

## Интегралы движения и скорость звука в локально равновесных потоках ионизованных одноатомных газов\*

М. С. Романова<sup>1</sup>, М. А. Рыдалевская<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ПАО «Силловые машины — ЛМЗ»,

Российская Федерация, 195009, Санкт-Петербург, ул. Ватутина, 3

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Романова М. С., Рыдалевская М. А. Интегралы движения и скорость звука в локально равновесных потоках ионизованных одноатомных газов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 310–320. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.211>

Рассматриваются локально равновесные течения ионизованных химически однородных одноатомных газов. Используются макроскопические уравнения сохранения импульса, энергии, общего числа ионов с максимальным зарядом и общего числа электронов (имеются в виду как связанные, так и свободные ионы и электроны). Для этих уравнений выведен ряд интегральных соотношений. Получена аналитическая формула, позволяющая исследовать влияние электронных степеней свободы и термической ионизации на скорость звука. Для иллюстрации приводятся температурные зависимости равновесных концентраций компонентов и адиабатического коэффициента в ионизованном гелии разной плотности.

*Ключевые слова:* локально равновесные течения, одноатомные газы, термическая ионизация, уравнения сохранения, скорость распространения малых возмущений, адиабатический коэффициент.

**Введение.** Исследование локально равновесных течений ионизованных газов имеет важное значение для решения многих научных и технологических задач.

В настоящее время при исследовании течений газов с физико-химическими процессами широко используются методы кинетической теории газов. Присутствие заряженных частиц во многих случаях приводит к необходимости изменения классического уравнения Больцмана и его обобщений из-за расходимости некоторых интегралов, связанной с использованием кулоновского потенциала, а также из-за появления динамической поляризации и крупномасштабных флуктуаций среды (см., например, монографии [1–6] или работы [7, 8]).

Так как в настоящей статье мы рассматриваем локально равновесные течения идеальной плазмы, то в ней, как и в [9], используются кинетические уравнения, которые являются простым обобщением уравнений для смесей нейтральных газов с физико-химическими процессами (см., например, [10–12]). Следствием этого является возможность использования стандартного уравнения переноса микроскопических признаков, на основании которого выводятся уравнения сохранения. Эти же

\* Работа выполнена при поддержке СПбГУ (проект № 6.37.206.2016).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

условия сохранения используются при выводе равновесных функций распределения [13–15].

Такой подход позволяет упростить исследование локально равновесных течений ионизированных газов и вывод соответствующих интегралов движения. Кроме того, при этом удастся получить аналитическую формулу для скорости распространения малых возмущений. Эта формула позволяет определить влияние степени ионизации газа на величину адиабатического коэффициента и скорость звука.

**1. Кинетические и газодинамические уравнения.** С повышением температуры в химически однородном одноатомном газе возбуждаются электронные степени свободы, активизируются процессы обмена электронами, ионизация и нейтрализация.

Если известно, что в исследуемых потоках газа возможна  $k$ -кратная ионизация атомов, система кинетических уравнений может быть записана в виде

$$D_{ci}f_{ci} = J_{ci}, \quad c = \overline{0, k}, \quad (1)$$

$$D_e f_e = J_e, \quad (2)$$

где  $f_{ci}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  — функции распределения «тяжелых» частиц (атомов и ионов с зарядом  $c = +1, \dots, +k$ ), индекс  $i$  соответствует фиксированному уровню энергии частиц сорта  $c$  и определяется набором квантовых чисел  $i_{c+1}, i_{c+2}, \dots, i_k$ , характеризующих уровни энергии электронов, присутствующих в электронной оболочке, окружающей ион с зарядом  $+k$ ;  $f_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  — функции распределения свободных электронов;  $D_{ci}$  и  $D_e$  — дифференциальные операторы, описывающие изменение функций распределения вдоль фазовых траекторий;  $J_{ci}$  и  $J_e$  — интегральные операторы, описывающие изменение функций распределения при столкновениях.

В рассматриваемой ионизированной смеси при всех столкновениях наряду с импульсом сохраняется полная энергия, число ионов с зарядом  $+k$  и электронов (имеются в виду как связанные, так и свободные ионы и электроны).

При использовании одножидкостной модели плазмы газодинамическая скорость определяется формулой

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{c=0}^k \sum_i \int f_{ci}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) m_c \mathbf{u} d\mathbf{u} + \int f_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) m_e \mathbf{u} d\mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $m_c$  и  $m_e$  — массы соответствующих частиц, массовая плотность газа  $\rho$  дается формулой

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{c=0}^k m_c n_c + m_e n_e, \quad (4)$$

а числовые плотности тяжелых частиц и электронов определяются выражениями

$$n_c = \sum_i \int f_{ci} d\mathbf{u}, \quad (5)$$

$$n_e = \int f_e d\mathbf{u}. \quad (6)$$

Общее число частиц  $n$  в единице объема газа соответственно равно

$$n = \sum_c n_c + n_e \quad (7)$$

Равновесные функции распределения в ионизованных одноатомных газах, полученные в [13, 15], после перехода к собственным скоростям  $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  примут вид

$$f_{ci}^{(0)} = s_{ci} \frac{m_c^3}{h^3} \exp \left( \gamma_0 \left( \frac{m_c \mathbf{c}^2}{2} + \varepsilon_{ci} \right) + \gamma_1 + \gamma_2 (k - c) \right), \quad c = \overline{0, k}, \quad (8)$$

$$f_e^{(0)} = \frac{m_e^3}{h^3} \exp \left( \gamma_0 \frac{m_e \mathbf{c}^2}{2} + \gamma_2 \right). \quad (9)$$

Здесь  $h$  — постоянная Планка,  $\varepsilon_{ci}$  и  $s_{ci}$  — внутренняя энергия и соответствующий ей статистический вес атомов и ионов; коэффициенты  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  зависят от координат и времени и определяются из условий нормировки:

$$\sum_{c=0}^k \sum_i \int f_{ci}^{(0)} \left( \frac{m_c \mathbf{c}^2}{2} + \varepsilon_{ci} \right) d\mathbf{c} + \int f_e^{(0)} \frac{m_e \mathbf{c}^2}{2} d\mathbf{c} = e(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

$$\sum_{c=0}^k \sum_i \int f_{ci} d\mathbf{c} = \sum_{c=0}^k n_c = \tilde{n}_k(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

$$\sum_{c=0}^k (k - c) \sum_i \int f_{ci} d\mathbf{c} + \int f_e d\mathbf{c} = \sum_{c=0}^k n_c (k - c) + n_e = \tilde{n}_e(\mathbf{r}, t), \quad (12)$$

где  $e(\mathbf{r}, t)$ ,  $\tilde{n}_k(\mathbf{r}, t)$ ,  $\tilde{n}_e(\mathbf{r}, t)$  — полная собственная энергия, общие числа ионов с зарядом  $+k$  и электронов в единице объема (как свободных, так и входящих в «тяжелые» частицы).

Из термодинамики известно, что при классическом и квазиклассическом описаниях поступательных степеней свободы энергия  $e(\mathbf{r}, t)$  в равновесии может быть представлена в виде

$$e = \frac{3}{2} n k T + e_{int}, \quad (13)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — термодинамическая температура газа,  $e_{int}$  — внутренняя электронная энергия атомов и ионов в единице объема.

В этих условиях из соотношений (8)–(10) и (13) следует равенство

$$\gamma_0 = -\frac{1}{kT}.$$

Для нейтральных газовых смесей с физико-химическими процессами из кинетических уравнений в нулевом приближении метода Чепмена—Энскога была выведена система макроскопических уравнений сохранения [16]. Эта система включала наряду с уравнением движения дифференциальные уравнения для суммарных значений столкновительных инвариантов в единице объема.

Действуя по аналогии с [16], можно вывести подобную систему уравнений для локально равновесных течений ионизованных химически однородных газов. Эта система будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (14)$$

$$\frac{de}{dt} = -(e + p) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (15)$$

$$\frac{d\tilde{n}_k}{dt} = -\tilde{n}_k \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\frac{d\tilde{n}_e}{dt} = -\tilde{n}_e \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на единицу массы газа, а давление  $p$  определяется формулой

$$p = -\frac{n}{\gamma_0} = nkT. \quad (18)$$

**Замечание 1.** Наряду с выражением для плотности, представленным в (4), можно записать соотношение

$$\rho = m_k \tilde{n}_k + m_e \tilde{n}_e,$$

из которого следует, что уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

является следствием уравнений (16) и (17).

**Замечание 2.** Используя уравнение неразрывности, уравнение (15) можно переписать в виде

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}, \quad (19)$$

где  $H = (e + p) / \rho = \tilde{h} / \rho$  — удельная энтальпия.

**Замечание 3.** Так как параметры  $e$ ,  $\tilde{n}_k$ ,  $\tilde{n}_e$  и  $p$  зависят от координат и времени через коэффициенты  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (см. формулы (8)–(12) и (18)), уравнения (15)–(17) можно заменить уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_0}{dt} &= -\frac{\Delta_0}{\Delta} \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= -\frac{\Delta_1}{\Delta} \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\Delta = D(e, \tilde{n}_k, \tilde{n}_e) / D(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  — якобиан перехода от параметров  $e$ ,  $\tilde{n}_k, \tilde{n}_e$  к  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ;  $\Delta_\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, 2$ ) — определители  $\Delta$ , в которых столбцы производных по  $\gamma_\lambda$  заменены столбцом коэффициентов при  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  в правых частях уравнений (15)–(17).

**2. Интегралы движения.** Соотношения, которые оказываются выполненными в разных задачах механики жидкости и газа, часто называют интегралами движения (см., например, [17]). Именно такие соотношения, справедливые при любых локально равновесных течениях ионизованного газа, приводятся в настоящем параграфе.

1. Легко видеть (см. (15)–(17) и уравнение неразрывности), что массовые доли ионов с зарядом  $+k$  и электронов постоянны на траекториях газовых частиц:

$$\frac{m_k \tilde{n}_k}{\rho} = \text{const}, \quad \frac{m_e \tilde{n}_e}{\rho} = \text{const}. \quad (21)$$

2. При движении плазмы в консервативном поле массовых сил, действуя традиционным методом, для стационарных течений можно вывести интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + U + H = \text{const}, \quad (22)$$

где  $U$  — потенциал массовых сил.

3. Для безвихревых движений ионизованной смеси в консервативном поле массовых сил мы также можем получить интеграл Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + H = f(t). \quad (23)$$

Здесь  $\varphi$  — скоростной потенциал, который может быть выбран так, чтобы правая часть соотношения (23) равнялась нулю.

**3. Скорость звука.** В газовой динамике скорость звука ассоциируется со скоростью распространения малых возмущений. В [18] при рассмотрении слабых возмущений безвихревой баротропной среды было выведено волновое уравнение для потенциала скорости  $\varphi$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \Delta \varphi. \quad (24)$$

Обыкновенная производная  $dp/d\rho$  была приравнена к квадрату скорости звука.

В принципе, коэффициент в волновом уравнении для потенциала скорости можно ассоциировать с квадратом скорости звука и в ситуации, когда он имеет более сложное выражение, а жидкость априори не является баротропной. Таким образом была исследована скорость звука в колебательно неравновесном газе из ангармонических осцилляторов [19].

Пусть потенциал скорости  $\varphi$  введен таким образом, что правая часть равенства (23) равна нулю, а скорость  $\mathbf{v}$  мала настолько, что везде можно пренебречь членами второго порядка малости. Тогда интеграл Лагранжа примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + H = 0, \quad (25)$$

а в уравнениях (15)–(17), (19) и (20) индивидуальная производная  $d/dt$  может быть заменена местной производной  $\partial/\partial t$ .

В условиях, когда потенциал массовых сил  $U$  не зависит от времени, в результате дифференцирования соотношения (25) будем иметь равенство

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\partial H}{\partial t},$$

которое с учетом формулы (19) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (26)$$

Формула (18) для давления позволяет выразить правую часть равенства (26) через производные  $\partial \gamma_\lambda / \partial t$  ( $\lambda = 0, 1, 2$ ):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho \gamma_0} \left[ \left( \frac{\partial n}{\partial \gamma_0} - \frac{n}{\gamma_0} \right) \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \right], \quad (27)$$

где  $n$  — общее число частиц в единице объема (7). Учитывая то, что общее число частиц  $n$  определяется через функции распределения (8) и (9), можно получить соотношения

$$\frac{\partial n}{\partial \gamma_0} = e, \quad \frac{\partial n}{\partial \gamma_1} = \tilde{n}_k, \quad \frac{\partial n}{\partial \gamma_2} = \tilde{n}_e. \quad (28)$$

Подставляя в (27) равенства (28) и соотношения (20), в которых производные  $d/dt$  заменены производными  $\partial/\partial t$ , будем иметь

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \gamma_0} \left[ (e + p) \frac{\Delta_0}{\Delta} + \tilde{n}_k \frac{\Delta_1}{\Delta} + \tilde{n}_e \frac{\Delta_2}{\Delta} \right] \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (29)$$

После подстановки (29) в (26), учитывая равенство  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \varphi$ , получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \quad (30)$$

где

$$a^2 = -\frac{1}{\rho \gamma_0} \left[ (e + p) \frac{\Delta_0}{\Delta} + \tilde{n}_k \frac{\Delta_1}{\Delta} + \tilde{n}_e \frac{\Delta_2}{\Delta} \right]. \quad (31)$$

Вводя в рассмотрение средние значения энтальпии, ионов и электронов, приходящихся на одну микрочастицу, можем записать

$$e + p = n \langle h \rangle, \quad \tilde{n}_k = n \langle \tilde{n}_k \rangle, \quad \tilde{n}_e = n \langle \tilde{n}_e \rangle. \quad (32)$$

При этом, опять используя выражение для давления (18), придем к обычной формуле для скорости звука:

$$a^2 = \varkappa \frac{p}{\rho}. \quad (33)$$

Однако в рассматриваемых условиях коэффициент  $\varkappa$  не постоянен и имеет достаточно сложную структуру:

$$\varkappa = \langle \tilde{h} \rangle \frac{\Delta_0}{\Delta} + \langle \tilde{n}_k \rangle \frac{\Delta_1}{\Delta} + \langle \tilde{n}_e \rangle \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (34)$$

Аналитические формулы (33) и (34) позволяют оценить влияние параметров  $\gamma_0$  (или  $T$ ),  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а значит влияние равновесного состава плазмы на величину адиабатического коэффициента и скорость звука.

**4. Влияние степени ионизации газа на величину адиабатического коэффициента.** Чтобы рассчитать равновесный состав термически ионизованного одноатомного газа при любой температуре по формулам (5) и (6), необходимо определить значения коэффициентов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Для этого можно воспользоваться методом, описанным в [13–15]. Указанный метод позволяет вычислить равновесные концентрации компонентов смеси в случае, когда известны температура смеси  $T$ , начальная числовая плотность  $n^{(0)}$  нейтрального газа и максимально возможная степень ионизации при заданной температуре.

Для иллюстрации в настоящей работе приводятся результаты численного расчета равновесного состава двукратно ионизованного гелия с начальной числовой плотностью  $n^{(0)} = N_L$  (рис. 1, а) и  $n^{(0)} = N_L \cdot 10^{-4}$  (рис. 1, б), где  $N_L$  — число Лошмидта.

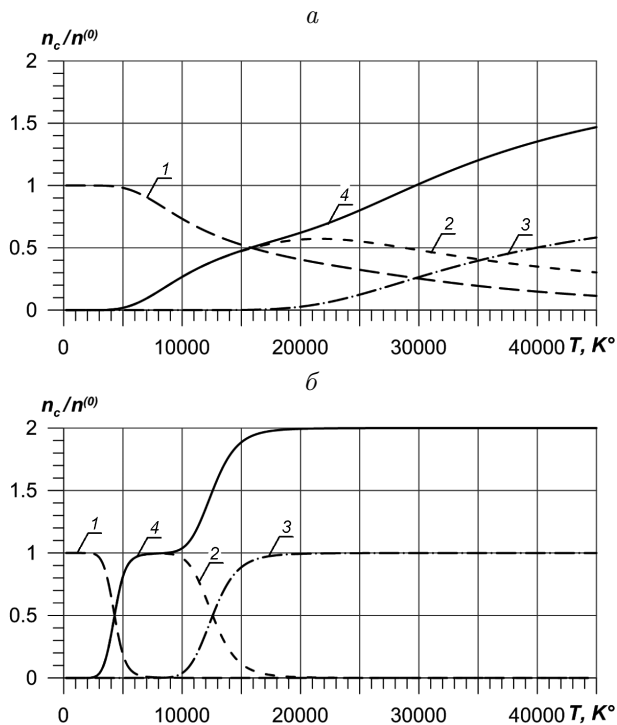


Рис. 1. Равновесный состав двукратно ионизованного гелия при  $n^{(0)} = N_L$  (а);  $n^{(0)} = N_L \cdot 10^{-4}$  (б). Кривые 1 соответствуют относительной концентрации атомов:  $n_0/n^{(0)}$ ; 2 — ионов с зарядом +1:  $n_1/n^{(0)}$ ; 3 — ионов с зарядом +2:  $n_2/n^{(0)}$ ; 4 — электронов:  $n_e/n^{(0)}$ .

Из рис. 1 видно, что при нагревании сначала в смеси кроме нейтральных атомов появляются ионы с зарядом +1 и свободные электроны. Затем при дальнейшем увеличении температуры число ионов с зарядом +1 уменьшается, так как они распадаются на ионы с зарядом +2 и электроны. При достаточно высоких температурах смесь состоит только из ионов с зарядом +2 и электронов.

Сравнивая температурные зависимости на рис. 1, а и б можно отметить, что в газе с меньшей начальной плотностью ионизация как первого, так и второго порядков начинается при более низких температурах, и для полной ионизации более разреженного газа требуется нагревание до меньших температур. Следует также отметить, что в газе с начальной плотностью  $n^{(0)} = N_L \cdot 10^{-4}$  ионизация второго порядка начинается при температурах, при которых однократная ионизация уже полностью прошла. Аналитическое объяснение этого явления приводится в [15].

Для ионизованных смесей, равновесный состав которых описан выше, были рассчитаны температурные зависимости адиабатического коэффициента  $\kappa$ .

Температурные зависимости адиабатического коэффициента  $\kappa$ , вычисленные по формуле (34) для ионизованного гелия с  $n^{(0)} = N_L$  и  $n^{(0)} = N_L \cdot 10^{-4}$ , приведены на рис. 2. Сопоставление кривых на рис. 1 и 2 показывает, что коэффициент  $\kappa$  существенно зависит от состава ионизованной смеси.

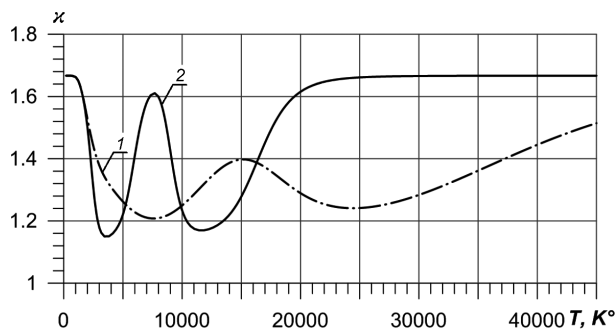


Рис. 2. Адиабатический коэффициент  $\kappa$  в ионизованном гелии с различной начальной плотностью. Кривая 1 соответствует  $n^{(0)} = N_L$ ; 2 —  $n^{(0)} = N_L \cdot 10^{-4}$ .

При сравнительно низких температурах, когда газ состоит только из атомов  $He$  и можно считать, что энергия газа равна  $3/2nkT$ , в результате расчетов по формуле (34) получено значение  $\kappa = 1.66$ .

Вследствие повышения температуры возбуждается электронная энергия атома (энергия внешнего электрона), что приводит к понижению коэффициента  $\kappa$ . В процессе ионизации появляются ионы  $He^+$ , причем на начальном этапе можно считать, что они обладают лишь поступательными степенями свободы. Это приводит к тому, что при некоторой температуре коэффициент  $\kappa$  начинает возрастать.

Дальнейший рост температуры приводит к возбуждению электронной энергии иона с зарядом  $+1$ . На этом этапе начинается новое понижение коэффициента  $\kappa$ . Далее в результате термической ионизации и отрыва второго электрона образуются ионы  $He^{++}$ . Так как они обладают лишь поступательной энергией, уменьшается общее число степеней свободы частиц и, начиная с некоторой температуры, коэффициент  $\kappa$  снова возрастает.

Все эти особенности температурной зависимости коэффициента  $\kappa$  наблюдаются у каждой кривой на рис. 2. На кривой 1, соответствующей газу с начальной плотностью  $n^{(0)} = N_L$ , изменения поведения температурной зависимости  $\kappa(T)$  выражены более слабо и начинаются при более высоких температурах. На кривой 2, соответствующей начальной плотности газа  $n^{(0)} = N_L \cdot 10^{-4}$ , все изменения поведения  $\kappa(T)$  (как и изменения равновесного состава на рис. 1, б) выражены достаточно резко и наблюдаются при более низких температурах. Кроме того, в этих условиях в силу полной двукратной ионизации газа (см. рис. 1, б), начиная с температуры  $\sim 25000K$ , коэффициент  $\kappa$  опять равен 1.66.

**Заключение.** В работе показано применение методов кинетической теории газов и статистической термодинамики для описания локально равновесных течений химически-однородных ионизованных газов с известной степенью ионизации атомов  $+k$ . Такой подход позволяет:

- 1) вывести систему уравнений, содержащую наряду с уравнением Эйлера (14) уравнения (15)–(17) для плотностей определяющих экстенсивных параметров (энергии  $e$ , общего числа ионов  $\tilde{n}_k$  и электронов  $\tilde{n}_e$ );
- 2) заменить уравнения (15)–(17) для плотностей скалярных экстенсивных параметров уравнениями (20) для сопряженных интенсивных параметров;
- 3) выписать ряд основных интегралов движения (21)–(23);



4) получить традиционное выражение (33) для квадрата скорости звука и вывести формулу (34), определяющую зависимость адиабатического коэффициента  $\kappa$  от температуры и состава ионизованного газа.

Для иллюстрации в работе рассматриваются локально равновесные течения ионизованного гелия. Приводятся результаты численного расчета равновесного состава газа и адиабатического коэффициента в широком диапазоне температур при разных значениях начальной плотности. Анализ полученных результатов показывает значительное влияние плотности ионизованного газа на температурные зависимости концентраций его компонентов и величину адиабатического коэффициента.

## Литература

1. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория электромагнитных процессов в плазме. М.: Изд-во МГУ, 1964. 282 с.
2. *Mitchner M., Kruger C. H. J.* Partially ionized gases. New York: J. Willey and Sons, 1973. 458 p.
3. *Golant V. E., Zilinskij A. P., Sacharov I. E.* Fundamentals of plasma physics. New York: J. Willey and Sons, 1980. 528 p.
4. Энциклопедия по низкотемпературной плазме / под ред. В. Е. Фортова. М.: Наука, 2000. 633 с.
5. *Capitelli M., Colonna G., D'Angola A.* Fundamental aspects of plasma chemical physics. Thermodynamics. In: Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. New-York; Heidelberg; London: Springer, 2012.
6. *Capitelli M., Bruno D., Laricchiuta A.* Fundamental aspects of plasma chemical physics. Transport. In: Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. New-York; Heidelberg; London: Springer, 2013.
7. *Эндер А. Я., Эндер И. А., Герасименко А. Б.* Кинетика примеси ионов в собственном газе во внешнем гармоническом электрическом поле // Журнал техн. физики. 2013. Т. 86. Вып. 11. С. 35–42.
8. *Istomin V. A., Kustova E. V.* State-specific transport properties of partially ionized flows of electronically excited atomic gases // Chemical Physics. 2017. Vol. 485–486. P. 125–139.
9. *Жданов В. М.* Явления переноса в многокомпонентной плазме. М.: Физматлит, 2009. 299 с.
10. *Ферцигер Дж., Канер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
11. *Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. 272 с.
12. *Рыдалевская М. А.* Статистические и кинетические модели в физико-химической газодинамике. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. 248 с.
13. *Рыдалевская М. А., Романова М. С.* Определение равновесного состава ионизованных одноатомных газов // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 4. С. 108–116.
14. *Rydalevskaia M. A.* Simplified method for calculation of equilibrium plasma composition // Physica A. 2017. Vol. 476. P. 49–57. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.02.025>
15. *Романова М. С., Рыдалевская М. А.* Определение равновесного состава термически ионизованного одноатомного газа в разных физических условиях // Журнал техн. физики. 2017. Т. 87. Вып. 5. С. 659–664. <https://doi.org/10.21883/JTF.2017.05.44436.2034>
16. *Рыдалевская М. А.* Модифицированный метод Чепмена–Энскога в терминах интенсивных параметров // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1238–1248.
17. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2005. 304 с.
18. *Седов Л. Н.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 576 с.
19. *Ворошилова Ю. Н., Рыдалевская М. А.* Влияние колебательного возбуждения молекул на скорость звука в высокотемпературном двухатомном газе // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 3. С. 28–34.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

### Контактная информация:

*Романова Мария Сергеевна* — инженер-конструктор; [mariarom1990@mail.ru](mailto:mariarom1990@mail.ru)

*Рыдалевская Мария Александровна* — д-р физ.-мат. наук, проф.; [rydalevska@rambler.ru](mailto:rydalevska@rambler.ru)

# Motion integrals and sound velocity in local equilibrium flows of ionized monatomic gases

M. S. Romanova<sup>1</sup>, M. A. Rydalevskaya<sup>2</sup>

<sup>1</sup> PJSC «Power machines — LMZ», ul. Vatutina, 3, St. Petersburg, 195009, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Romanova M. S., Rydalevskaya M. A. Motion integrals and sound velocity in local equilibrium flows of ionized monatomic gases. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 310–320. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.211>

The local equilibrium flows of ionized chemically homogeneous monatomic gases are considered. Macroscopic conservation equations for momentum, energy, total number of the ions with maximum charge and total number of electrons (both connected and free) are used. A series of integral relations are deduced for these equations. Analytical formula that allows us to investigate to the influence of electron energy and thermal ionization on sound velocity is obtained. For an illustration the dependencies on temperature are deduced for equilibrium concentration components and adiabatic coefficient in ionized helium with various density.

*Keywords:* local equilibrium flows, monatomic gases, thermal ionization, conservation equations, velocity of propagation of small perturbations, adiabatic coefficient.

## References

1. Klimontovich Yu. L., *Statistical Theory of electromagnetic processes in plasma* (Moscow State Univ. Press, Moscow, 1964, 282 p.) [in Russian].
2. Mitchner M., Kruger C. H. J., *Partially ionized gases* (J. Wiley & Sons, New York, 1973, 458 p.).
3. Golant V. E., Zilinskij A. P., Sacharov I. E., *Fundamentals of plasma physics* (J. Wiley & Sons, New York, 1980, 528 p.).
4. *Encyclopedia on low-temperature plasma* (ed. V. E. Fortov, Nauka Publ., Moscow, 2000, 633 p.) [in Russian].
5. Capitelli M., Colonna G., D'Angola A., *Fundamental aspects of plasma chemical physics — Thermodynamics*. In: *Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics* (Springer, New York — Heidelberg — London, 2012).
6. Capitelli M., Bruno D., Laricchiuta A., *Fundamental aspects of plasma chemical physics — Transport*. In: *Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics* (Springer, New York — Heidelberg — London, 2013).
7. Ender A. Ya., Ender I. A., Gerasimenko A. B., “Kinetic of ions admixture in own gases in external harmonic electric field”, *Journal of technical physics* **86**, issue 11, 35–42 (2013) [in Russian].
8. Istomin V. A., Kustova E. V., “State-specific transport properties of partially ionized flows of electronically excited atomic gases”, *Chemical Physics* **485–486**, 125–139 (2017).
9. Zhdanov V. M., *Transport processes in multicomponent plasma* (Fizmatlit publ., Moscow, 2009, 299 p.) [in Russian].
10. Ferziger J. H., Kaper H. G., *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases* (North-Holland Pub. Co., 1972, 579 p.).
11. Nagnibeda E. A., Kustova E. V., *Non-Equilibrium Reacting Gas Flows*. In Ser.: *Heat and Mass Transfer* (Springer, Berlin-Heidelberg, 2009).
12. Rydalevskaya M. A., *Statistical and Kinetic Models in Physical-Chemical Gas Dynamics* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2003) [in Russian].
13. Rydalevskaya M. A., Romanova M. S., “Determination of the equilibrium composition of ionized mono-atomic gases”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1*, issue 4, 108–116 (2013) [in Russian].
14. Rydalevskaya M. A., “Simplified method for calculation of equilibrium plasma composition”, *Physica A* **476**, 49–57 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.02.025>

15. Romanova M. S., Rydalevskaya M. A., “Determination of equilibrium composition of thermally ionized monoatomic gas under different physical conditions”, *Technical Physics* **62**, issue 5, 677–683 (2017). <https://doi.org/10.1134/S1063784217050243>
16. Rydalevskaya M. A., “Modified Chapman-Enskog method in the terms of intensive parameters”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **50**, issue 7, 1238–1248 (2010). <https://doi.org/10.1134/S0965542510070122>
17. Vallander S. V., *Lectures on hydroaeromechanics* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005) [in Russian].
18. Sedov L. I., *A Course on Continuum Mechanics* **2** (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971).
19. Voroshilova Yu. N., Rydalevskaya M. A., “Effect of vibrational excitation of molecules on the velocity of sound in a high-temperature diatomic gas”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **49**, issue 3, 369–374 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0051-1>

Author's information:

Maria S. Romanova — mariarom1990@mail.ru

Maria A. Rydalevskaya — rydalevska@rambler.ru