

МЕХАНИКА

УДК 533.7

MSC 82C40, 82D05

**Модельные кинетические уравнения
и описание газовых потоков
на разных стадиях релаксации****Ю. Н. Ворошилова*Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ворошилова Ю. Н.* Модельные кинетические уравнения и описание газовых потоков на разных стадиях релаксации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 278–286. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.208>

Рассматриваются разные стадии релаксации в высокоскоростных и высокотемпературных газах с физико-химическими процессами на основе модельных кинетических уравнений. Выписываются макроскопические уравнения в нулевом приближении модифицированного метода Чепмена–Энскога, а также выражения для потоковых членов газодинамических уравнений в терминах интенсивных и экстенсивных параметров. Выводится формула для скорости звука (как скорости распространения малых возмущений) с параметром α , который в рассматриваемых условиях не является постоянной величиной.

Ключевые слова: модельные кинетические уравнения, разные стадии релаксации, экстенсивные и интенсивные параметры.

Введение. Математическое описание процессов переноса в высокоскоростных и высокотемпературных газах в основном осуществляется с помощью кинетических уравнений, обобщающих уравнения Больцмана (см., например, [1–3]). Наибольшие трудности при решении кинетических уравнений связаны с присутствием в них интегральных операторов столкновений. Для упрощения решения задач можно использовать модельные кинетические уравнения. В работах [4, 5] были предложены модельные уравнения для кинетического описания простого одноатомного газа.

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект № 6.37.206.2016).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

Позднее БГК-модель была обобщена для случая газовых смесей и газов с внутренними степенями свободы (см., например, [6, 7]).

Как известно (см., например, [1–3]), столкновения молекул, сопровождающиеся переходами энергии внутренних степеней свободы из одного вида в другой и химическими реакциями, происходят с различной частотой. Во многих случаях можно выделить две группы: первая группа соответствует «быстрым» микроскопическим процессам, вторая группа описывает «медленные» микроскопические процессы (скорость «быстрых» процессов много больше, а скорость «медленных» процессов сравнима с характерной скоростью изменения макропараметров). В ситуации, когда все столкновения относятся к первой группе, имеем равновесные распределения молекул. Если первая группа включает только часть столкновений, получаем неравновесные распределения по некоторым внутренним степеням свободы наряду с равновесными распределениями по другим внутренним и поступательным степеням свободы молекул. Стадии релаксации газа определяются группой «быстрых» микроскопических процессов и соответствующими статистическими распределениями. Для решения кинетических уравнений на разных стадиях релаксации можно использовать модифицированный метод Чепмена—Энскога (ММЧЭ) [2].

В работе [8] предложена БГК-модель для аппроксимации той части интегрального оператора кинетических уравнений, которая соответствует «быстрым» микроскопическим процессам. В этом случае модельные уравнения позволяют получить замкнутые системы уравнений для минимального числа экстенсивных или сопряженных им интенсивных параметров при исследовании равновесных и неравновесных режимов течений газовых смесей с физико-химическими процессами.

1. Обобщение БГК-модели. Время формирования статистического распределения, обусловленное столкновениями определенного типа, называется временем релаксации. В газовых смесях с внутренними степенями свободы и химическими реакциями времена релаксации удовлетворяют некоторой системе неравенств, называемой «иерархией времен релаксации» [9].

Обычно эти неравенства можно записать в виде

$$\tau_{TT} \leq \tau_{RT} \ll \dots \ll \tau_{VRT} \ll \dots \ll \tau_{eq}, \quad (1)$$

где времена релаксации τ_{TT} , τ_{RT} , τ_{VRT} соответствуют установлению равновесия по поступательным, вращательным, колебательным степеням свободы молекул; через τ_{eq} обозначено время установления полного термодинамического и химического равновесия.

Пусть θ — характерное время изменения макроскопических параметров, τ — максимальное время релаксации «быстрых» микропроцессов. Тогда можно ввести малый параметр $\varepsilon = \tau/\theta \ll 1$. При таких условиях система кинетических уравнений может быть записана в безразмерном виде [2, 3, 10]

$$D_i f_i = \frac{1}{\varepsilon} J'_i + J''_i, \quad i = \overline{1, I}. \quad (2)$$

Здесь дифференциальный оператор D_i характеризует изменение функций распределения $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ при движении молекул вдоль фазовых траекторий; интегральные операторы J'_i , J''_i описывают их изменение за счет столкновений молекул. Индекс i определяет химический сорт частиц и набор квантовых чисел, характеризующих уровни внутренней энергии. Предполагается, что внутренняя энергия молекулы

является квантованной, а поступательная энергия описывается квазиклассически. Оператор J'_i соответствует «быстрым» микроскопическим процессам; J''_i описывает «медленные» микроскопические процессы; ε — аналог числа Кнудсена для столкновений, определяемых оператором J'_i .

Существует много работ (см., например, [1–3, 8, 10, 11]), посвященных решению уравнения (2), когда $\varepsilon \rightarrow 0$. В данной статье используются функции распределения в виде [6]

$$f_i^{(0)} = s_i \frac{m_i^3}{h^3} \exp \left(\gamma_0 \left(\frac{m_i c^2}{2} + \tilde{\varepsilon}_i \right) + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \psi_i^{(\lambda)} \right), \quad (3)$$

где h — постоянная Планка; m_i , s_i и \mathbf{c} — масса, статистический вес и собственная скорость i -й молекулы ($\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, \mathbf{u} — скорость микрочастиц в неподвижной системе координат, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — среднemasсовая скорость газа); $\tilde{\varepsilon}_i$ — часть внутренней энергии молекулы, которая обменивается с поступательной энергией при столкновениях, описываемых оператором J'_i ; $\psi_i^{(\lambda)}$ ($\lambda = \overline{1, \Lambda}$) — аддитивные инварианты столкновений этого оператора; γ_λ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$) — параметры, которые могут зависеть лишь от координат и времени.

Функции (3) совпадают с функциями распределения в нулевом приближении ММЧЭ для решения уравнений (2). Условия нормировки этих функций могут быть представлены в виде

$$\psi_0 = \tilde{\varepsilon} = \sum_i \int f_i^{(0)} \left(\frac{m_i c^2}{2} + \tilde{\varepsilon}_i \right) d\mathbf{c} = -\frac{3}{2} \frac{n^{(0)}}{\gamma_0} + \sum_i n_i^{(0)} \tilde{\varepsilon}_i, \quad (4)$$

$$\psi_\lambda = \sum_i \int f_i^{(0)} \psi_i^{(\lambda)} d\mathbf{c} = \sum_i n_i^{(0)} \psi_i^{(\lambda)}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}. \quad (5)$$

Здесь $\psi_0 = \tilde{\varepsilon}$ и ψ_λ — плотности определяющих экстенсивных параметров, которые соответствуют суммарным значениям инвариантов столкновений $\psi_i^{(0)} = m_i c^2/2 + \tilde{\varepsilon}_i$ и $\psi_i^{(\lambda)}$ в единице объема,

$$n_i^{(0)} = \int f_i^{(0)} d\mathbf{c} = s_i \exp \left(\gamma_0 \tilde{\varepsilon}_i + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \psi_i^{(\lambda)} \right) \left(\frac{-2\pi m_i}{\gamma_0 h^2} \right)^{3/2}, \quad n^{(0)} = \sum_i n_i^{(0)}. \quad (6)$$

Сравнение правой части соотношения (4) с известными результатами термодинамики приводит к равенству

$$\gamma_0 = -\frac{1}{kT} \quad (7)$$

(k — постоянная Больцмана, T — температура газа).

Чтобы избежать трудностей, связанных со сложной формой интегральных операторов столкновений можно использовать следующую систему модельных кинетических уравнений [8]:

$$D_i f_i = \frac{f_i^{(0)} - f_i}{\tau} + J''_i, \quad i = \overline{1, I}. \quad (8)$$

Имея те же преимущества и недостатки, что и БГК-модель, система (8) может использоваться для описания слабых отклонений от равновесных, а также неравновесных квазистационарных функций распределения (3).

Одним из критериев адекватности предложенной кинетической модели является справедливость Н-теоремы Больцмана. Для модельных уравнений (8) эта теорема доказана в [8]. В данной работе предлагается использовать систему кинетических уравнений (8) для исследования процессов переноса на разных стадиях релаксации газов с физико-химическими процессами.

2. Макроскопические уравнения в нулевом приближении ММЧЭ.

Умножая каждое из уравнений (8) на инварианты столкновений $m_i \mathbf{c}$ и $\psi_i^{(\lambda)}$ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$), интегрируя результат по пространству скоростей \mathbf{c} и суммируя по i , получим макроскопические уравнения для \mathbf{v} и ψ_λ (см. (4) и (5)):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (9)$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = -\tilde{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}_0 + r_0, \quad (10)$$

$$\frac{d\psi_\lambda}{dt} = -\psi_\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}_\lambda + r_\lambda, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}. \quad (11)$$

Здесь для простоты предполагается, что внешние силы отсутствуют; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$; тензор давления определяется формулой

$$\mathbf{P} = \sum_i \int f_i m_i \mathbf{c} \mathbf{c} d\mathbf{c}, \quad (12)$$

вектор переноса энергии $m_i c^2/2 + \tilde{\epsilon}_i$ имеет вид

$$\mathbf{q}_0 = \sum_i \int f_i \psi_i^{(0)} \mathbf{c} d\mathbf{c} = \sum_i \int f_i \left(\frac{m_i c^2}{2} + \tilde{\epsilon}_i \right) \mathbf{c} d\mathbf{c}, \quad (13)$$

вектор переноса любых инвариантов $\psi_i^{(\lambda)}$ ($\lambda = \overline{1, \Lambda}$) запишется как

$$\mathbf{q}_\lambda = \sum_i \int f_i \psi_i^{(\lambda)} \mathbf{c} d\mathbf{c}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}, \quad (14)$$

релаксационные члены примут вид

$$r_0 = \sum_i \int \left(\frac{m_i c^2}{2} + \tilde{\epsilon}_i \right) J_i'' d\mathbf{c}, \quad r_\lambda = \sum_i \int \psi_i^{(\lambda)} J_i'' d\mathbf{c}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}. \quad (15)$$

Следует отметить, что уравнение неразрывности

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (16)$$

является следствием уравнений (11), так как среди этих уравнений присутствуют уравнения, связанные с сохранением определенных неделимых частиц.

Макроскопические параметры $\psi_0 = \tilde{\epsilon}$ и ψ_λ ($\lambda = \overline{1, \Lambda}$) являются плотностями основных экстенсивных параметров, знание которых определяет характер течения газовой смеси в рассматриваемых условиях.

В нулевом приближении, когда $f_i = f_i^{(0)}$, получаем

$$\mathbf{P}^{(0)} = p \mathbf{I}, \quad \mathbf{q}_\lambda^{(0)} = 0, \quad \lambda = \overline{0, \Lambda}, \quad (17)$$

$$p = -\frac{n^{(0)}}{\gamma_0} = n^{(0)} kT, \quad (18)$$

где p — давление, \mathbf{I} — единичный тензор.

В этом случае газодинамические уравнения (9)–(11) можно записать в виде

$$\frac{d_0 \mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (19)$$

$$\frac{d_0 \psi_0}{dt} = \frac{d_0 \tilde{\epsilon}}{dt} = -(\tilde{\epsilon} + p) \nabla \cdot \mathbf{v} + r_0^{(0)}, \quad (20)$$

$$\frac{d_0 \psi_\lambda}{dt} = -\psi_\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + r_\lambda^{(0)}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}. \quad (21)$$

Эти уравнения включают релаксационные члены

$$r_\lambda^{(0)} = \sum_i \int \psi_i^{(\lambda)} J_i''(f^{(0)}) d\mathbf{c}, \quad \lambda = \overline{0, \Lambda}. \quad (22)$$

Величины $\psi_0 = \tilde{\epsilon}$ и ψ_λ ($\lambda = \overline{1, \Lambda}$) связаны с параметрами γ_λ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$), входящими в функции распределения (3). Величины γ_λ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$) являются интенсивными параметрами, сопряженными плотностям экстенсивных параметров ψ_λ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$).

Учитывая соотношения (3)–(6), можно представить левые части уравнений (20), (21) в виде

$$\frac{d_0 \psi_\lambda}{dt} = \sum_{\nu=0}^{\Lambda} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \gamma_\nu} \frac{d_0 \gamma_\nu}{dt}. \quad (23)$$

Согласно представлению (23) можем рассматривать уравнения (20), (21) как систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $d_0 \gamma_\nu / dt$ ($\nu = \overline{0, \Lambda}$). Решение этой системы можно записать в виде [11, 12]

$$\frac{d_0 \gamma_\lambda}{dt} = -\chi_\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + \tilde{\chi}_\lambda, \quad \lambda = \overline{0, \Lambda}. \quad (24)$$

Здесь

$$\chi_\lambda = \frac{\det'_\lambda{}^{(0)}}{\det}; \quad \tilde{\chi}_\lambda = \frac{\det''_\lambda{}^{(0)}}{\det}; \quad (25)$$

определитель \det — якобиан перехода от экстенсивных к интенсивным параметрам:

$$\det = \frac{D(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_\Lambda)}{D(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda)} \quad (26)$$

(в [3] доказано, что $\det > 0$); $\det'_\lambda{}^{(0)}$ получается из (26), если столбец производных по γ_λ заменить столбцом коэффициентов при $\nabla \cdot \mathbf{v}$ в правых частях уравнений (20), (21); $\det''_\lambda{}^{(0)}$ получается из (26) заменой того же столбца на столбец релаксационных членов (22).

Используя соотношения (18) и (6), уравнение (19) можно представить в виде [11]

$$\frac{d_0 \mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\langle m \rangle} \frac{\langle \tilde{h} \rangle \nabla \gamma_0 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \langle \psi_\lambda \rangle \nabla \gamma_\lambda}{\gamma_0}, \quad (27)$$

где $\langle m \rangle = \varrho/n^{(0)}$, $\langle \tilde{h} \rangle = (\tilde{e} + p)/n^{(0)}$ и $\langle \psi_\lambda \rangle = \psi_\lambda/n^{(0)}$ — средние значения массы, энтальпии и инвариантов $\psi_i^{(\lambda)}$, приходящиеся на одну молекулу.

Согласно (4)–(6) и (18) выражение в правой части уравнения (27) определяется параметрами γ_λ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$), зависящими от координат и времени.

Система уравнений (24) и (27) является замкнутой системой для скорости \mathbf{v} и интенсивных параметров γ_λ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$) в нулевом приближении ММЧЭ. Эта система описывает течения невязкого и нетеплопроводного газа.

3. Интегралы движения и скорость распространения малых возмущений. В механике жидкости скорость звука ассоциируется со скоростью распространения малых возмущений в невязкой и нетеплопроводной жидкости.

Если пренебрегать операторами J_i'' в уравнениях (2) и (8) и релаксационными членами $r_\lambda^{(0)}$ и $\tilde{\chi}_\lambda$ ($\lambda = \overline{0, \Lambda}$) в правых частях уравнений (20) и (21), то, следуя традиционным методам (см., например, [13]), можно получить интегралы движения. Эти интегралы можно записать в виде [14]

$$\frac{\psi_\lambda}{\varrho} = \text{const}, \quad (28)$$

$$\gamma_0 \frac{\tilde{e} + p}{\varrho} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \frac{\psi_\lambda}{\varrho} = \text{const}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{\tilde{e} + p}{\varrho} = 0. \quad (30)$$

Ноль в правой части интеграла Лагранжа (30) связан с особым выбором потенциала скорости φ .

В случае малых возмущений также можно пренебречь членами $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma_\lambda$ и $\tilde{\chi}_\lambda$ в уравнении (24) и членами $v^2/2$ в (30). В результате вместо (24) получим уравнение

$$\frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial t} = -\chi_\lambda \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \lambda = \overline{0, \Lambda}, \quad (31)$$

вместо уравнения (30) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\tilde{e} + p}{\varrho} = 0. \quad (32)$$

Продифференцировав полученное из (30) уравнение (32) по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{e} + p}{\varrho} \right). \quad (33)$$

Используя интегралы (28) и (29), можем переписать (33) в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{\tilde{e} + p}{\varrho} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \frac{\psi_\lambda}{\varrho} \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial t} \right). \quad (34)$$

Используя выражения (25) и уравнения (31), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\gamma_0 \varrho} \left((\tilde{\varepsilon} + p) \chi_0 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \psi_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (35)$$

С учетом соотношения $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi$, выражения (18) для давления и обозначений, введенных в (27), получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{p}{\varrho} \left(\langle \tilde{h} \rangle \chi_0 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \langle \psi_{\lambda} \rangle \chi_{\lambda} \right) \Delta \varphi. \quad (36)$$

Коэффициент при операторе Лапласа $\Delta \varphi$ в волновом уравнении (36) можно ассоциировать с квадратом скорости звука [15]:

$$a^2 = \left(\langle \tilde{h} \rangle \chi_0 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \langle \psi_{\lambda} \rangle \chi_{\lambda} \right) \frac{p}{\varrho}. \quad (37)$$

Соотношение (37) можно переписать в традиционном виде

$$a^2 = \varkappa \frac{p}{\varrho}, \quad \varkappa = \langle \tilde{h} \rangle \chi_0 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \langle \psi_{\lambda} \rangle \chi_{\lambda} \quad (38)$$

не является постоянной величиной. Формулы (38) позволяют определять зависимость скорости звука от температуры T (или γ_0) и других интенсивных параметров. Эти формулы использовались в [16] для исследования влияния колебательного возбуждения молекул на скорость звука.

Заключение. Рассмотренные в статье модельные уравнения (8) позволяют получить замкнутые системы уравнений для минимального числа экстенсивных или сопряженных им интенсивных параметров при исследовании равновесных и неравновесных режимов течений газовых смесей с физико-химическими процессами. Полученные макроскопические уравнения (24) и (27) являются замкнутой системой уравнений для скорости \mathbf{v} и интенсивных параметров γ_{λ} , описывающей течения невязкого и нетеплопроводного газа в нулевом приближении модифицированного метода Чепмена—Энскога. Квадрат скорости звука определяется как коэффициент при операторе Лапласа в волновом уравнении (36). При этом параметр \varkappa в рассматриваемых условиях не является постоянным, а формулы (38) можно использовать для исследования зависимости скорости звука от температуры T и интенсивных параметров γ_{λ} ($\lambda = \overline{1, \Lambda}$).

Литература

1. Валландер С. В., Нагнибеда Е. А., Рыдалевская М. А. Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
2. Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003.
3. Рыдалевская М. А. Статистические и кинетические модели в физико-химической газодинамике. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003.

4. *Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M.* A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 94. Issue 3. P. 511–525. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.94.511>

5. *Gross E. P., Krook M.* Model for Collision Processes in Gases: Small-Amplitude Oscillations of Charged Two-Component Systems // *Phys. Rev.* 1956. Vol. 102. Issue 3. P. 593–604. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.102.593>

6. *Hanson F. B., Morse T. F.* Kinetic Models for a Gas with Internal Structure // *Physics of Fluids.* 1967. Vol. 10. Issue 2. P. 345–353. <https://doi.org/10.1063/1.1762114>

7. *Morse T. F.* Kinetic Model for Gases with Internal Degrees of Freedom // *Physics of Fluids.* 1964. Vol. 7. Issue 2. P. 159–169. <https://doi.org/10.1063/1.1711128>

8. *Рыдалевская М. А.* Иерархия времен релаксации и модельные кинетические уравнения // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2010. Вып. 2. С. 55–62.

9. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1965. 484 с.

10. *Bruno D., Giovangigli V.* Relaxation of internal temperature and volume viscosity // *Physics of Fluids.* 2011. Vol. 23. Issue 9. P. 093104. <https://doi.org/10.1063/1.3640083>

11. *Рыдалевская М. А.* Модифицированный метод Чепмена—Энскога в терминах интенсивных параметров // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2010. Т. 50, № 7. С. 1303–1314.

12. *Rydalevskaya M. A.* Kinetic Foundation of Nonextensive Gas Dynamics // *AIP Conference Proceedings.* 2005. Vol. 762. Issue 7. P. 1073–1078. <https://doi.org/10.1063/1.1941677>

13. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

14. *Рыдалевская М. А., Ворошилова Ю. Н.* Гидромеханика идеальной жидкости. Постановка задач и основные свойства. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2016.

15. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: в 2-х т. Т. 2. М.: Наука, 1973.

16. *Ворошилова Ю. Н., Рыдалевская М. А.* Влияние колебательного возбуждения молекул на скорость звука в высокотемпературном двухатомном газе // *ПМТФ.* 2008. Вып. 3. С. 28–34.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Ворошилова Юлия Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; y.voroshilova@spbu.ru

Model kinetic equations and macroscopic description of gas fluxes for various relaxation stages

Yu. N. Voroshilova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Voroshilova Yu. N. Model kinetic equations and macroscopic description of gas fluxes for various relaxation stages. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 278–286. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.208>

Various relaxation stages of gas flows with physical and chemical processes are considered in zero- and first-order approximations of the modified Chapman—Enskog method in terms of intensive parameters which are conjugated to governing extensive ones for this relaxation stage. To simplify the transport processes investigation, the model kinetic equations are used. In these equations the BGK-type operator substitutes a group of collision operators which describe the forming of the quasi-stationary distribution functions on the relaxation stage under review. Proposed model equations can be used for the study of any equilibrium and non-equilibrium regimes of the flows when strong deviations from the equilibrium distributions over chemical species and part of internal energy are observed along with

weak deviations from equilibrium of translational energy and remaining part of the internal energy. The expressions for transport fluxes are given in terms of intensive parameters. The formula for sound velocity (as the velocity of propagation of small perturbations) with coefficient α which is not constant in considered conditions is given.

Keywords: model kinetic equations, various relaxation stages, extensive and intensive parameters.

References

1. Vallander S. V., Nagnibeda E. A., Rydalevskaya M. A., *Some Questions of the Kinetic Theory of the Chemical Reacting Gas Mixture* (Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1977) [in Russian] (English Transl. US Air Force FASTC-ID (RS) TO-0608-93).
2. Nagnibeda E. A., Kustova E. V., *Non-Equilibrium Reacting Gas Flows*. In Ser.: *Heat and Mass Transfer* (Springer, Berlin-Heidelberg, 2009).
3. Rydalevskaya M. A., *Statistical and Kinetic Models in Physical-Chemical Gas Dynamics* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2003) [in Russian].
4. Bhatnagar P. L., Gross, E. P., Krook M., "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems", *Phys. Rev.* **94**, issue 3, 511–525 (1954). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.94.511>
5. Gross E. P., Krook M., "Model for Collision Processes in Gases: Small-Amplitude Oscillations of Charged Two-Component Systems", *Phys. Rev.* **102**, issue 3, 593–604 (1956). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.102.593>
6. Hanson F. B., Morse T. F. "Kinetic Models for a Gas with Internal Structure", *Physics of Fluids* **10**, issue 2, 345–353 (1967). <https://doi.org/10.1063/1.1762114>
7. Morse T. F., "Kinetic Model for Gases with Internal Degrees of Freedom", *Physics of Fluids* **7**, issue 2, 159–169 (1964). <https://doi.org/10.1063/1.1711128>
8. Rydalevskaya M. A., "Hierarchy of relaxation times and the model kinetic equations", *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, issue 2, 55–62 (2010) [in Russian].
9. Stupochenko E., Losev S., Osipov A., *Relaxation in Shock Waves* (Springer, Heidelberg, 1967).
10. Bruno D., Giovangigli V., "Relaxation of internal temperature and volume viscosity", *Physics of Fluids* **23**, issue 9, 093104 (2011). <https://doi.org/10.1063/1.3640083>
11. Rydalevskaya M. A., "Modified Chapman–Enskog method in the terms of intensive parameters", *Comput. Math. and Math. Phys.* **50**, issue 7, 1238–1248 (2010). 10.1134/S0965542510070122
12. Rydalevskaya M. A., "Kinetic Foundation of Nonextensive Gas Dynamics", *AIP Conference Proceedings* **762**, issue 7, 1073–1078 (2005). <https://doi.org/10.1063/1.1941677>
13. Vallander S. V., *Lectures on hydroaeromechanics* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005) [in Russian].
14. Rydalevskaya M. A., Voroshilova Yu. N., *Hydromechanics of an ideal fluid. Statement of problems and basic properties* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2016) [in Russian].
15. Sedov L. I., *A Course on Continuum Mechanics* **2** (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971).
16. Voroshilova Yu. N., Rydalevskaya M. A., "Effect of vibrational excitation of molecules on the velocity of sound in a high-temperature diatomic gas", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **49**, issue 3, 369–374 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0051-1>

Author's information:

Yulia N. Voroshilova — y.voroshilova@spbu.ru