УДК 517.951.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2
MSC 35A08

Построение фундаментального решения для одного уравнения нечетного порядка

Б. Ю. Иргашев

Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан, 160103, Наманган, пр. Дустлик, 12

Для цитирования: *Иргашев Б. Ю.* Построение фундаментального решения для одного уравнения нечетного порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 244–255. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.205

В наших предыдущих работах были найдены некоторые дельтообразные частные решения уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками и изучены некоторые их свойства. В данной статье сначала получены необходимые оценки на бесконечности этих решений, а затем построено фундаментальное решение (Ф. Р.) уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области как сумма этих частных решений. Показывается, что Ф. Р. является решением неоднородного уравнения с кратными характеристиками в прямоугольной области. Знание Ф. Р. позволяет построить теорию потенциала для дальнейшего использования ее при решении краевых задач.

Ключевые слова: уравнение нечетного порядка, кратные характеристики, фундаментальное решение.

Введение. В последние годы уделяется большое внимание изучению неклассических уравнений в частных производных. Это объясняется с одной стороны малой изученностью таких уравнений в теоретическом плане, а с другой — все чаще обнаруживаются их приложения к различным задачам механики, физики и техники. К мало изученным неклассическим уравнениям высокого порядка относится уравнение вида

$$D_x^p u\left(x,y\right)+aD_y^q u\left(x,y\right)=F\left(x,y,D_x^1 u,D_y^1 u,\ldots,D_x^{p-1}u,D_y^{q-1}u\right), \qquad (1)$$

где $D_t^s u=\frac{\partial^s u}{\partial t^s}$, $p,q\in N,p>q$, $a=\mathrm{const}$.

Это уравнение имеет только лишь одну систему характеристик — $y=\mathrm{const}$, которые являются p-кратными характеристиками. Уравнение (1) при $p=3$, $q=1$ включает в себя известное уравнение Кортевега—де Вриза, а при $p=3$, $q=2$ описывает стационарное течение трансзвукового газа [1].

Метод построения фундаментального решения для уравнения (1) дан в [2]. Используя эту методику, для уравнений

$$\begin{array}{l} D_x^{2n}u-(-1)^n D_y^1 u=0,\\ D_x^{2n+1}u+(-1)^n D_y^2 u=0,\\ D_x^{2n+1}u+(-1)^n D_y^1 u=0, \end{array}$$

в работах [3–5] соответственно найдены фундаментальные решения в виде несобственных интегралов и построена теория потенциала. При изучении стационарного вязкого трансзвукового линейного уравнения (или ВТ-уравнения)

$$D_x^3 u\,(x,y) + D_y^2 u + \frac{a}{y} D_y^1 u = f\,(x,y)$$

для случая $a = 0$, используя метод подобия и автомодельного решения, в работах [6, 7] построены и изучены некоторые свойства фундаментальных решений, выраженные через специальные функции. Случай произвольного a исследован в [8].

В случае $q > 2$ вопросы постановки корректных краевых задач и разработки конструктивных методов их решения (в классическом смысле) для уравнения (1) мало изучены, так как применение метода потенциала для решения краевых задач требует знания фундаментального решения, которое по нашим сведениям еще не построено.

В данной работе для области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ построено фундаментальное решение $U\,(x,y,\xi,\eta)$ уравнения

$$L\,[u] \equiv (-1)^n\, D_x^{2n+1} u\,(x,y) - (-1)^m\, D_y^{2m} u\,(x,y) = 0, \tag{2}$$

где $(2n+1, 2m) = 1$ (т. е. взаимно просты), $n, m \in N,\ n \geq m$.

Для фундаментального решения $U\,(x,y,\xi,\eta)$ уравнения (2) доказано следующее свойство: функция $F\,(x,y) = \int\limits_0^p \int\limits_0^q U\,(x,y,\xi,\eta) g\,(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$ удовлетворяет в области Ω уравнению $L\,[u] = g\,(x,y)$, где $g\,(x,y)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$.

Основная часть. В работе [9] для уравнения (2) построены частные решения $U_s\,(x,y,\xi,\eta)\,,\ s = \{0,1,\ldots,m-1\}$. Напомним вкратце это построение. Сначала методом подобия строятся дельтообразные решения $U_s^*\,(x,y,\xi,\eta)$ уравнения (2), которые имеют вид

$$U_s^*\,(x,y,\xi,\eta) = \frac{f_s^*\,(t)}{\pi\,|y-\eta|^{\frac{2m}{2n+1}}},$$

где

$$f_s^*\,(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\lambda^{\frac{2n+1}{2m}} \beta_1^s\right) \cos\left(\lambda t + \beta_2^s \lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right) d\lambda, \quad t = \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{\frac{2m}{2n+1}}},$$

$$\beta_s = \beta_1^s - i\beta_2^s, \quad \beta_1^s = \sin z_s, \quad \beta_2^s = co\mathrm{s} z_s, \quad z_s = \frac{4s+1}{4m}\pi,$$

и доказывается их основное свойство.

Теорема 1. *Для* $\forall \varphi \in C\,[a;b]$ *справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0, \eta \to y} \int\limits_a^b U_s^*(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi) d\xi = \varphi(x_0).$$

Далее строятся частные решения $U_s\,(x,y,\xi,\eta)$, такие что

$$U_s\,(x,y,\xi,\eta) = |y-\eta|^b\, f_s\,(t)\,, \quad t = (x-\xi)\,|y-\eta|^a\,,$$

где $f_s(t)$, b выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$D_y^{2m-1} U_s(x,y,\xi,\eta) = \operatorname{sgn}(y-\eta)\, U_s^*(x,y,\xi,\eta).$$

Справедлива теорема [9].

Теорема 2. *Имеют место следующие формулы:*

$$f_s(t) = \frac{1}{a(2m-2)!} \sum_{j=0}^{2m-2} t^{\frac{j-b}{a}} \left(c_{js}^{+} - (-1)^j C_{2m-2}^{j} \int_t^{+\infty} \tau^{-\frac{j-b}{a}-1} f_s^*(\tau)\, d\tau \right), \ t>0,$$

$$f_s(t) = \frac{1}{a(2m-2)!} \sum_{j=0}^{2m-2} |t|^{\frac{j-b}{a}} \left(c_{js}^{-} - (-1)^j C_{2m-2}^{j} \int_{-\infty}^{t} |\tau|^{-\frac{j-b}{a}-1} f_s^*(\tau)\, d\tau \right), \ t<0,$$

$a = -2m/(2n+1)$, $b = -2na-1$, c_{js}^{+}, c_{js}^{-} *— определенным образом вычисленные постоянные, и для них справедливо равенство*

$$f_s^{(2n)}(t) = (-1)^{n+m+1} \frac{2m}{2n+1} t f_s^*(t).$$

Приступим теперь к построению фундаментального решения. Для дальнейших выкладок нам понадобятся оценки функции $f^*(t)$ на бесконечности. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Имеет место соотношение*

$$\left(f_s^*(t)\right)^{(k)} = O\left(|t|^{-\frac{2n+1}{2m}-1-k}\right), \ |t| \to \infty,$$

причем:

1) если $\left[\frac{2n+1}{2m}\right]$ *четное, то*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{2n+1}{2m}+1+k} \left(f_s^*(t)\right)^{(k)} = (-1)^k c_{1s}^* \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1+k\right), \ k=0,1,2\ldots,$$

$$\lim_{t\to-\infty} (-t)^{\frac{2n+1}{2m}+1+k} \left(f_s^*(t)\right)^{(k)} = c_{1s}^* \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1+k\right), \ k=0,1,2\ldots;$$

2) если $\left[\frac{2n+1}{2m}\right]$ *нечетное, то*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{2n+1}{2m}+1+k} \left(f_s^*(t)\right)^{(k)} = (-1)^k c_{2s}^* \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1+k\right), \ k=0,1,2\ldots,$$

$$\lim_{t\to-\infty} (-t)^{\frac{2n+1}{2m}+1+k} \left(f_s^*(t)\right)^{(k)} = c_{2s}^* \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1+k\right), \ k=0,1,2\ldots,$$

где

$$c_{1s}^* = \begin{cases} -(-1)^{\frac{\left[\frac{2n+1}{2m}\right]}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2m} - \left[\frac{2n+1}{2m}\right]\right) + z_s\right), \ t\to+\infty, \\ (-1)^{\frac{\left[\frac{2n+1}{2m}\right]}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2m} - \left[\frac{2n+1}{2m}\right]\right) - z_s\right), \ t\to-\infty, \end{cases}$$

$$c_{2s}^* = \begin{cases} -(-1)^{\frac{\left[\frac{2n+1}{2m}\right]+1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2m} - \left[\frac{2n+1}{2m}\right]\right) + z_s\right), \ t\to+\infty, \\ (-1)^{\frac{\left[\frac{2n+1}{2m}\right]+1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2m} - \left[\frac{2n+1}{2m}\right]\right) - z_s\right), \ t\to-\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем равенство (для упрощения записи индекс s будем пропускать)

$$f^*(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda^c \beta_1)(\cos(\lambda t)\cos(\beta_2 \lambda^c) - \sin(\lambda t)\sin(\beta_2\lambda^c))\, d\lambda = I_1 - I_2,$$

где

$$c = \frac{2n+1}{2m},$$

$$I_1(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda^c\beta_1)\cos(\lambda t)\cos(\beta_2\lambda^c)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^c\beta_1}\cos\lambda^c\beta_2 d\sin\lambda t = \frac{c}{t}\int\limits_0^{+\infty} \lambda^{c-1}e^{-\lambda^c\beta_1}\sin(\lambda^c\beta_2 + z_s)\sin\lambda t\, d\lambda.$$

Пусть теперь $[c]$ (целая часть числа) четно, $t > 0$ (остальные случаи доказываются аналогично). Тогда можем записать

$$I_1(t) = (-1)^{\frac{[c]}{2}}\frac{c}{t^{[c]+1}}\int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda t\left(\lambda^{c-1}e^{-\lambda^c\beta_1}\sin(\lambda^c\beta_2 + z_s)\right)^{([c])} d\lambda.$$

Сделаем замену $\lambda t = z$, отсюда получим

$$I_1(t) \sim (-1)^{\frac{[c]}{2}}\frac{(c)_{[c]+1}}{t^{[c]+1}}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{c-[c]-1}\exp\left(-\left(\frac{z}{t}\right)^c\beta_1\right)\sin\left(\left(\frac{z}{t}\right)^c\beta_2 + z_s\right)\sin z\frac{dz}{t}.$$

Имеем равенство

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1+\frac{2n+1}{2m}} I_1(t) = (-1)^{\frac{[c]}{2}}(c)_{[c]+1}\sin z_s\int\limits_0^{+\infty} z^{c-[c]-1}\sin z dz =$$

$$= (-1)^{\frac{\left[\frac{2n+1}{2m}\right]}{2}}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1\right)\sin z_s \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2m} - \left[\frac{2n+1}{2m}\right]\right)\right).$$

Аналогичным методом получим асимптотику для $I_2(t)$:

$$I_2(t) = (-1)^{\frac{[c]}{2}}\frac{c}{t^{[c]+1}}\int\limits_0^{+\infty}\cos\lambda t\left(\lambda^{c-1}e^{-\lambda^c\beta_1}\cos(\lambda^c\beta_2 + z_s)\right)^{([c])} d\lambda,$$

сделаем замену $\lambda t = z$, тогда

$$I_2(t) \sim (-1)^{\frac{[c]}{2}}\frac{(c)_{[c]+1}}{t^{[c]+1}}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{c-[c]-1}\exp\left(-\left(\frac{z}{t}\right)^c\beta_1\right)\cos\left(\left(\frac{z}{t}\right)^c\beta_2 + z_s\right)\cos z\frac{dz}{t} =$$

$$= (-1)^{\frac{[c]}{2}}\frac{(c)_{[c]+1}}{t^{c+1}}\int\limits_0^{+\infty} z^{c-[c]-1}\cos z\exp\left(-\left(\frac{z}{t}\right)^c\beta_1\right)\cos\left(\left(\frac{z}{t}\right)^c\beta_2 + z_s\right) dz,$$

отсюда

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1+\frac{2n+1}{2m}} I_2\left(t\right) = \left(-1\right)^{\frac{[c]}{2}} \left(c\right)_{[c]+1} \cos z_s \int\limits_0^{+\infty} z^{c-[c]-1} \mathrm{cos} z dz =$$

$$= \left(-1\right)^{\frac{\left[\frac{2n+1}{2m}\right]}{2}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1\right) \mathrm{cos} z_s \mathrm{cos}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2m} - \left[\frac{2n+1}{2m}\right]\right)\right).$$

Значит, при четном $\left[\frac{2n+1}{2m}\right]$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{2n+1}{2m}+1} f_s^*\left(t\right) = c_{1s}^*\Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}+1\right). \tag{3}$$

Теперь покажем, что соотношения (3) можно формально дифференцировать. Итак, нужно показать, что выполняется соотношение

$$\left(f_s^*\left(t\right)\right)' \sim -c_{1s}^*\Gamma\left(a+2\right) t^{-a-2}.$$

Действительно, имеем

$$\left(f_s^*\left(t\right)\right)' = I_1'\left(t\right) - I_2'\left(t\right),$$

$$I_1'\left(t\right) = -\int\limits_0^{+\infty} \lambda \exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right) \cos\lambda^c\beta_2^s \sin\lambda t\, d\lambda = \frac{1}{t}\int\limits_0^{+\infty} \lambda \exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right) \cos\lambda^c\beta_2^s\, d\cos\lambda t =$$

$$= -\frac{1}{t}\left(\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right)\cos\lambda^c\beta_2^s\cos\lambda t\, d\lambda - \int\limits_0^{+\infty} c\beta_1^s\lambda^c \exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right)\cos\lambda^c\beta_2^s\cos\lambda t\, d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{+\infty} c\beta_2^s\lambda^c\exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right)\sin\lambda^c\beta_2^s\cos\lambda t\, d\lambda\right) =$$

$$= -\frac{1}{t}\left(I_1\left(t\right) - c\int\limits_0^{+\infty} \lambda^c \exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right)\sin\left(\lambda^c\beta_2^s + z_s\right)\cos\lambda t\, d\lambda\right).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \lambda^c\exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right)\sin\left(\lambda^c\beta_2^s+z_s\right)\cos\lambda t\, d\lambda =$$

$$= \frac{\left(-1\right)^{1+\frac{[c]}{2}}}{t^{[c]+1}}\int\limits_0^{+\infty}\left(\lambda^c\exp\left(-\lambda^c\beta_1^s\right)\sin\left(\lambda^c\beta_2^s+z_s\right)\right)^{([c]+1)}\sin\lambda t\, d\lambda \sim -I_1\left(t\right),$$

значит,

$$I_1'\left(t\right) \sim -\frac{a+1}{t} I_1\left(t\right).$$

Аналогично можем записать

$$I_2'(t) \sim -\frac{a+1}{t} I_2(t),$$

отсюда

$$(f_s^*)'(t) \sim -c_{1s}^* \Gamma(a+2)\, t^{-a-2}.$$

Аналогичным способом можно получить такие соотношения и для старших производных. Теорема доказана.

Фундаментальное решение $U(x, y, \xi, \eta)$ будем искать в виде

$$U(x, y, \xi, \eta) = K \sum_{s=0}^{m-1} U_s(x, y, \xi, \eta),$$

где K — некоторая постоянная, подлежащая определению.

Предварительно вычислим следующую сумму:

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_{js}^{+} = (-1)^j \frac{C_{2m-2}^{j}}{\left(2n - \frac{2n+1}{2m}(1+j)\right)_{2n}} \sum_{s=0}^{m-1} d_{js}^{+} =$$

$$= (-1)^{j+n} \frac{2m}{2n+1} \frac{(2m-2)!}{j!\left(2n - \frac{2n+1}{2m}(1+j)\right)_{2n}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}(1+j)\right) \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n+1)(1+j) + (2m-j-1)(2m-4s-1)}{2m}\right)\right),$$

$$\sum_{s=0}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n+1)(1+j) + (2m-j-1)(2m-4s-1)}{2m}\right)\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2m-j-1) + \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)(1+j) - (2m-j-1)(4s+1)}{2m}\right).$$

Далее рассмотрим два случая. Первый случай: пусть j четно, тогда $2m-1-j$ нечетно и выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2m-j-1) + \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)(1+j) - (2m-j-1)(4s+1)}{2m}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{2m-j}{2}} \sum_{s=0}^{m-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)(1+j)}{2m} - \frac{\pi(2m-j-1)}{m} s - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{2m-j}{2}+1} \sum_{s=0}^{m-1} \cos(\alpha - ds),$$

где $\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{(n+1)(1+j)}{m}$, $d = \frac{\pi(2m-j-1)}{m}$.

Применяя формулу Эйлера, а затем формулу вычисления суммы геометрической прогрессии, придем к следующему результату:

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_{js}^{+} = (-1)^{n+m+1+\frac{j}{2}} \frac{2m}{2n+1} \frac{(2m-2)!}{j!\left(2n-\frac{2n+1}{2m}(1+j)\right)_{2n}} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}(1+j)\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+2)(1+j)}{2m}\pi\right)}{\sin\left(\frac{1+j}{2m}\pi\right)} = c_j^{+}.$$

В случае нечетного j аналогичные действия приведут к равенству

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_{js}^{+} = 0.$$

Для $\sum\limits_{s=0}^{m-1} c_{js}^{-}$ имеем следующий результат:

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_{js}^{-} = \begin{cases} c_j^{-},\ j = 0, 2, 4, \ldots, 2l \le m-1, \\ 0,\ j = 1, 3, \ldots, 2l+1 \le m-1, \end{cases}$$

где

$$c_j^{-} = (-1)^{n+m+1+\frac{j}{2}} \frac{2m}{2n+1} \frac{(2m-2)!}{j!\left(2n-\frac{2n+1}{2m}(1+j)\right)_{2n}} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}(1+j)\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)(1+j)}{2m}\pi\right)}{\sin\left(\frac{1+j}{2m}\pi\right)}.$$

Учитывая вышеизложенное, отметим некоторые свойства функции $U(x,y,\xi,\eta)$:
1) $\lim\limits_{y\to\eta+0} D_y^{2s-1} U(x,y,\xi,\eta) = \lim\limits_{y\to\eta-0} D_y^{2s-1} U(x,y,\xi,\eta) = 0,\ s = 1, \ldots, m-1;$
2) $\lim\limits_{y\to\eta+0} D_y^{2s} U(x,y,\xi,\eta) = \lim\limits_{y\to\eta-0} D_y^{2s} U(x,y,\xi,\eta),\ s = 0, \ldots, m-1;$
3) $\lim\limits_{x\to\xi+0} D_x^{s} U(x,y,\xi,\eta) = \lim\limits_{x\to\xi-0} D_x^{s} U(x,y,\xi,\eta),\ s = 0, \ldots, 2n.$

Пусть теперь в области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ нам дано неоднородное уравнение

$$L[u] = g(x,y), \tag{4}$$

где функция $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$. Покажем, что функция

$$F(x,y) = \int_0^p \int_0^q U(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta)\, d\xi d\eta$$

при некотором подборе константы K удовлетворяет неоднородному уравнению (4).

Предварительно сделаем разрез области Ω прямыми $\eta-\varepsilon,\ \eta+\varepsilon$ (ε достаточно мало), в результате получим две области $\Omega_1 = \{(\xi,\eta):\ 0 < \xi < p,\ 0 < \eta < y-\varepsilon\}$ и $\Omega_2 = \{(\xi,\eta):\ 0 < \xi < p,\ y+\varepsilon < \eta < q\}$. Далее вычислим частные производные функции $F(x,y)$ по каждой области и устремим ε к нулю. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{y-\varepsilon} d\eta \int\limits_0^p U\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) d\xi + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{y+\varepsilon}^{q} d\eta \int\limits_0^p U\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) d\xi\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^p \left(U\left(x,y,\xi,y-\varepsilon\right) g\left(\xi,y-\varepsilon\right) - U\left(x,y,\xi,y+\varepsilon\right) g\left(\xi,y+\varepsilon\right)\right) d\xi +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{y-\varepsilon} d\eta \int\limits_0^p \frac{\partial U}{\partial y} g\left(\xi,\eta\right) d\xi + \int\limits_{y+\varepsilon}^{q} d\eta \int\limits_0^p \frac{\partial U}{\partial y} g\left(\xi,\eta\right) d\xi\right),$$

Теперь перейдем к пределу. Если учесть свойство 2 функции $U\left(x,y,\xi,\eta\right)$, то первое слагаемое обнулится. В результате получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int\limits_0^p \int\limits_0^q \frac{\partial}{\partial y} U\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{y-\varepsilon} d\eta \int\limits_0^p \frac{\partial U}{\partial y} g\left(\xi,\eta\right) d\xi + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{y+\varepsilon}^{q} d\eta \int\limits_0^p \frac{\partial U}{\partial y} g\left(\xi,\eta\right) d\xi\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^p \left(\frac{\partial U\left(x,y,\xi,y-\varepsilon\right)}{\partial y} g\left(\xi,y-\varepsilon\right) - \frac{\partial U\left(x,y,\xi,y+\varepsilon\right)}{\partial y} g\left(\xi,y+\varepsilon\right)\right) d\xi +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{y-\varepsilon} d\eta \int\limits_0^p \frac{\partial U}{\partial y} g\left(\xi,\eta\right) d\xi + \int\limits_{y+\varepsilon}^{q} d\eta \int\limits_0^p \frac{\partial U}{\partial y} g\left(\xi,\eta\right) d\xi\right),$$

Переходим к пределу. Если учесть свойство 3, то первый предел обнулится и в итоге получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int\limits_0^p \int\limits_0^q \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} g\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta.$$

Таким образом, будем иметь формулу

$$\frac{\partial^{2m-1} F}{\partial y^{2m-1}} = \int\limits_0^p \int\limits_0^q \frac{\partial^{2m-1} U}{\partial y^{2m-1}} g\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta =$$

$$= K\sum_{s=0}^{m-1}\left(\int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^p U_s^*\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) d\xi - \int\limits_y^q d\eta \int\limits_0^p U_s^*\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) d\xi\right).$$

В вышеуказанных вычислениях перестановка предела и производной законна, так как подынтегральные выражения не имеют особенностей в рассматриваемых областях. Теперь вычислим частную производную $2m$-го порядка по переменной y.

Пусть

$$I\left(x,y\right)=\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{0}^{p}U_{s}^{*}\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)d\xi,$$

тогда

$$\frac{I\left(x,y+\Delta y\right)-I\left(x,y\right)}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{y}^{y+\Delta y}d\eta\int\limits_{0}^{p}U_{s}^{*}\left(x,y+\Delta y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{0}^{p}\left(U_{s}^{*}\left(x,y+\Delta y,\xi,\eta\right)-U_{s}^{*}\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)g\left(\xi,\eta\right)d\xi=I_{1}+I_{2}.$$

Для определенности будем считать, что $\Delta y>0$ (случай $\Delta y<0$ рассматривается аналогично). Учитывая теорему 1, можем записать

$$\lim_{\Delta y\to 0}I_{1}=g\left(x,y\right),$$

$$I_{2}=\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{0}^{p}\frac{\partial U_{s}^{*}\left(x,y+\theta\Delta y,\xi,\eta\right)}{\partial y}g\left(\xi,\eta\right)d\xi.$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\lim_{\Delta y\to 0}I_{2}=J=\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{0}^{p}\frac{\partial U_{s}^{*}\left(x,y,\xi,\eta\right)}{\partial y}g\left(\xi,\eta\right)d\xi. \qquad (5)$$

Имеем

$$I_{2}=-\int\limits_{0}^{p}d\xi\int\limits_{0}^{y}\frac{\partial U_{s}^{*}\left(x,y+\theta\Delta y,\xi,\eta\right)}{\partial\eta}g\left(\xi,\eta\right)d\eta=$$

$$-\int\limits_{0}^{p}\left\{U_{s}^{*}\left(x,y+\theta\Delta y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)\Big|_{0}^{y}-\int\limits_{0}^{y}U_{s}^{*}\left(x,y+\theta\Delta y,\xi,\eta\right)g_{\eta}'\left(\xi,\eta\right)d\eta\right\}d\xi=$$

$$=-\int\limits_{0}^{p}\left(\theta\Delta y\right)^{a}f_{s}^{*}\left(\left(x-\xi\right)\left(\theta\Delta y\right)^{a}\right)g\left(\xi,y\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{p}\left(y+\theta\Delta y\right)^{a}f_{s}^{*}\left(\left(x-\xi\right)\left(y+\theta\Delta y\right)^{a}\right)g\left(\xi,0\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{p}d\xi\int\limits_{0}^{y}U_{s}^{*}\left(x,y+\theta\Delta y,\xi,\eta\right)g_{\eta}'\left(\xi,\eta\right)d\eta.$$

Так как функция f_{s}^{*} ограничена и $a+1>0$, то во всех трех интегралах можно переходить к пределу под знаком интеграла, что и означает верность равенства (5).

Итак, получаем

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\int\limits_0^p\int\limits_0^q U(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = 2mg(x,y) + \int\limits_0^p\int\limits_0^q \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}U(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Аналогично показывается справедливость равенства

$$\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\int\limits_0^p\int\limits_0^q U(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \int\limits_0^p\int\limits_0^q \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}U(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

отсюда следует формула

$$L[U] = (-1)^{m+1}\,2mg(x,y).$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (2) имеет вид

$$U(x,y,\xi,\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{2m}\sum_{s=0}^{m-1}U_s(x,y,\xi,\eta).$$

Заключение. В данной работе мы сделали только первый шаг: построили фундаментальное решение. Следующим шагом будет изучение свойств, получение оценок фундаментального решения и в дальнейшем использование его для решения различных краевых задач.

Литература

1. *Наполитано Л. Д., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11, №5. С. 1229–1261.

2. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fys. Note 1. 1912. Vol. 7, No. 13. P. 1–34; Note 2. 1912. Vol. 7, No. 21. P. 1–30; Note 3, 1912–1913. Vol. 8, No. 23. P. 1–51.

3. *Cattabriga L.* Una generalizationi del problema fundamentale di valori al contorno per eguationi paraboliche lincari // Annali di matematica pura ed applicata. 1958. T. 46. P. 215–247.

4. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. 1961. Vol. 31. P. 1–45.

5. *Абдиназаров С.* Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: дис. ... док. физ.-матем. наук. Ташкент: Институт матем. АН РУз, 1992. 239 с.

6. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2007. Вып. 2(15). С. 18–26. https://doi.org/10.14498/vsgtu525

7. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский матем. журнал. 2010. Т. 62, №1. С. 40–51.

8. *Засорин Ю. В.* Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, №6. С. 1347–1351.

9. *Irgashev B. Y.* On Partial Solutions of One Equation with Multiple Characteristics and Some Properties of the Fundamental Solution // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. T. 68, № 6. С. 868–893.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Иргашев Бахром Юсупханович — канд. физ.-мат. наук; bahromirgasev@gmail.com

Composition of fundamental solution for an odd order equation

B. Yu. Irgashev

Namangan Engineering and Construction Institute, pr. Dustlik, 12, Namangan, 160103, Uzbekistan

For citation: Irgashev B. Yu. Composition of fundamental solution for an odd order equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 244–255. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.205

In recent years an enormous attention has been given to examining non-classical equations in quotient derivatives. On the one hand, this is explained by the lack of studying of these equations in theoretical way. On the other hand, often their enclosure to various problems of mechanics, physics and technics has been found out. To less studied non classical equations of high orders belongs the equation in this form:

$$D_x^p u(x,y) + a D_y^q u(x,y) = F\left(x, y, D_x^1 u, D_y^1 u, \dots, D_x^{p-1} u, D_y^{q-1} u\right),$$

$$D_t^s u = \frac{\partial^s u}{\partial t^s},\ p, q \in N, p > q,\ a = \text{const}.$$

This equation has only one system of characteristics $y = \text{const}$ which is a p-multiple characteristics. This equation with $p = 3$, $q = 1$ involves a famous equation of Cortevega — de Vrize, and when $p = 3$, $q = 2$ it describes stationary flow of transonic gas.

In this paper in the area of $\Omega = \{(x,y) :\ 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ fundamental solution $U(x, y, \xi, \eta)$ for an equation

$$L[u] \equiv (-1)^n D_x^{2n+1} u(x,y) - (-1)^m D_y^{2m} u(x,y) = 0,$$

$$(2n+1, 2m) = 1,\ n, m \in N,\ n \geq m$$

was built.

Keywords: odd-order equation, multiple characteristics, fundamental solution.

References

1. Napolitano L. G., Ryzhov O. S., "An analogy between non-equilibrium and viscous inert flows at transonic velocities", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **11**(5), 166–207 (1971).

2. Block H., "Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples", *Ark. Mat. Astron. Fys.; note 1* **7**(13), 1–34 (1912); *note 2* **7**(21), 1–30 (1912); *note 3* **8**(23), 1–51 (1912–1913).

3. Cattabriga L., "Una generalizationi del problema fundamentale di valori al contorno per eguationi paraboliche lincari", *Annali di matematica pura ed applicata* **46**, 215–247 (1958).

4. Cattabriga L., "Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple", *Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava* **31**, 1–45 (1961).

5. Abdinazarov S., *Boundary-Value Problems for Equations with Multiple Characteristics* (Doctoral-Degree Thesis (Physics and Mathematics), Tashkent, 1992) [in Russian].

6. Dzhuraev T. D., Apakov Y. P., "On the self-similar solution of a third-order equation with multiple characteristics", *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, issue 2(15), 18–26 (2007) [in Russian]. https://doi.org/10.14498/vsgtu525

7. Dzhuraev T. D., Apakov Y. P., “On the theory of the third-order equation with multiple characteristics containing the second time derivative”, *Ukrainian Mathematical Journal* **62**(1), 43–55 (2010) [in Russian].
8. Zasorin Y. V., “Exact solutions of singular equations for viscous transsonic flows”, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **287**(6), 1347–1351 (1986) [in Russian].
9. Irgashev B. Y., “On Partial Solutions of One Equation with Multiple Characteristics and Some Properties of the Fundamental Solution”, *Ukrainian Mathematical Journal* **68**(6), 868–893 (2016). https://doi.org/10.1007/s11253-016-1263-9

Author’s information:

Bakhrom Yu. Irgashev — bahromirgasev@gmail.com