УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2
MSC 30E10

Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 3. Дальнейшее обобщение

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2]

[1] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 3. Дальнейшее обобщение // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 270–277. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.207

В настоящей статье рассматривается приближение функций из обширных классов, заданных на счетном объединении отрезков вещественной оси, с помощью целых функций экспоненциального типа. При росте типа приближающих функций оказывается возможным скорость приближения в окрестностях концов отрезков сделать более высокой, чем в окрестностях их внутренних точек. При этом общая неравномерная по отрезкам шкала приближения в зависимости от типа целой функции аналогична шкале, впервые появившейся при изучении приближения функций на отрезке полиномами. Для случая одного отрезка и приближения полиномами упомянутая шкала позволила соединить так называемые «прямые» теоремы — утверждения о возможной скорости приближения полиномами гладкой функции — и «обратные» теоремы, т. е. утверждения о гладкости функции, приближаемой полиномами с данной скоростью. Приближения целыми функциями на счетном объединении отрезков для случая классов Гёльдера ранее были изучены в двух предыдущих работах авторов. Настоящая статья существенно расширяет класс пространств для функций, из которых удается построить приближение целыми функциями с требуемыми свойствами.

Ключевые слова: гладкие функции, целые функции экспоненциального типа, приближение на подмножестве вещественной оси.

В данной работе модуль непрерывности $\omega(t)$ предполагается удовлетворяющим условию

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \le c\cdot\omega(x). \tag{1}$$

В дальнейшем мы будем существенно опираться на результаты из статей [1, 2]. В частности, будем использовать введенные там обозначения.

Пусть I_n — отрезки $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Предполагаем, что все отрезки I_n попарно дизъюнктны, J_n — отрезки $[b_n, a_{n+1}]$. Далее считаем, что существуют числа

$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ такие, что выполняются соотношения

$$0 < \alpha_0 \le \frac{|I_n|}{|I_m|} \le \beta_0, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

$$0 < \alpha_1 \le \frac{|J_n|}{|J_m|} \le \beta_1, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Нашим основным геометрическим объектом будет множество $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [a_n, b_n]$. С множеством E свяжем шкалу скорости приближения следующим образом: для $\rho > 1$ через $E_\rho([-1,1])$ обозначим образ окружности $\{\xi : |\xi| = \rho\}$ при отображении функцией Жуковского $z = \frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})$:

$$E_\rho([-1,1]) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), |\xi| = \rho \right\}.$$

Для $a < b$ положим

$$E_\rho([a,b]) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} E_\rho([-1,1]).$$

Положим также $d_\rho(z, [a,b]) = \operatorname{dist}(z, E_\rho([a,b])$, $d_\rho(z, E) = \min\limits_{n\in\mathbb{Z}} d_\rho(z, [a_n, b_n])$.

Через Λ_M^ω обозначим множество комплекснозначных функций f, заданных на $E : |f(x)| \le M, x \in E$ и $|f(x_2) - f(x_1)| \le c_f \omega(|x_2 - x_1|), x_1, x_2 \in E$. Если $r \ge 1$, то $\Lambda_M^{r+\omega}(E)$ — класс комплекснозначных функций на $E : |f(x)| \le M, x \in E$, и $f^{(r)} \in \Lambda_{M_1}^\omega$ с некоторым $M_1 > 0$.

Множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящих σ и ограниченных на вещественной оси, будем обозначать через T_σ. Предполагаем, что множество E удовлетворяет условиям (3) и (4) из [1]. Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема. *Пусть функция $f \in \Lambda_M^{r+\omega}(E)$, модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1), $r \ge 0$. Тогда для любого $\sigma \ge 1$ найдется функция $F_\sigma \in T_\sigma$ такая, что при $x \in E$ справедлива оценка*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \le c_{E,f} d^r_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, E) \omega(d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, E)). \tag{2}$$

Построение приближающих целых функций требует определения геометрических объектов и связанных с ними алгоритмов. В работах [1, 2] применялось построение, зависящее от растущего к бесконечности количества параметров, соответственно алгоритм создания аппроксимирующей функции содержал интеграл по кубу растущей к бесконечности размерности. В новом подходе удалось обойтись одним параметром и соответствующим образом изменить алгоритм. При этом оказалось возможным провести оценки для гораздо более широкого класса функций.

В [1, 2] существенно использовалось построение континуума $\Gamma(X', X'')$, приведенного в [1] в соотношении (13). Начнем доказательство теоремы с модификации построения. Из соотношения (4) в [1], предполагаемого для отрезков I_n, составляющих множество $E : E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, следует, что можно выбрать $q > 0 : q < \frac{1}{7}|I_n|$ для $\forall n \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{Z}_q = \{qn\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — решетка с шагом q. В силу выбора q для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует не менее шести последовательных точек $\mathbb{Z}_q$, лежащих на открытом интервале I_n. Обозначим 6 этих точек через x_{n_j}, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Положим $I'_n = [x_{n_2}, x_{n_3}]$, $I''_n = [x_{n_4}, x_{n_5}]$. Пусть $t \in [0, q]$, $x'_n(t) = x_{n_2} + t$, $x''_n(t) = x_{n_4} + t$. Через $\tau(x)$ в этой работе будем обозначать отрезок $\tau(x) = [x, x - iq]$, $s_n(t)$ — это следующее объединение отрезков:

$$s_n(t) = \tau(x''_{n-1}(t)) \cup [x''_n(t) - iq, x'_n(t) - iq] \cup \tau(x'_n(t)). \tag{3}$$

Далее, пусть имеется

$$\Gamma(t) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} s_n(t) \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a_n, b_n].$$

Через $\varphi_+(z,t)$ обозначим обратную к $\psi_+(\xi,t)$ функцию, а через $\varphi_-(z,t)$ — функцию, обратную к $\psi_-(\xi,t)$. $D_+(t)$ — область, для которой $\partial D_+(t) = \Gamma(t)$ и $i \in D_+(t)$, $D_-(t)$ — внутренняя часть множества $\mathbb{C} \setminus D_+(t)$.

Теперь мы продолжим функцию f в $\mathbb{C}$ функцией f_1 в точности так, как это было сделано в соотношениях (14)–(22) работы [1], используя метод псевдопродолжения Е. М. Дынькина [3, 4]. В силу (23)–(26) из [1] имеем интегральное представление при $x \in E$:

$$f(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{int} E_{\rho_0}(I_n)} \frac{f'_{1\bar z}(z)}{z - x} dm_2(z), \tag{4}$$

в котором фигурируют эллипсы $E_{\rho_0}(I_n)$, задаваемые формулами (1), (2) из [1], $E_{\rho_0}(I_n) = E_{\rho_0}([a_n, b_n])$.

Через $\psi_+(\xi,t)$ обозначим конформное отображение верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{\xi : \mathrm{Im}\xi > 0\}$ на область $D_+(t)$ так, что выполняются условия

$$\psi_+(\infty, t) = \infty, \quad \frac{\psi_+(i\xi, t)}{i\xi} \xrightarrow[\xi\to+\infty]{} 1,$$

а функция $\psi_-(\xi,t)$ отображает нижнюю плоскость $\mathbb{C}_- = \{\xi : \mathrm{Im}\xi < 0\}$ на область $D_-(t)$ так, что

$$\psi_-(\infty, t) = \infty, \quad \frac{\psi_-(i\xi, t)}{i\xi} \xrightarrow[\xi\to-\infty]{} 1.$$

Аналогично соотношениям (27), (28) в [1] полагаем для $s \in \mathbb{R}$ и $\xi > 0$

$$z^+_{\xi,s}(z,t) = \psi_+\left(\varphi_+(z,t) + s + i\xi, t\right), \quad z \in D_+(t), \tag{5}$$

$$z^-_{\xi,s}(z,t) = \psi_-\left(\varphi_-(z,t) + s - i\xi, t\right), \quad z \in D_-(t). \tag{6}$$

Для функций $z^+_{\xi,s}$ и $z^-_{\xi,s}$, определенных в (5) и (6), справедливы оценки (29), (30) из [1], поскольку области $D_+(t)$ и $D_-(t)$ являются частными случаями областей D_+ и D_- из [1, 2]. Эти оценки аналогичны оценкам для ограниченных функций областей из [5–7].

Выберем постоянные k и m, как это сделано в [2]: положим $k+1 = 4(r+1)$, $m = 8(k+1)+2$, постоянную c_m выберем из соотношения

$$c_m \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^m d\tau = 1. \tag{7}$$

Используя функции $z^{\pm}_{\xi,s}$, определенные в (5) и (6), запишем функции R_k как в [2]:

$$R_k(z,w,\xi,s,t)=\begin{cases}\frac{1}{z^{+}_{\xi,s}(z,t)-w}\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\frac{z^{+}_{\xi,s}(z,t)-z}{z^{+}_{\xi,s}(z,t)-w}\right)^{\nu}\right), & z\in D_+(t),\\ \frac{1}{z^{-}_{\xi,s}(z,t)-w}\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\frac{z^{-}_{\xi,s}(z,t)-z}{z^{-}_{\xi,s}(z,t)-w}\right)^{\nu}\right), & z\in D_-(t).\end{cases}\tag{8}$$

Так же, как в [2], пусть $\sigma_1=\sigma/m$, $\sigma\geq 1$. Применяя формулы (4) и (8), напишем следующее представление:

$$F_\sigma(w,t)=-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0}(I_n)}f'_{1\bar z}(z)\times$$
$$\times\left(\frac{c_m}{\sigma_1^{m-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m ds\cdot R_k\left(z,w,\frac{1}{\sigma_1},s,t\right)\right)dm_2(z).\tag{9}$$

Пусть $A=2\pi/q$, постоянная b_r выбрана из равенства

$$b_r\int\limits_0^q\sin^{2r+2}Atdt=1.\tag{10}$$

Теперь определим приближающую функцию

$$F_\sigma(w)=b_r\int\limits_0^q\sin^{2r+2}A(w-t)\cdot F_\sigma(w,t)dt.\tag{11}$$

Как следует из результатов (26)–(40) в [2], $F_\sigma(w,t)$ — функция экспоненциального типа, не превосходящая σ, поэтому (10) влечет, что F_σ — функция экспоненциального типа, не превосходящая $\sigma+(2r+2)A$.

Пусть $x\in I_{n_0}\subset E$. Будем оценивать разности $F_\sigma(x)-f(x)$, используя оценки (8)–(25) из [2]. Так, из соотношений (4), (7) и (10) получаем представление

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{b_r}{\sigma_1^{m-1}}\int\limits_0^q\sin^{2r+2}Atdt\cdot c_m\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\sigma_1 s}{s}\right)^m ds\cdot\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0}(I_n)}\frac{f'_{1\bar z}(z)}{z-x}dm_2(z).\tag{12}$$

Тогда определения (9) и (11) функций $F_\sigma(w,t)$ и $F_\sigma(w)$ с учетом равенства $\int_0^q\sin^{2r+2}Atdt=\int_0^q\sin^{2r+2}A(x-t)dt$ влекут соотношение

$$F_\sigma(x)-f(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0}(I_n)}f'_{1\bar z}(z)\cdot b_r\int\limits_0^q\sin^{2r+2}A(x-t)dt\times$$
$$\times\frac{c_m}{\sigma_1^{m-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m ds\cdot\left(\frac{1}{z-x}-R_n\left(z,x,\frac{1}{\sigma_1},s,t\right)dm_2(z)\right)=$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0}(I_{n_0})} f'_{1\bar z}(z)\cdot b_r\int\limits_0^q \sin^{2r+2}A(x-t)dt\cdot\frac{c_m}{\sigma_1^{m-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m ds\times$$

$$\times\left(\frac{1}{z-x}-R_n\left(z,x,\frac{1}{\sigma_1},s,t\right)\right)dm_2(z)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq n_0}} f'_{1\bar z}(z)\cdot b_r\int\limits_0^q \sin^{2r+2}A(x-t)dt\cdot\frac{c_m}{\sigma_1}^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m ds\times$$

$$\times\left(\frac{1}{z-x}-R_n\left(z,x,\frac{1}{\sigma_1},s,t\right)\right)dm_2(z)=T_{n_0}(x)+V_{n_0}(x). \quad (13)$$

Оценки (12)–(15) из [2] непосредственно применим для оценивания члена $V_{n_0}(x)$ из (13). Они дают неравенство

$$|V_{n_0}(x)|\le c\cdot d^r_{1+\frac{1}{\sigma}}(x,E)\omega(d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x,E)). \quad (14)$$

Остается оценить слагаемое $T_{n_0}(x)$. В случае, когда выполняется неравенство $|x-x_{n_0j}|\ge q/4$, $j=2,3,4,5$, те же оценки (12)–(15) из [2] дают соотношение

$$|T_{n_0}(x)|\le c\cdot d^r_{1+\frac{1}{\sigma}}(x,E)\omega(d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x,E)). \quad (15)$$

Осталось рассмотреть случай, когда для какого-либо значения $j_0=\{2,3,4,5\}$ выполнено $|x-x_{n_0,j_0}|<q/4$. Поскольку $x_{n_0}\in\mathbb{Z}_q$, $\sin A(x-t)=\sin A(x-x_{n_0j_0}-t)$ и

$$\int\limits_0^q \sin^{2r+2}A(x-t)dt=\begin{cases}\int\limits_{x_{n_02}}^{x_{n_03}}\sin^{2r+2}A(x-t)dt, & j_0=2 \text{ или } 3,\\ \int\limits_{x_{n_03}}^{x_{n_04}}\sin^{2r+2}A(x-t)dt, & j_0=4 \text{ или } 5.\end{cases} \quad (16)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны в случаях $j_0=2$ или 3 и $j_0=4$ или 5. Пусть, для определенности, $j_0=2$ или 3. Тогда получим оценку

$$|T_{n_0}(x)|\le\frac{1}{\pi}b_r\int\limits_{x_{n_02}}^{x_{n_03}}\sin^{2r+2}A(x-t)dt\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0}(I_{n_0})}|f'_{1\bar z}(z)|\times$$

$$\times\left|\frac{c_m}{\sigma_1^m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m ds\cdot\left(\frac{1}{z-x}-R_k\left(z,x,\frac{1}{\sigma_1},s,t-x_{n_02}\right)\right)\right|dm_2(z). \quad (17)$$

Воспользовавшись соотношениями (10)–(28) из [2], для внутреннего интеграла в (17) получим оценку с $\eta=1/\sigma$:

$$\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0}(I_{n_0})}|f'_{1\bar z}(z)|\times$$

$$\times\left|\frac{c_m}{\sigma_1^m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m ds\cdot\left(\frac{1}{z-x}-R_k\left(z,x,\frac{1}{\sigma_1},s,t-x_{n_02}\right)\right)\right|dm_2(z)\le$$

$$\leq c \cdot \max(|z^{+}_{\zeta,0}(x, t - x_{n_0 2}) - x|^r \omega(|z^{+}_{\zeta,0}(x, t - x_{n_0 2}) - x|),$$
$$|z^{-}_{\zeta,0}(x, t - x_{n_0 2}) - x|^r \omega(|z^{-}_{\zeta,0}(x, t - x_{n_0 2}) - x|)). \quad (18)$$

Соотношения (35) и (36) из [1] для $x \in I_{n0}$, $t \in [x_{n_0 2}, x_{n_0 3}]$, $|x - x_{n_0 2}| < q/4$ или $|x - x_{n_0 3}| < q/4$ влекут неравенства

$$|z^{\pm}_{\zeta,0}(x, t - x_{n_0 2}) - x| \leq c \frac{\eta}{|x - t| + \sqrt{\eta}} < c \frac{\eta}{|x - t|}. \quad (19)$$

Теперь из (17), (18), (19) получаем оценку

$$|T_{n_0}(x)| \leq \frac{1}{\pi} b_r \int\limits_{x_{n_0 2}}^{x_{n_0 3}} \sin^{2r+2} A(x - t) \cdot \frac{\eta^r}{|x - t|^r} \omega\left(\frac{\eta}{|x - t|}\right) dt \leq$$
$$\leq c \int\limits_{x_{n_0 2}}^{x_{n_0 3}} (x - t)^{2r+2} \cdot \frac{\eta^r}{|x - t|^{r+1}} \omega(\eta) dt \leq c\eta^r \omega(\eta). \quad (20)$$

В рассматриваемой ситуации, когда $|x - x_{n_0 j_0}| < q/4$, $j_0 = 2, 3, 4, 5$, справедливо соотношение $d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, E) \asymp \eta$, поэтому неравенство (20) и соотношения (14) и (15) доказывают теорему.

Литература

1. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 1. Формулировка результатов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 644–650. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.414

2. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 2. Доказательство основной теоремы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 1. С. 53–63. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.108

3. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl. 1980. Vol. 115, N 2. P. 33–58.

4. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

5. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближения функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сборник. 1977. Т. 104(144), № 3. С. 163–193.

6. *Белый В. И., Миклюков В. М.* Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций // Известия АН СССР, серия матем. 1974. Т. 38, № 6. С. 1343–1361.

7. *Лебедев Н. А., Широков Н. А.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами // Известия АН Арм. ССР. 1971. Т. 6, № 4. С. 311–341.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Сильванович Ольга Васильевна — канд. физ.-мат. наук; olamamik@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 3. Further generalization

O. V. Silvanovich[1], *N. A. Shirokov*[2]

[1] St. Petersburg National Research University of Information Tehnologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Kronverkskii pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 3. Further generalization. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 270–277. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.207

In the present paper we consider the approximation of smooth functions from various classes with the help of entire functions of exponential type. We assume that our smooth functions f are defined on an union of countable set of segments $\{[a_n; b_n]\}$ lying on the real axis such that all of those segments are commensurable and all complementary intervals are commensurable too. Let ω be a modulus of continuity satisfying a classical Dini condition, namely

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \le c \cdot \omega(x).$$

We consider classes of functions f such that f is bounded on $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [a_n; b_n]$ and for all $r \ge 0$, $x_1, x_2 \in I_n$ one has a property $|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \le c_f \omega(|x_2 - x_1|)$, $f^{(0)} \overset{\text{def}}{=} f$. We denote through T_σ a set of entire functions of exponential type $\le \sigma$ bounded on the real axis. The main result of our paper is following.

Theorem. *Let a function f and a modulus of continuity ω satisfy conditions mentioned above. Then for any $\sigma \ge 1$ there exists a function $F_\sigma \in T_\sigma$ such that for $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [a_n; b_n]$ one has an estimate*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \le c_f d^r_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a_n; b_n])\omega(d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a_n; b_n])),$$

where characteristic $d_\rho(x, \ldots)$ was introduced in our paper (Vestnik St. Petersburg Univ.: Math. **49**, issue 4, 373–378 (2016)).

Keywords: smooth functions, entire functions of exponential type, approximation on subsets of real line.

References

1. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **49**, issue 4, 373–378 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040130

2. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the Main Theorem", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **50**, issue 1, 35–43 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117010125

3. Dyn'kin E. M., "Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale", *Amer. Math. Soc. Transl.* **115**, 33–58 (1980).

4. Dyn'kin E. M., "The pseudoanalytic extensions", *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

5. Belyi V. I., "Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary", *Mathematics of the USSR-Sbornik* **31**(3), 289–317 (1977).

6. Belyi V. I., "Some properties of conform and quasiconform mappings and direct theorems of constructive theory of functions", *Izvestia AN SSSR, seria mat.* **38**(6), 1343–1361 (1974) [in Russian].

7. Lebedev N. A., Shirokov N. A., "Uniform approximation of functions on closed sets with finite number of corner points with non-zero exteriour angeles", *Izvestia AN ArmSSR* **6**(4), 311–341 (1971) [in Russian].

Author's information:

Olga V. Silvanovich — olamamik@gmail.com
Nikolai A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com