragimov I. A., Lifshits M. A.* On the convergence of generalized moments in almost sure limit theorems // Statist. Probab. Letters. 1998. Vol. 40. P. 343–351.

137. *Lifshits M. A., Stankevich E. S.* On the large deviation principle for the almost sure CLT // Statist. Probab. Letters. 2001. Vol. 51. P. 263–267.

138. *Lifshits M. A.* Almost sure limit theorem for martingales. In: Limit Theorems in Probability and Statistics. II / Eds. I. Berkes, E. Csáki, M. Csörgő. Budapest: J. Bolyai Mathematical Society, 2002. P. 367–390.

139. *Berkes I., Csáki E.* A universal result in almost sure central limit theory // Stoch. Proc. Appl. 2001. Vol. 94, N 1. P. 105–134.

140. *Berkes I., Dehling H.* Some limit theorems in log density // Ann. Probab. 1993. Vol. 21. P. 1640–1670.

141. *Heck M. K.* The principle of large deviations for almost everywhere central limit theorem // Stoch. Proc. Appl. 1998. Vol. 76. P. 61–75.

142. *March P., Seppäläinen T.* Large deviations from the almost sure central limit theorem // J. Theoret. Probab. 1997. Vol. 10. P. 935–967.

143. *Мартикайнен А. И.* Центральная предельная теорема почти наверное без логарифмического суммирования // Записки научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 320. С. 110–119.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Зайцев Андрей Юрьевич — д-р физ.-мат. наук; zaitsev@pdmi.ras.ru
Зингер Абрам Аронович — д-р физ.-мат. наук, проф.; azinger28@mail.ru
Лифшиц Михаил Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; m.lifshits@spbu.ru
Никитин Яков Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; y.nikitin@spbu.ru
Петров Валентин Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; petrov2v@mail.ru

To the history of Saint-Petersburg school of Probability and Statistics. I. Limit theorems for sums of independent random variables

A. Yu. Zaitsev[1,3], *A. A. Zinger*[2], *M. A. Lifshits*[3], *Ya. Yu. Nikitin*[3], *V. V. Petrov*[3]

[1] St. Petersburg Department of V. A. Steklov Mathematical Institute of RAS, nab. reki Fontanki, 27, St. Petersburg, 191023, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Bolshaya Morskaya ul., 67, St. Petersburg, 190000, Russian Federation
[3] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zaitsev A. Yu., Zinger A. A., Lifshits M. A., Nikitin Ya. Yu., Petrov V. V. To the history of Saint-Petersburg school of Probability and Statistics. I. Limit theorems for sums of independent random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 201–232. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.203

This is the first article in a series of surveys devoted to the scientific achievements of the Leningrad — Saint-Petersburg school of Probability and Statistics during the period from 1947 to 2017. It is devoted to the traditional for St. Petersburg topic of limit theorems for sums of independent random variables. We discuss classical limit theorems: the law of large numbers, the central limit theorem, and the law of the iterated logarithm, as well as the circle of important related problems that emerged in the second half of the twentieth century. The latter include approximation for the distributions of sums of independent summands by infinitely divisible distributions, an estimate of the accuracy of strong Gaussian approximation for such sums, and the weak almost sure convergence empirical measures generated by a sequence of sums of independent random variables and vectors.

Keywords: sums of independent random variables, central limit theorem, law of large numbers, law of the iterated logarithm, infinitely divisible distributions, concentration functions, Littlewood—Offord problem, empirical measure, limit theorem almost sure.

References

1. Linnik Yu. V., *Probability theory and mathematical statistics.* In: *Mathematics in St. Petersburg–Leningrad University* (ed. by V. I. Smirnov, Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1970, pp. 243–255) [in Russian].

2. Bunjakovskij V. I., *Foundations of mathematical probability theory* (St. Petersburg, 1846, 495 p., reprint implemented in 2017, Ed-PTO Yoyo Media).

3. Gnedenko B. V., *Essay on the history of probability theory* (URSS Press, Moscow, 2001) [in Russian].

4. Andreev K. A., "Victor Yakovlevich Bunjakovskij. Necrologic essay", *Reports and minutes of meetings of mathematical society at Imperial Khar'kov University* **2**, 149–161 (Khar'kov, 1891) [in Russian].

5. Chebyshev P. L., *Probability theory* (Lectures read in 1879–80, by records of A. M. Lyapunov published by academician A. N. Krylov, AN USSR Publ., Moscow, Leningrad, 1936, 261 p.) [in Russian].

6. Markov A., *The calculus of probabilities* (Third ed., St. Petersburg, 1913, 388 p.) [in Russian].

7. Bernstein S. N., *Probability theory* (Fourth ed., Gostehteorizdat, Moscow, 1946, 556 p.) [in Russian].

8. Ibragimov I. A., "About S.N. Bernstein's papers on Probability Theory", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society* **8**, 96–120 (2000) [in Russian].

9. Seneta E., *Sergei Natanovich Bernstein.* In: *Statisticians of the Century* (eds. C. C. Heyde and E. Seneta, Springer, 2001, pp. 339–345).

10. Linnik Yu., *Selected works. Probability theory* (Nauka, Leningrad, 1981) [in Russian].

11. Linnik Yu., *Selected works. Mathematical statistics* (Nauka, Leningrad, 1982) [in Russian].

12. Nikitin Ya. Yu., Romanovsky I. V., "To the 100th anniversary of the birth of Yuri Vladimirovich Linnik", *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1* **2(60)**, issue 3, 487–492 (2015) [in Russian].

13. Linnik Yu. V., "The accuracy of the approximation to the Gauss distribution of sums of independent random variables", *Izv. of the Academy of sciences of the USSR, Ser. Math.* **11**, 111–138 (1947) [in Russian].

14. Petrov V. V., "An estimate of the deviation of the distribution of a sum of independent random variables from the normal law", *Soviet Math. Dokl.* **6**, 242–244 (1965).

15. Ibragimov I. A., "On the accuracy of Gaussian approximation to the distribution functions of sums of independent random variables", *Theory of Probab. Appl.* **11**, issue 4, 632–655 (1966).

16. Osipov L. V., "Refinement of Lindeberg's theorem", *Theory of Probab. Appl.* **11**, issue 2, 299–302 (1966).

17. Osipov L. V., Petrov V. V., "On an estimate of the remainder term in the central limit theorem", *Theory of Probab. Appl.* **12**, issue 2, 281–286 (1967).

18. Lifshits B. A., “On the accuracy of approximation in the central limit theorem”, *Theory of Probab. Appl.* **21**, issue 1, 108–124 (1976).

19. Heyde C. C., “On the uniform metric in the context of convergence to normality”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **25**, issue 2, 83–95 (1973).

20. Osipov L. V., “Accuracy in approximation of distribution of a sum of independent random variables to normal distribution”, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **178**(5), 1013–1016 (1968) [in Russian].

21. Egorov V. A., “On the rate of convergence to normal law which is equivalent to the existence of the second moment”, *Theory of Probab. Appl.* **18**, issue 1, 175–180 (1973).

22. Rozovsky L. V., “On the precision of an estimate of the remainder term in the central limit theorem”, *Theory of Probab. Appl.* **23**, issue 4, 712–730 (1978).

23. Ibragimov I. A., “On the Chebyshev–Cramér asymptotic expansions”, *Theory of Probab. Appl.* **12**, issue 3, 455–469 (1967).

24. Osipov L. V., “Asymptotic expansions of the distribution function of a sum of random variables with non-uniform estimates for the remainder term”, *Vestnik of Leningrad Univ. Math.*, issue 1, 51–59 (1972).

25. Petrov V. V., “On some polynomials encountered in probability”, *Vestnik of Leningrad Univ. Math.*, issue 19, 150–153 (1962).

26. Petrov V. V., “Asymptotic expansions for the derivatives of the distribution function of a sum of independent terms”, *Vestnik of Leningrad Univ. Math.*, issue 19, 9–18 (1960).

27. Petrov V. V., “A local theorem for densities of sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **1**, issue 3, 316–322 (1956).

28. Petrov V. V., “On local limit theorems for sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **9**, issue 2, 312–320 (1964).

29. Cramér H., “Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités”, *Actual. Sci. Industr.*, issue 736, 5–23 (Paris, 1938).

30. Petrov V. V., “A generalization of Cramér’s limit theorem”, *Uspekhi Mat. Nauk* **9**, issue 4, 195–202 (1954) [in Russian].

31. Feller W., “Generalization of a probability limit theorem of Cramér”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **54**, issue 3, 361–372 (1943).

32. Richter W., “Local limit theorems for large deviations”, *Theory of Probab. Appl.* **2**, issue 2, 206–220 (1957).

33. Linnik Yu. V., “On probability of large deviations for the sums of independent variables”, *Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability* **2**, 289–306 (Univ. California Press, Berkeley and Los Angeles, 1969).

34. Linnik Yu. V., “Limit theorems for sums of independent variables taking into account large deviations. I; II; III”, *Theory of Probab. Appl.* **6**, issue 2, 131–148, issue 4, 345–360 (1961); **7**, issue 2, 115–129 (1962).

35. Petrov V. V., “Limit theorems for large deviations under violation of Cramér condition, I; II”, *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, issue 19, 49–68 (1963); issue 1, 58–75 (1964).

36. Osipov L. V., “On probabilities of large deviations for sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **17**, issue 2, 309–331 (1972).

37. Petrov V. V., “On probabilities of large deviations for sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **10**, issue 2, 287–298 (1965).

38. Rozovsky L. V., “On the Cramér series coefficients”, *Theory of Probab. Appl.* **43**, issue 1, 152–157 (1999).

39. Rozovsky L. V., “Asymptotic expansions for probabilities of large deviations”, *Theory of Probab. Appl.* **31**, issue 2, 255–268 (1987).

40. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V., *Independent and Stationary Sequences of Random Variables* (Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971, 443 p.).

41. Petrov V. V., *Sums of Independent Random Variables* (Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1975).

42. Petrov V. V., *Limit Theorems of Probability Theory* (Oxford Univ. Press, New York, 1995).

43. Martikainen A. I., “On necessary and sufficient conditions for the strong law of large numbers”, *Theory of Probab. Appl.* **24**, issue 4, 813–820 (1979).

44. Rozovsky L. V., “On the relation of the rate of convergence in the weak and strong law of large numbers”, *Lithuanian Math. J.* **21**, issue 1, 155–167 (1981).

45. Petrov V. V., “On the strong law of large numbers”, *Theory of Probab. Appl.* **14**, issue 2, 183–192 (1969).

46. Egorov V. A., “Some theorems on the strong law of large numbers and law of the iterated logarithm”, *Theory of Probab. Appl.* **17**, issue 1, 86–100 (1972).

47. Petrov V. V., “The order of growth of sums of dependent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **18**, issue 3, 348–350 (1973).
48. Petrov V. V., “On absolute convergence of series of random variables almost surely”, *J. Math. Sci.* **214**, issue 4, 513–516 (New York, 2016).
49. Petrov V. V., “On the strong law of large numbers for nonnegative random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **53**, issue 2, 346–349 (2009).
50. Petrov V. V., “On the strong law of large numbers for sequences of dependent random variables”, *J. Math. Sci.* **199**, issue 2, 225–227 (New York, 2014).
51. Petrov V. V., “On a relation between an estimate of the remainder in the central limit theorem and the law of the iterated logarithm”, *Theory of Probab. Appl.* **11**, issue 3, 454–458 (1966).
52. Egorov V. A., “On the law of the iterated logarithm”, *Theory of Probab. Appl.* **14**, issue 4, 693–699 (1969).
53. Egorov V. A., “Generalization of Hartman—Wintner theorem on the law of the iterated logarithm”, *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, issue 7, 22–28 (1971).
54. Petrov V. V., “On the law of the iterated logarithm for a sequence of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **46**, issue 3, 542–544 (2002).
55. Petrov V. V., “Sequences of m-orthogonal random variables”, *J. Soviet Math.* **27**, issue 5, 3136–3139 (1984).
56. Petrov V. V., “On the law of the iterated logarithm for sequences of dependent random variables”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **50**, issue 1, 32–34 (2017).
57. Frolov A. N., “Limit theorems for increments of sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **48**, issue 1, 93–107 (2004).
58. Frolov A. N., *Limit Theorems of Probability Iheory* (St. Petersburg University Publishing House, St. Petersburg, 2014) [in Russian].
59. Kolmogorov A. N., “Two uniform limit theorems for sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **1**, issue 4, 384–394 (1956).
60. Ibragimov I. A., Presman E. L., “The rate of convergence of the distributions of sums of independent random variables to accompanying distributions”, *Theory of Probab. Appl.* **18**, issue 4, 713–727 (1973).
61. Arak T. V., Zaitsev A. Yu., *Uniform limit theorems for sums of independent random variables.* In: *Proc. Steklov Math. Inst.* (Moscow, 1988, **174**, 222 p.).
62. Arak T. V., “On the convergence rate in Kolmogorov’s uniform limit theorem, I; II”, *Theory of Probab. Appl.* **26**, issue 2, 219–239; issue 3, 437–451 (1981).
63. Arak T. V., “An improvement of the lower bound for the rate of convergence in Kolmogorov’s uniform limit theorem”, *Theory of Probab. Appl.* **27**, issue 4, 826–832 (1982).
64. Presman E. L., “On a multidimensional version of the Kolmogorov uniform theorem”, *Theory of Probab. Appl.* **18**, issue 2, 378–384 (1973).
65. Arak T. V., “On the approximation of n-fold distributions having non-negative characteristic function with accompanying laws”, *Theory of Probab. Appl.* **25**, issue 2, 221–243 (1980).
66. Zaitsev A. Yu., “Approximation of convolutions by accompanying laws under the existence of moment of low orders”, *J. Math. Sci.* **93**, issue 3, 336–340 (New York, 1999).
67. Presman E. L., “Approximation in variation of the distribution of a sum of independent Bernoulli variables with a Poisson law”, *Theory of Probab. Appl.* **30**, issue 2, 417–422 (1986).
68. Čekanavičius V., “On compound Poisson approximations under moment restrictions”, *Theory of Probab. Appl.* **44**, issue 1, 18–28 (2000).
69. Čekanavičius V., “Infinitely divisible approximations for discrete nonlattice variables”, *Adv. Appl. Probab.* **35**, issue 4, 982–1006 (2003).
70. Čekanavičius V., Wang Y. H., “Compound Poisson approximations for sums of discrete nonlattice variables”, *Adv. Appl. Probab.* **35**, issue 1, 228–250 (2003).
71. Götze F., Eliseeva Yu. S., Zaitsev A. Yu., “Arak inequality for functions of concentration and the Littlewood–Offord problem”, *Theory of Probab. Appl.* **62**, issue 2 (2018), to appear.
72. Littlewood J. E., Offord A. C., “On the number of real roots of a random algebraic equation”, *Math. Sbornik* **12**, issue 3, 277–286 (1943).
73. Erdös P., “On a lemma of Littlewood and Offord”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51**, issue 12, 898–902 (1945).
74. Tao T., Vu V., “Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices”, *Ann. Math.* **169**, issue 2, 595–632 (2009).
75. Tao T., Vu V., “From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, issue 3, 377–396 (2009).

76. Tao T., Vu V., “A sharp inverse Littlewood–Offord theorem”, *Random Structures and Algorithms* **37**, issue 4, 525–539 (2010).

77. Nguyen H., Vu V., “Optimal inverse Littlewood–Offord theorems”, *Adv. Math.* **226**, issue 6, 5298–5319 (2011).

78. Nguyen H., Vu V., “Small ball probabilities, inverse theorems and applications”, *Erdös Centennial Proceedings*, 409–463 (eds. L. Lovász et al., Springer, 2013).

79. Zaitsev A. Yu., Arak T. V., “On the rate of convergence in Kolmogorov’s second uniform limit theorem”, *Theory of Probab. Appl.* **28**, issue 2, 351–374 (1984).

80. Zaitsev A. Yu., “Multidimensional version of the second uniform theorem of Kolmogorov”, *Theory of Probab. Appl.* **34**, issue 1, 108–128 (1989).

81. Zaitsev A. Yu., “On the Gaussian approximation of convolutions under multidimensional analogues of S. N. Bernstein’s inequality conditions”, *Probab. Theory Rel. Fields* **74**, issue 4, 535–566 (1987).

82. Zaitsev A. Yu., “Estimates for the Lévy–Prokhorov distance in the multivariate central limit theorem for random vectors with finite exponential moments”, *Theory of Probab. Appl.* **31**, issue 2, 203–220 (1986).

83. Zaitsev A. Yu., “On the accuracy of approximation of distributions of sums of independent random variables which are nonzero with a small probability by means of accompanying laws”, *Theory of Probab. Appl.* **28**, issue 4, 657–669 (1984).

84. Zaitsev A. Yu. “Approximation of a sample by a Poisson point process”, *J. Math. Sci.* **128**, issue 1, 2556–2563 (2005).

85. Zaitsev A. Yu., “On the uniform approximation of distributions of sums of independent random variables”, *Theory of Probab. Appl.* **32**, issue 1, 40–47 (1987).

86. Zaitsev A. Yu., “Approximation of convolutions of probability distributions by infinitely divisible laws under weakened moment restrictions”, *J. Math. Sci.* **75**, issue 5, 1922–1930 (1995).

87. Le Cam L., *On the distribution of sums of independent random variables.* In: *Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume)* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1965, pp. 179–202).

88. Götze F., Zaitsev A. Yu., “Approximation of convolutions by accompanying laws without centering, *J. Math. Sci.* **137**, issue 1, 4510–4515 (2006).

89. Zaitsev A. Yu., “Multidimensional generalized method of triangular functions”, *J. Soviet Math.* **43**, issue 6, 2797–2810 (1988).

90. Zaitsev A. Yu., “Approximation of convolutions of multi-dimensional symmetric distributions by accompanying laws”, *J. Soviet Math.* **61**, issue 1, 1859–1872 (1992).

91. Zaitsev A. Yu., “Certain class of nonuniform estimates in multidimensional limit theorems”, *J. Math. Sci.* **68**, issue 4, 459–468 (1994).

92. Zaitsev A. Yu., “Estimation of proximity of distributions of sequential sums of independent identically distributed random vectors”, *J. Soviet Math.* **24**, issue 5, 536–539 (1984).

93. Zaitsev A. Yu., “Some properties of n-fold convolutions of distributions”, *Theory of Probab. Appl.* **26**, issue 1, 148–152 (1981).

94. Zaitsev A. Yu., “Estimates for the closeness of successive convolutions of multidimensional symmetric distributions”, *Probab. Theory Relat. Fields* **79**, issue 2, 175–200 (1988).

95. Čekanavičius V., *Approximations Methods in Probability Theory* (Springer, 2016, 274 p.).

96. Zaitsev A. Yu., “An example of a distribution whose set of n-fold convolutions is uniformly separated from the set of infinitely divisible laws in distance in variation”, *Theory of Probab. Appl.* **36**, issue 2, 419–425 (1991).

97. Komlós J., Major P., Tusnády G., “An approximation of partial sums of independent RV’-s, and the sample DF, I; II”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **32**, issue 1–2, 111–131 (1975); **34**, issue 1, 34–58 (1976).

98. Sakhanenko A. I., *Convergence rate in the invariance principle for non-identically distributed variables with exponential moments.* In: *Advances in Probab. Theory: Limit Theorems for Sums of Random Variables* (ed. A. A. Borovkov, Springer, New York, 1985, pp. 2–73).

99. Zaitsev A. Yu., “Multidimensional version of the results of Kolmós, Major, and Tusnády for vectors with finite exponential moments”, *ESAIM: Probab. Statist.* **2**, 41–108 (1998).

100. Einmahl U., “Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case”, *J. Multivar. Anal.* **28**, issue 1, 20–68 (1989).

101. Zaitsev A. Yu., “Multidimensional version of the results of Sakhanenko in the invariance principle for vectors with finite exponential moments, I; II; III”, *Theory of Probab. Appl.* **45**, issue 4, 624–641 (2001); **46**, issue 3, 490–514; issue 4, 676–698 (2002).

102. Zaitsev A. Yu., “Estimates for the strong approximation in multidimensional Central Limit Theorem”, *Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Bejing 2002, Invited Lectures* **III**, 107–116 (eds. Li Ta Tsien et al., Higher Ed. Press, Bejing, 2002).

103. Zaitsev A. Yu., "Estimates for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle", *J. Math. Sci.* **145**, issue 2, 4856–4865 (2007).

104. Zaitsev A. Yu., "Estimates for the rate of strong Gaussian approximation for sums of i.i.d. multidimensional random vectors", *J. Math. Sci.* **152**, issue 6, 875–884 (2008).

105. Zaitsev A. Yu., "Rate of strong Gaussian approximation for sums of i.i.d. multidimensional random vectors", *J. Math. Sci.* **163**, issue 4, 399–408 (2009).

106. Sakhanenko A. I., *On estimates of the rate of convergence in the invariance principle.* In: *Advances in Probab. Theory: Limit Theorems for Sums of Random Variables* (ed. A. A. Borovkov, Springer, New York, 1984, pp. 124–135).

107. Götze F., Zaitsev A. Yu., "Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle", *Theory of Probab. Appl.* **53**, issue 1, 59–80 (2009).

108. Götze F., Zaitsev A. Yu., "Rates of approximation in the multidimensional invariance principle for sums of i.i.d. random vectors with finite moments", *J. Math. Sci.* **167**, 495–500 (2010).

109. Götze F., Zaitsev A. Yu., "Estimates for the rate of strong approximation in Hilbert space", *Siberian Math. J.* **52**, issue 4, 628–638 (2011).

110. Zaitsev A. Yu., "Optimal estimates for the rate of strong Gaussian approximate in a Hilbert space", *J. Math. Sci.* **188**, issue 6, 689–693 (2013).

111. Zaitsev A. Yu., "The accuracy of strong Gaussian approximation for sums of independent random vectors", *Russian Math. Surveys* **68**, issue 4, 721–761 (2013).

112. Zaitsev A. Yu., "Nonstability of the inversion of the Radon transform", *J. Math. Sci.* **88**, issue 1, 53–58 (1998).

113. Götze F., Zaitsev A. Yu., "Uniform rates of approximation by short asymptotic expansions in the CLT for quadratic forms", *J. Math. Sci.* **176**, 162–189 (2011).

114. Götze F., Zaitsev A. Yu., "Explicit rates of approximation in the CLT for quadratic forms", *Ann. Probab.* **42**, issue 1, 354–397 (2014).

115. Bentkus V., Götze F., "Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms in multidimensional spaces", *Probab. Theory Relat. Fields* **109**, 367–416 (1997).

116. Eliseeva Yu. S., "Multivariate estimates for the concentration functions of weighted sums of independent, identically distributed random variables", *J. Math. Sci.* **204**, issue 1, 78–89 (2015).

117. Eliseeva Yu. S., Zaitsev A. Yu., "Estimates of the concentration functions of weighted sums of independent random variables", *Theory of Probab. Appl.* **57**, issue 4, 670–678 (2013).

118. Eliseeva Yu. S., Götze F., Zaitsev A. Yu., "Estimates for the concentration functions in the Littlewood–Offord problem", *J. Math. Sci.* **206**, issue 2, 146–158 (2015).

119. Friedland O., Sodin S., "Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation", *C. R. Math. Acad. Sci.* **345**, issue 9, 513–518 (Paris, 2007).

120. Rudelson M., Vershynin R., "The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices", *Adv. Math.* **218**, issue 2, 600–633 (2008).

121. Rudelson M., Vershynin R., "Smallest singular value of a random rectangular matrix", *Comm. Pure Appl. Math.* **62**, issue 12, 1707–1739 (2009).

122. Vershynin R., "Invertibility of symmetric random matrices", *Random Structures Algorithms* **44**, issue 2, 135–182 (2014).

123. Esseen C. G., "On the concentration function of a sum of independent random variables", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **9**, 290–308 (1968).

124. Götze F., Zaitsev A. Yu., "Estimates for the rapid decay of concentration functions of n-fold convolutions", *J. Theoret. Probab.* **11**, issue 3, 715–731 (1998).

125. Götze F., Zaitsev A. Yu. *A multiplicative inequality for concentration functions of n-fold convolutions.* In: *High dimensional probability. II.* In Ser.: *Progress in Probability* **47** (eds. E. Giné, D. Mason, J. A. Wellner, Birkhäuser, Boston, 2000, pp. 39–47).

126. Zaitsev A. Yu., "On the rate of decay of concentration functions of n-fold convolutions of probability distributions", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **44**, issue 2, 110–114 (2011).

127. Gnedenko B. V. "On the role of the maximal summand in sums of independent random variables", *Ukrainian Math. J.* **5**, issue 3, 291–298 (1953) [in Russian].

128. Zolotarev V. M., Korolyuk V. S., "On a conjecture proposed by B. V. Gnedenko", *Theory of Probab. Appl.* **6**, issue 4, 431–435 (1961).

129. Zinger A. A., "On a problem of B.V. Gnedenko", *Doklady AN SSSR* **162**, issue 6, 1238–1240 (1965) [in Russian].

130. Zinger A. A., "On a class of limit distributions for normalized sums of independent random variables", *Theory of Probab. Appl.* **10**, issue 4, 607–626 (1965).

131. Linnik Y. V., "Linear forms and statistical criteria", *Ukrainian Math. J.* **5**, issue 3, 247–290 (1953).

132. Berkes I., *Results and problems related to the pointwise central limit theorem.* In: *Asymptotic Methods in Probability and Statistics* (Elsevier, 1998, pp. 59–96).

133. Ibragimov I. A. "On almost sure versions of limit theorems", *Doklady RAN* **350**, 301–303 (1996) [in Russian].

134. Ibragimov I. A., Lifshits M. A., "On almost sure limit theorems", *Theory of Probab. Appl.* **44**, issue 2, 254–272 (2000).

135. Lifshits M. A., "The almost sure limit theorem for sums of random vectors", *J. Math. Sci.* **109**, issue 6, 2166–2178 (2002).

136. Ibragimov I. A., Lifshits M. A., "On the convergence of generalized moments in almost sure limit theorems", *Statist. Probab. Letters* **40**, 343–351 (1998).

137. Lifshits M. A., Stankevich E. S., "On the large deviation principle for the almost sure CLT", *Statist. Probab. Letters* **51**, 263–267 (2001).

138. Lifshits M. A., *Almost sure limit theorem for martingales.* In: *Limit Theorems in Probability and Statistics. II* (eds. I. Berkes, E. Csáki, M. Csörgő, Budapest, J. Bolyai Mathematical Society, 2002, pp. 367–390).

139. Berkes I., Csáki E., "A universal result in almost sure central limit theory", *Stoch. Proc. Appl.* **94**, issue 1, 105–134 (2001).

140. Berkes I., Dehling H., "Some limit theorems in log density", *Ann. Probab.* **21**, 1640–1670 (1993).

141. Heck M. K., "The principle of large deviations for almost everywhere central limit theorem", *Stoch. Proc. Appl.* **76**, 61–75 (1998).

142. March P., Seppäläinen T., "Large deviations from the almost sure central limit theorem", *J. Theoret. Probab.* **10**, 935–967 (1997).

143. Martikainen A. I., "Almost sure central limit theorem without logarithmic sums", *J. Math. Sci.* **137**, issue 1, 4549–4554 (2004).

Author's information:

Andrei Yu. Zaitsev — zaitsev@pdmi.ras.ru
Abram A. Zinger — azinger28@mail.ru
Mikhail A. Lifshits — m.lifshits@spbu.ru
Yakov Yu. Nikitin — y.nikitin@spbu.ru
Valentin V. Petrov — petrov2v@mail.ru