

Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур.

1. Постановка задачи

*Л. В. Паршина*¹, *В. М. Рябов*², *Б. А. Ярцев*^{1,2}

¹ Крыловский государственный научный центр,

Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

² Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А.* Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 300–309. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.210>

Предложена математическая модель затухающих колебаний слоистых пластин, образованных конечным числом компонуемых в анизотропную структуру произвольного ориентированных ортотропных вязкоупругих слоев конструкционных полимерных композиционных материалов (ПКМ), на одну из наружных поверхностей которой нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера. Модель строится на основе использования вариационного принципа Гамильтона, уточненной теории пластин Рейсснера—Миндлина и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости. При описании физических соотношений материалов слоев ортотропных конструкционных ПКМ влияние частоты колебаний и температуры окружающей среды считается пренебрежимо малым, в то время как для слоя «жесткого» вязкоупругого полимера учет температурно-частотной зависимости упруго-диссипативных характеристик выполняется на основе экспериментально определенных обобщенных кривых. В качестве частного случая общей задачи путем пренебрежения деформированием срединной поверхности в направлении одной из осей пластины получены уравнения движения балки Тимошенко, на одну из наружных поверхностей которой нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера. Минимизация функционала Гамильтона позволяет свести задачу о затухающих колебаниях анизотропных конструкций к алгебраической проблеме комплексных собственных значений. Для формирования системы алгебраических уравнений применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. Сначала находятся вещественные решения. Для нахождения комплексных собственных частот системы в качестве их начальных значений используются найденные вещественные собственные частоты, а затем вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка.

Ключевые слова: демпфирование, полимерные композиционные материалы, анизотропия, вязкоупругие полимеры, температурно-частотная зависимость, колебания, собственная частота, коэффициент механических потерь.

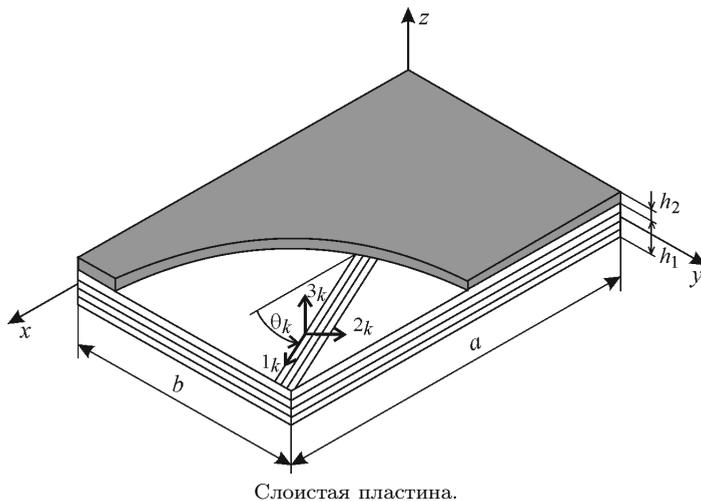
1. Одним из преимуществ конструкций из полимерных композиционных материалов (ПКМ) являются высокие демпфирующие свойства. Поскольку характер-

ные для ПКМ уровни диссипации энергии на 1–2 десятичных порядка превосходят аналогичные показатели для металлов и сплавов, то, в отличие от конструкций из традиционных материалов, демпфирование в композитных конструкциях рассматривается не как полезный вторичный эффект, а как один из основных параметров проектирования. Этим и объясняется устойчивый интерес к проблеме рассеяния энергии при колебаниях слоистых композитных конструкций, подтверждающийся рядом обзоров, содержащих анализ работ на данную тему [1–5]. Не останавливаясь подробно на рассмотрении существующих в настоящее время публикаций, отметим лишь, что основная масса статей посвящена созданию математических моделей, а также расчетному и экспериментальному исследованию влияния составов и структур армирования композита и граничных условий на демпфирующую способность ПКМ. Выполненные исследования позволили установить диапазоны изменения диссипативных характеристик конструкционных ПКМ в зависимости от перечисленных факторов и показать недостаточность реализуемых уровней рассеяния энергии для снижения до требуемых величин амплитуд резонансных колебаний ряда композитных конструкций. В связи с этим появились предложения по способам повышения уровней диссипации энергии за счет введения в состав слоистой структуры вязкоупругих материалов [6–10], пьезоэлектрических элементов [11], металлов с памятью формы [12] или использования иных способов [13]. В современных практических приложениях наибольшее распространение получил предложенный для повышения демпфирования металлических конструкций [14, 15] первый из перечисленных способов. Авторы подавляющего большинства публикаций рассматривают структуры, в состав которых включены слои «мягких» вязкоупругих материалов [6–10]. Между тем относительно низкие упругие характеристики большинства конструкционных ПКМ позволяют создавать композитные конструкции с высокими диссипативными свойствами путем включения в их состав слоев «жестких» вязкоупругих материалов. Эффективность таких конструкций обусловлена соизмеримостью вкладов силовых и демпфирующих слоев в потенциальную энергию деформации механической системы в целом [16]. Очевидно, что бесконечное многообразие возможных вариантов составов неоднородных по толщине структур порождает необходимость прогнозирования их демпфирующей способности на основе использования методов математического моделирования, позволяющих учитывать как особенности распределения вязкоупругого материала по объему конструкции, так и температурно-частотный режим ее эксплуатации. Последнее обстоятельство и послужило причиной написания данной работы.

2. Рассматривается безопорная прямоугольная пластина (см. рисунок), образованная конечным числом $p - 1$ компонент в анизотропную структуру произвольно ориентированных ортотропных вязкоупругих слоев конструкционных ПКМ, на одну из наружных поверхностей которой нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера (p -й слой). Проскальзывание между слоями отсутствует. В соответствии с уточненной теорией Рейсснера—Миндлина элементы вектора перемещений пластины представляются в виде

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\alpha(x, y, t), \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\beta(x, y, t), \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w — поступательные перемещения срединной поверхности в направлении осей x, y, z ; α, β — углы поворота относительно осей y, z .



Элементы вектора деформаций связаны с элементами вектора перемещений (1) соотношениями

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{yz} \\ k_{xz} \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ \beta + w_{,y} \\ \alpha + w_{,x} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \alpha_{,x} \\ \beta_{,y} \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{,y} + \beta_{,x} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $(\dots)_{,x}, (\dots)_{,y}$ — символы частных производных по пространственным переменным x, y .

При произвольной ориентации ортотропного слоя конструкционного ПКМ относительно связанной с направлениями осей пластины глобальной системы координат происходит изменение класса его упругой симметрии, т.е. ортотропный материал трансформируется в моноклинный. Тогда, учитывая, что в двумерной теории пластин принимается $\sigma_{zz} = 0$, физические соотношения для конструкционного слоя записываются в виде [17–19]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $\bar{Q}_{lm} = \bar{Q}_{lm}(f, T_C) = \text{Re} \bar{Q}_{lm}(f, T_C) + i \cdot \text{Im} \bar{Q}_{lm}(f, T_C) = \text{Re} \bar{Q}_{lm}(f, T_C)[1 + i\eta_{lm}(f, T_C)]$ — элементы комплексной матрицы жесткости моноклинного слоя конструкционного ПКМ в глобальной системе координат, связанной с направлениями

осей пластины [18–20]:

$$\left(\begin{array}{c} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{44} \\ \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{55} \end{array} \right)_{(k)} = \left[\begin{array}{cccccc} m^4 & 2m^2n^2 & n^4 & 4m^2n^2 & 0 & 0 \\ m^2n^2 & m^4 + n^4 & m^2n^2 & -4m^2n^2 & 0 & 0 \\ n^4 & 2m^2n^2 & m^4 & 4m^2n^2 & 0 & 0 \\ m^2n^2 & -2m^2n^2 & m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 & 0 & 0 \\ m^3n & -mn(m^2 - n^2) & -mn^3 & -2mn(m^2 - n^2) & 0 & 0 \\ mn^3 & mn(m^2 - n^2) & -m^3n & 2mn(m^2 - n^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^2 & n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -mn & mn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n^2 & m^2 \end{array} \right]_{(k)} \left(\begin{array}{c} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \\ Q_{44} \\ Q_{55} \end{array} \right)_{(k)}, \quad (4)$$

где f – частота колебаний; T_C – температура окружающей среды; $m = \cos \theta$; $n = \sin \theta$, θ – угол ориентации локальной системы координат 123 слоя ортотропного конструкционного ПКМ относительно глобальной системы координат xyz .

В общем случае имеем $\overline{Q}_{lm} = \overline{Q}_{lm}(f, T_C)$, однако при $T_C < T_g$ (T_g – температура стеклования) температурно-частотная зависимость упруго-диссипативных характеристик конструкционных ПКМ пренебрежимо мала [1–5]. В связи с этим далее при определении вещественных и мнимых частей элементов комплексной матрицы жесткости слоев конструкционного ПКМ учитывается лишь влияние их ориентации относительно глобальной системы координат в соответствии с соотношениями (4). Входящие в (4) элементы Q_{lm} вектора жесткостей слоя в локальной системе координат 123 вычисляются по формулам

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = -\frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = -\frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12},$$

где $E_{ll} = \text{Re } E_{ll} + i \cdot \text{Im } E_{ll} = \text{Re } E_{ll}(1 + i \cdot \eta_{ll})$ – комплексные модули упругости ($l = 1, 2$), $G_{lm} = \text{Re } G_{lm} + i \cdot \text{Im } G_{lm} = \text{Re } G_{lm}(1 + i \cdot \eta_{lm})$ – комплексные модули сдвига ($l, m = 1, 2, 3$) и $\nu_{lm} = \text{Re } \nu_{lm}$ – коэффициенты Пуассона ($l, m = 1, 2$) слоя ортотропного конструкционного ПКМ в локальной системе координат 123 .

Физические соотношения для p -го слоя изотропного вязкоупругого полимера, демонстрирующего существенную температурно-частотную зависимость упруго-диссипативных характеристик в рассматриваемом диапазоне изменения температуры окружающей среды [13], таковы:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(f, T_C)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = -\frac{\nu E(f, T_C)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(f, T_C) = \frac{E(f, T_C)}{2(1 + \nu)},$$

где $E(f, T_C) = \text{Re } E(f, T_C) + i \cdot \text{Im } E(f, T_C) = \text{Re } E(f, T_C)[1 + i\eta(f, T_C)]$. Частотная зависимость вещественной части комплексного модуля упругости и коэффициента механических потерь вязкоупругого полимера при фиксированных значениях температуры окружающей среды $T_C = \text{const}$ описывается полиномами вида

$$\lg \text{Re } (E(f)) = \sum_{m=0}^N p_m (\lg f)^{N-m}, \quad \lg \eta(f) = \sum_{n=0}^M q_n (\lg f)^{M-n}.$$

Интегрируя элементы вектора напряжений (3) по высоте каждого слоя с учетом соотношений (2) и суммируя результаты по количеству слоев, определим мембранные усилия, изгибающие моменты и сдвиговые усилия, возникающие в пластине

независимо от толщин и ориентации слоев [19, 20]:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \alpha_{,x} \\ \beta_{,y} \\ \alpha_{,y} + \beta_{,x} \\ \beta + w_{,y} \\ \alpha + w_{,x} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Элементы матриц мембранных A_{lm} , смешанных B_{lm} и изгибных D_{lm} жесткостей вычисляются по формулам

$$(A_{lm}, B_{lm}, D_{lm}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{lm}(1, z, z^2) dz \quad (l, m = 1, 2, 6),$$

$$A_{lm} = \frac{5}{4} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \bar{Q}_{lm} dz \quad (l, m = 4, 5).$$

При определении поперечных усилий Q_{xz} и Q_{yz} несмотря на разрывы в свойствах материала на поверхностях отдельных слоев вводится непрерывная весовая функция их распределения $f(z) = 1,25(1 - 4z^2/h^2)$ [21]. Независимая аппроксимация касательных напряжений вносит лишь формальное противоречие в теорию Рейсснера, так как соотношения упругости для них выполняются интегрально по толщине пакета [22].

Потенциальная энергия деформации U и кинетическая энергия T слоистой пластины определяются соотношениями

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [N_{xx}u_{,x} + N_{yy}v_{,y} + N_{xy}(u_{,y} + v_{,x}) + M_{xx}\alpha_{,x} + M_{yy}\beta_{,y} + M_{xy}(\alpha_{,y} + \beta_{,x}) + Q_{yz}(\beta + w_{,y}) + Q_{xz}(\alpha + w_{,x})] dx dy, \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [I_0(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2I_1(\dot{u}\dot{\alpha} + \dot{v}\dot{\beta}) + I_2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)] dx dy. \quad (7)$$

В зависимости (7) введены следующие обозначения:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{k=1}^p \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k(1, z, z^2) dz,$$

где ρ_k — плотность материала k -го слоя.

Для записи уравнений затухающих колебаний слоистой пластины используется вариационный принцип Гамильтона:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (8)$$

где $L = T - U$ — функция Лагранжа. Подставляя (6), (7) в (8) и производя преобразования, включающие интегрирование по частям, приведем первую вариацию функционала Гамильтона к виду

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b [(N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{\alpha}) \delta u + (N_{yy,y} + N_{xy,x} - I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{\beta}) \delta v + \\ & + (Q_{xz,x} + Q_{yz,y} - I_0 \ddot{w}) \delta w + (M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{xz} - I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{\alpha}) \delta \alpha + \\ & + (M_{yy,y} + M_{xy,x} - Q_{yz} - I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{\beta}) \delta \beta] dx dy dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a [N_{xy} \delta u + N_{yy} \delta v + Q_{yz} \delta w + M_{xy} \delta \alpha + M_{yy} \delta \beta]_0^b dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b [N_{xx} \delta u + N_{xy} \delta v + Q_{xz} \delta w + M_{xx} \delta \alpha + M_{xy} \delta \beta]_0^a dx dt. \quad (9) \end{aligned}$$

Предположим, что движение слоистой пластины происходит по закону

$$\begin{aligned} (u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t), \alpha(x, y, t), \beta(x, y, t)) = \\ = (u_0(x, y), v_0(x, y), w_0(x, y), \alpha_0(x, y), \beta_0(x, y)) e^{i\omega t}. \quad (10) \end{aligned}$$

Условиями стационарности функционала (9) с учетом зависимости (5) служат дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + 2A_{16}u_{0,xy} + A_{66}u_{0,yy} + A_{16}v_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + A_{26}v_{0,yy} + \\ + B_{11}\alpha_{0,xx} + 2B_{16}\alpha_{0,xy} + B_{66}\alpha_{0,yy} + B_{16}\beta_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})\beta_{0,xy} + B_{26}\beta_{0,yy} + \\ + \omega^2 (I_0u_0 + I_1\alpha_0) = 0, \\ A_{16}u_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{26}u_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + 2A_{26}v_{0,xy} + A_{22}v_{0,yy} + \\ + B_{16}\alpha_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})\alpha_{0,xy} + B_{26}\alpha_{0,yy} + B_{66}\beta_{0,xx} + 2B_{26}\beta_{0,xy} + B_{22}\beta_{0,yy} + \\ + \omega^2 (I_0v_0 + I_1\beta_0) = 0, \\ A_{44}(\beta_{0,y} + w_{0,yy}) + A_{45}(\alpha_{0,y} + \beta_{0,x} + 2w_{0,xy}) + A_{55}(\alpha_{0,x} + w_{0,xx}) + \omega^2 I_0w_0 = 0, \\ B_{11}u_{0,xx} + 2B_{16}u_{0,xy} + B_{66}u_{0,yy} + B_{16}v_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})v_{0,xy} + B_{26}v_{0,yy} + \\ + D_{11}\alpha_{0,xx} + 2D_{16}\alpha_{0,xy} + D_{66}\alpha_{0,yy} + D_{16}\beta_{0,xx} + (D_{12} + D_{66})\beta_{0,xy} + D_{26}\beta_{0,yy} - \\ - A_{45}(\beta_0 + w_{0,y}) - A_{55}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2 (I_1u_0 + I_2\alpha_0) = 0, \\ B_{16}u_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})u_{0,xy} + B_{26}u_{0,yy} + B_{66}v_{0,xx} + 2B_{26}v_{0,xy} + B_{22}v_{0,yy} + \\ + D_{16}\alpha_{0,xx} + (D_{12} + D_{66})\alpha_{0,xy} + D_{26}\alpha_{0,yy} + D_{66}\beta_{0,xx} + 2D_{26}\beta_{0,xy} + D_{22}\beta_{0,yy} - \\ - A_{44}(\beta_0 + w_{0,y}) - A_{45}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2 (I_1v_0 + I_2\beta_0) = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

и естественные граничные условия при $x \in [0, a]$; $y = 0, b$:

$$\begin{bmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ \alpha_{0,x} \\ \beta_{0,y} \\ \alpha_{0,y} + \beta_{0,x} \\ \beta_0 + w_{0,y} \\ \alpha_0 + w_{0,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где ω — круговая собственная частота колебаний. Естественные граничные условия при $y \in [0, b]$; $x = 0, a$ записываются по аналогии.

Система дифференциальных уравнений движения (11) описывает связанные затухающие колебания анизотропной слоистой композитной пластины. Связанность колебаний, порождаемая как несимметрией по толщине структуры, так и произвольностью углов ориентации слоев ортотропного конструкционного ПКМ относительно глобальной системы координат конструкции, сопровождается множественными взаимными трансформациями собственных форм [23].

3. Из (11) легко получить уравнения движения безпорной несимметричной по толщине балки Тимошенко, образованной конечным числом компонуемых в ортотропную структуру вязкоупругих слоев конструкционных ПКМ, на одну из ружных поверхностей которой нанесен слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера. Для этого пренебрежем деформированием срединной поверхности в направлении оси y при $b \rightarrow h$, т.е. считаем, что $u_{,x} \neq 0$, $\alpha_{,x} \neq 0$, $\alpha + w_{,x} \neq 0$, $v_{,y} = u_{,y} + v_{,x} = \beta_{,y} = \alpha_{,y} + \beta_{,x} = \beta + w_{,y} = 0$. В этом случае $N_{yy} = N_{xy} = M_{yy} = M_{xy} = 0$ и уравнение (5) приводится к виду

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \alpha_{,x} \\ \alpha + w_{,x} \end{Bmatrix}.$$

Система дифференциальных уравнений движения (11) при этом упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + B_{11}\alpha_{0,xx} + \omega^2(I_0u_0 + I_1\alpha_0) &= 0, \\ A_{55}(\alpha_{0,x} + w_{0,xx}) + \omega^2I_0w_0 &= 0, \\ B_{11}u_{0,xx} + D_{11}\alpha_{0,xx} - A_{55}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2(I_1u_0 + I_2\alpha_0) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

а естественные граничные условия при $x = 0, l$ таковы:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ \alpha_{0,x} \\ \alpha_0 + w_{0,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Уравнения (13) используются далее при обосновании достоверности разработанной математической модели путем сравнения расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний.

В продолжении статьи описан метод решения и приведен анализ результатов численных экспериментов.

Литература

1. *Gibson R. F.* Dynamic Mechanical Properties of Advanced Composite Materials and Structures: A Review // Shock & Vibration Digest. 1987. Vol. 19, N 7. P. 13–22.
2. *Benchechou B., Coni M., Howarth H., White R.* Some aspects of vibration damping improvement in composite materials // Composites. Part B: Engineering. 1998. Vol. 29B. P. 809–817.
3. *Chandra R., Singh S. P., Gupta K.* Damping studies in fiber-reinforced composites — a review // Composite Structures. 1999. Vol. 46. P. 41–51.
4. *Finegan I. C., Gibson R. F.* Recent research on enhancement of damping in polymer composites // Composite Structures. 1999. Vol. 44, N 2–3. P. 89–98.
5. *Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M.* Damping in composite materials: Properties and models // Composites: Part B. 2015. Vol. 78. P. 144–152.
6. *Berthelot J.-M.* Damping analysis of orthotropic composites with interleaved viscoelastic layers: modeling // Journal of Composite Materials. 2006. Vol. 40, N 21. P. 1889–1909.
7. *Berthelot J.-M., Sefrani Y.* Damping analysis of unidirectional glass fiber composites with interleaved viscoelastic layers: experimental investigation and discussion // Journal of Composite Materials. 2006. Vol. 40, N 21. P. 1911–1932.
8. *Fotsing E., Sola M., Ross A., Ruiz E.* Lightweight damping of composite sandwich beams: experimental analysis // Journal of Composite Materials. 2012. Vol. 47, N 12. P. 1501–1511.
9. *Li J., Narita Y.* Analysis and optimal design for the damping property of laminated viscoelastic plates under general edge conditions // Composites. Part B: Engineering. 2013. Vol. 45, N 1. P. 972–980.
10. *Youzera H., Meftah S., Challamel N., Tounsi A.* Nonlinear damping and forced vibration analysis of laminated composite beams // Composites. Part B: Engineering. 2012. Vol. 43, N 3. P. 1147–1154.
11. *Gibson R.* A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures // Composite Structures. 2010. Vol. 92, N 12. P. 2793–2810.
12. *Ni Q.-Q., Zhang R., Natsuki T., Iwamoto M.* Stiffness and vibration characteristics of SMA/ER3 composites with shape memory alloy short fibers // Composite Structures. 2007. Vol. 79, N 4. P. 501–507.
13. *Zhou X. Q., Yu D. Y., Shao X. Y., Zhang S. Q., Wang S.* Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review // Composite Structures. 2016. Vol. 136. P. 460–480.
14. *Kerwin E.* Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer // Journal of Acoustical Society of America. 1959. Vol. 3, N 7. P. 952–962.
15. *Ungar E.* Loss factors of viscoelastically damped beam structures // Journal of Acoustical Society of America. 1962. Vol. 34, N 8. P. 1082–1089.
16. *Shaposhnikov V. M., Yartsev B. A.* Restructuring vibration absorption // Naval Architect. May 2016. P. 77–79.
17. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 1982.
18. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second Edition. CRC Press LLC, 2004. 831 p.
19. *Vinson J. R., Sierakowski R. L.* The Behavior of Structures Composed of Composite Materials. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004.
20. *Jones R. M.* Mechanics of Composite Materials. 2nd ed. Taylor & Francies, 1999.
21. *Reissner E.* The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // Journal of Applied Mechanics. 1945. Vol. 12, N 2. P. 69–77.
22. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Вариант нелинейной теории упругих многослойных полых оболочек // Механика композитных материалов. 1985. № 5. С. 853–860.
23. *Рябов В. М., Ярцев Б. А.* Собственные затухающие колебания анизотропных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов. 2. Численный эксперимент // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 3. С. 429–439.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Паршина Людмила Валентиновна — канд. техн. наук; ludaparshina@mail.ru

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук; boris_yar@mail.ru

Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures.

1. Formulation of problem

L. V. Parshina¹, V. M. Ryabov², B. A. Yartsev^{1,2}

¹ Krylov State Research Center, Moskovskoye shosse, 44,

St. Petersburg, 196158, Russian Federation

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9,

St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A. Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 1. Formulation of problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 300–309. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.210>

This paper suggests a mathematical model for decaying vibrations of layered plates formed by a finite number of arbitrarily oriented orthotropic viscoelastic layers of polymer composites arranged into an anisotropic structure with a layer of “stiff” isotropic viscoelastic material applied on one of its outer surfaces. The model is based on Hamilton variation principle, first-order shear deformation laminated plate theory (FSDT) and the viscoelastic correspondence principle of the linear viscoelasticity theory. In the description of the physical relationships between the materials of the layers forming orthotropic polymeric composites, the effect of vibration frequency and ambient temperature is assumed as negligible, whereas for the viscoelastic polymer layer, temperature–frequency relationship of elastic dissipation and stiffness properties is considered by means of the experimentally determined generalized curves. As a particular case of the general problem, neglect of medium surface straining in direction of one of the axes of the plate yielded the movement equations for Timoshenko beam with a layer of “stiff” isotropic viscoelastic polymer on one of its outer surfaces. Mitigation of Hamilton functional makes it possible to describe decaying vibration of anisotropic structures by an algebraic problem of complex eigenvalues. The system of algebraic equation is generated through Ritz method using Legendre polynomials as coordinate functions. First, real solutions are found. To find complex natural frequencies of the system, the obtained real natural frequencies are taken as input values, and then, by means of the 3rd order iteration method, complex natural frequencies are calculated.

Keywords: damping, polymeric composites, anisotropy, viscoelastic polymers, temperature–frequency dependence, vibrations, natural frequency, loss factor.

References

1. Gibson R. F., “Dynamic Mechanical Properties of Advanced Composite Materials and Structures: A Review”, *Shock & Vibration Digest* **19**(7), 13–22 (1987).
2. Benčekchou B., Coni M., Howarth H., White R., “Some aspects of vibration damping improvement in composite materials”, *Composites. Part B: Engineering* **29B**, 809–817 (1998).
3. Chandra R., Singh S. P., Gupta K., “Damping studies in fiber-reinforced composites — a review”, *Composite Structures* **46**, 41–51 (1999).
4. Finegan I. C., Gibson R. F., “Recent research on enhancement of damping in polymer composites”, *Composite Structures* **44**(2–3), 89–98 (1999).
5. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M., “Damping in composite materials: Properties and models”, *Composites: Part B* **78**, 144–152 (2015).

6. Berthelot J.-M., “Damping analysis of orthotropic composites with interleaved viscoelastic layers: modeling”, *Journal of Composite Materials* **40**(21), 1889–1909 (2006).
7. Berthelot J.-M., Sefrani Y., “Damping analysis of unidirectional glass fiber composites with interleaved viscoelastic layers: experimental investigation and discussion”, *Journal of Composite Materials* **40**(21), 1911–1932 (2006).
8. Fotsing E., Sola M., Ross A., Ruiz E., “Lightweight damping of composite sandwich beams: experimental analysis”, *Journal of Composite Materials* **47**(12), 1501–1511 (2012).
9. Li J., Narita Y., “Analysis and optimal design for the damping property of laminated viscoelastic plates under general edge conditions”, *Composites. Part B: Engineering* **45**(1), 972–980 (2013).
10. Youzera H., Meftah S., Challamel N., Tounsi A., “Nonlinear damping and forced vibration analysis of laminated composite beams”, *Composites. Part B: Engineering* **43**(3), 1147–1154 (2012).
11. Gibson R., “A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures”, *Composite Structures* **92**(12), 2793–2810 (2010).
12. Ni Q.-Q., Zhang R., Natsuki T., Iwamoto M., “Stiffness and vibration characteristics of SMA/ER3 composites with shape memory alloy short fibers”, *Composite Structures* **79**(4), 501–507 (2007).
13. Zhou X. Q., Yu D. Y., Shao X. Y., Zhang S. Q., Wang S., “Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review”, *Composite Structures* **136**, 460–480 (2016).
14. Kerwin E., “Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer”, *Journal of Acoustical Society of America* **3**(7), 952–962 (1959).
15. Ungar E., “Loss factors of viscoelastically damped beam structures”, *Journal of Acoustical Society of America* **34**(8), 1082–1089 (1962).
16. Shaposhnikov V. M., Yartsev B. A., “Restructuring vibration absorption”, *Naval Architect*, 77–79 (May 2016).
17. Washizu K., *Variational methods in elasticity and plasticity* (Pergamon Press, 1982).
18. Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis* (2nd ed., CRC Press LLC, 2004, 831 p.).
19. Vinson J. R., Sierakowski R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials* (Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2004).
20. Jones R. M. *Mechanics of Composite Materials* (2nd ed., Taylor & Francis, 1999).
21. Reissner E., “The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates”, *Journal of Applied Mechanics* **12**(2), 69–77 (1945).
22. Grigolyuk E. I., Kulikov G. M., “A variant of non-linear theory of elastic layered slanting shells”, *Mechanics of Composite Materials* (5), 853–860 (1985) [in Russian].
23. Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Natural damped vibrations of anisotropic box beams of polymer composite materials. 2. Numerical experiments”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**, issue 3, 260–268 (2016).

Author’s information:

Ludmila V. Parshina — ludaparshina@mail.ru

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru

Boris A. Yartsev — boris_yar@mail.ru