

Решение уравнений свободных колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки методом Фурье*

С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Филиппов С. Б.* Решение уравнений свободных колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки методом Фурье // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 321–333. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.212>

Рассматриваются малые свободные колебания бесконечной круговой цилиндрической оболочки, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Оболочка подкреплена n абсолютно жесткими цилиндрическими роликами, равномерно расположенными по окружности. Подкрепленная роликами оболочка является моделью центробежного концентратора с плавающей постелью, предназначенного для обогащения руд.

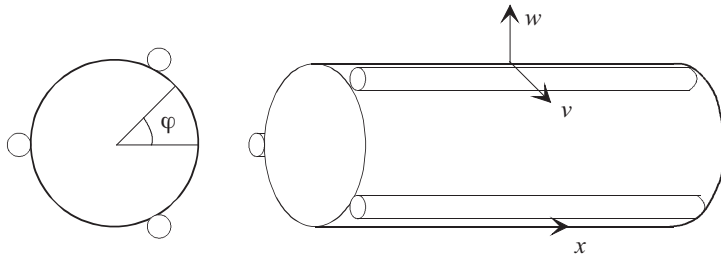
Решение системы линейных дифференциальных уравнений колебаний ищется в виде отрезка ряда Фурье по окружной координате, содержащего N членов. Для приближенного определения частот и форм колебаний получена система $2N - n$ линейных однородных алгебраических уравнений с $2N - n$ неизвестными. Частоты ω_k , $k = 1, 2, \dots, 2N - n$, являются положительными корнями алгебраического уравнения $D(\omega^2) = 0$ степени $2N - n$, где D — определитель этой системы. Показано, что система $2N - n$ уравнений эквивалентна нескольким независимым системам с меньшим числом неизвестных. Вследствие этого определитель D порядка $2N - n$ можно представить в виде произведения определителей меньшего порядка. В частности, при $N = n$ частоты являются корнями алгебраических уравнений не выше второй степени и находятся в явном виде. Разработаны алгоритмы определения частот для случая $N > n$. С увеличением N возрастает число найденных частот и происходит уточнение частот, полученных при $N = n$. Однако для $N > n$ частоты колебаний в большинстве случаев не удается найти в явном виде.

Ключевые слова: вращающаяся цилиндрическая оболочка, свободные колебания, ряды Фурье, система линейных алгебраических уравнений.

1. Введение. Основной частью центробежного концентратора с плавающей постелью (ЦКПП), используемого для обогащения руд, является эластичный улавливающий конус, который представляет собой быстро вращающуюся усеченную коническую оболочку [1]. Оболочка находится в контакте с внешними коническими роликами, равномерно расположенными по окружности. Ввиду того, что угол при вершине конуса является малым, в качестве простейшей механической модели оболочки ЦКПП можно использовать вращающуюся цилиндрическую оболочку, нахо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00580).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018



Оболочка, подкрепленная тремя роликами.

двух, находящихся в контакте с абсолютно жесткими цилиндрическими роликами. На рисунке изображена цилиндрическая оболочка, подкрепленная тремя роликами.

В работах [2] и [3] была исследована динамика вращающихся на роликах бесконечных цилиндрических оболочек. Уравнения колебаний бесконечной оболочки отличаются от уравнений колебаний кольца только значениями некоторых коэффициентов. Колебания вращающегося кольца, опирающегося на две жесткие опоры, рассматривались в работах [4] и [5], однако полученные в этих работах уравнения годятся лишь для малых значений угловой скорости вращения кольца.

В статьях [6] и [7] изучались колебания находящихся в контакте с роликами цилиндрических оболочек конечной длины. В [6] рассматривалась шарнирно опертая оболочка, в [7] при решении задачи с граничными условиями, соответствующими закреплению оболочки центробежного концентратора, использовалась полубезмоментная теория оболочек.

В работах [2–7] решения уравнений динамики были представлены в виде отрезков рядов Фурье по окружной координате, причем в работах [2, 3, 6] и [7] предполагалось, что число слагаемых N в этих отрезках совпадает с числом роликов n . Привлекательность случая $N = n$ состоит в том, что для него частоты и формы колебаний находятся в явном виде.

В данной работе разработан алгоритм определения частот колебаний в случае $N > n$. С увеличением N возрастает число найденных частот и происходит уточнение частот, полученных для меньших значений N .

2. Уравнения колебаний бесконечной цилиндрической оболочки.

Рассмотрим малые свободные колебания бесконечной цилиндрической оболочки с нерастяжимой параллелью, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω_r . Формулы для кинетической энергии T и потенциальной энергии Π такой оболочки имеют вид [3]

$$T = \frac{1}{2} r_0 \rho h \int_0^{2\pi} [r_0^2 \Omega_r^2 - 2\Omega_r (w_t w_\varphi + v_t w) + w_t^2 + v_t^2] d\varphi, \quad (1)$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad \Pi_1 = \frac{D}{2r_0} \int_0^{2\pi} \theta_\varphi^2 d\varphi, \quad \Pi_2 = \frac{1}{2} r_0 \rho h \Omega_r^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\varphi, \quad (2)$$

где

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w_\varphi = \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad \theta = v - w_\varphi, \quad v_\varphi = -w, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

r_0 — радиус оболочки, h — ее толщина, ρ — плотность материала, w и v — проекции перемещений на нормаль и касательную, t — время, φ — окружная координата, E —

модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, Π_1 — потенциальная энергии изгиба. Слагаемое Π_2 учитывает окружное растягивающее усилие, возникающее за счет действия центробежных сил.

Подставив приближенные выражения для функций w и v

$$w(\varphi, t) = \sum_{k=1}^N [a_k(t) \cos k\varphi + b_k(t) \sin k\varphi], \quad v(\varphi, t) = \sum_{k=1}^N \left[-\frac{a_k(t)}{k} \sin k\varphi + \frac{b_k(t)}{k} \cos k\varphi \right] \quad (3)$$

в формулы (1) и (2), получим

$$T = \frac{\pi r_0^3 h \rho}{2} \left[2\Omega_r^2 + 2\Omega_r \sum_{k=1}^N \left(k - \frac{1}{k} \right) (a_k \dot{b}_k - \dot{a}_k b_k) + \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (\dot{a}_k^2 + \dot{b}_k^2) \right], \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2r_0} \sum_{k=2}^N \{ [D(k^2 - 1) + r_0^4 \rho h \Omega_r^2] (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2) \}, \quad (5)$$

где точкой обозначена производная по переменной t .

Пусть оболочка подкреплена n равномерно расположенными абсолютно жесткими роликами, причем контакт j -го ролика и оболочки происходит по образующей цилиндра $\varphi_j = 2\pi j/n$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда можем записать

$$w(\varphi_j, t) = \sum_{k=1}^N [a_k(t) \cos k\varphi_j + b_k(t) \sin k\varphi_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Рассматривая a_k и b_k как обобщенные координаты, а условия (6) как уравнения связей, запишем уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} &= \sum_{j=1}^n \Lambda_j \frac{\partial w(\varphi_j, t)}{\partial a_k}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial b_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_k} &= \sum_{j=1}^n \Lambda_j \frac{\partial w(\varphi_j, t)}{\partial b_k}, \end{aligned}$$

где Λ_j — множители Лагранжа, $k = 1, 2, \dots, N$.

Подстановка в эти уравнения выражений (4) и (5) дает уравнения малых колебаний, которые после перехода к безразмерным переменным

$$\tau = \Omega_0 t, \quad \Omega = \frac{\Omega_r}{\Omega_0}, \quad \lambda_j = \frac{\Lambda_j r_0}{\pi D}, \quad \Omega_0^2 = \frac{D}{r_0^4 \rho h}$$

принимают вид [3]

$$\begin{aligned} c_k \ddot{a}_k - 2\Omega d_k \dot{b}_k + e_k [e_k + \Omega^2] a_k &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos k\varphi_j, \\ c_k \ddot{b}_k + 2\Omega d_k \dot{a}_k + e_k [e_k + \Omega^2] b_k &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sin k\varphi_j, \\ k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$c_k = 1 + \frac{1}{k^2}, \quad d_k = k - \frac{1}{k}, \quad e_k = k^2 - 1. \quad (8)$$

Точкой в (7) обозначена производная по τ .

После подстановки

$$a_k = A_k e^{i\omega\tau}, \quad b_k = B_k e^{i\omega\tau}, \quad \lambda_j = L_j e^{i\omega\tau}$$

в уравнения (6) и (7) получим систему линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными A_k, B_k, L_j :

$$\sum_{k=1}^N (c_{j,k} A_k + s_{j,k} B_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\alpha_k A_k + \beta_k B_k = \sum_{j=1}^n c_{j,k} L_j, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$$-\beta_k A_k + \alpha_k B_k = \sum_{j=1}^n s_{j,k} L_j, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где

$$c_{j,k} = \cos \frac{2\pi jk}{n}, \quad s_{j,k} = \sin \frac{2\pi jk}{n}, \quad (12)$$

$$\alpha_k = e_k(e_k + \Omega^2) - \omega^2 c_k, \quad \beta_k = -2i\Omega d_k \omega. \quad (13)$$

Выразим с помощью уравнений (9) n неизвестных A_k, B_k через остальные $2N - n$ неизвестных A_l, B_l и подставим найденные выражения в уравнения (10), (11). Получим систему $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными L_j, A_l, B_l . Исключение из этой системы уравнений n множителей Лагранжа L_j приводит к системе $2N - n$ линейных однородных алгебраических уравнений с $2N - n$ неизвестными A_l, B_l . Приравнивание нулю определителя $D(\omega^2)$ последней системы дает алгебраическое уравнение, корни которого $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{2N-n}^2$ являются квадратами безразмерных частот колебаний. Размерные частоты ω_{rj} связаны с безразмерными частотами ω_j равенствами $\omega_{rj} = \Omega_0 \omega_j, j = 1, 2, \dots, 2N - n$.

Свойства коэффициентов $c_{j,k}$ и $s_{j,k}$ таковы, что система уравнений (9)–(11) распадается на ряд независимых систем. Вследствие этого определитель D порядка $2N - n$ можно представить в виде произведения определителей меньшего порядка.

3. Метод определения частот колебаний для трех роликов. Рассмотрим случай $n = 3$. Три ролика имеет ЦКПП-120. Коэффициенты $c_{j,k}$ и $s_{j,k}$ для $n = 3$ приведены в табл. 1, где $c = -1/2, s = \sqrt{3}/2$.

Таблица 1. Коэффициенты для $n = 3$

j	$c_{j,1}$	$c_{j,2}$	$c_{j,3}$	$s_{j,1}$	$s_{j,2}$	$s_{j,3}$
1	c	c	1	s	$-s$	0
2	c	c	1	$-s$	s	0
3	1	1	1	0	0	0

Используя вытекающие из формул (12) равенства $c_{j,k+n} = c_{j,k}, s_{j,k+n} = s_{j,k}$, табл. 1 можно расширить, добавив в нее произвольное число столбцов.

Если $N = 3$, то из уравнений связей (9)

$$cA_1 + cA_2 + A_3 + sB_1 - sB_2 = 0, \quad cA_1 + cA_2 + A_3 - sB_1 + sB_2 = 0, \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

вытекают равенства

$$A_1 = -A_2, \quad A_3 = 0, \quad B_1 = B_2,$$

а уравнения (10) и (11) принимают вид

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 = cL_1 + cL_2 + L_3, \quad -\beta_1 A_1 + \alpha_1 B_1 = sL_1 - sL_2, \quad (14)$$

$$\alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 = cL_1 + cL_2 + L_3, \quad -\beta_2 A_2 + \alpha_2 B_2 = -sL_1 + sL_2, \quad (15)$$

$$\alpha_3 A_3 + \beta_3 B_2 = L_1 + L_2 + L_3, \quad -\beta_3 A_3 + \alpha_3 B_3 = 0. \quad (16)$$

Вычитая из первого уравнения (14) первое уравнение (15) и складывая второе уравнение (14) со вторым уравнением (15), получаем

$$\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 + \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 = 0, \quad -\beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 = 0. \quad (17)$$

Поставляя в уравнения (17) $A_1 = -A_2$, $B_1 = B_2$, приходим к системе двух уравнений с неизвестными A_2 , B_2 :

$$-(\alpha_1 + \alpha_2)A_2 + (\beta_1 - \beta_2)B_2 = 0, \quad (\beta_1 - \beta_2)A_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)B_2 = 0. \quad (18)$$

Еще одно уравнение

$$\alpha_3 B_3 = 0 \quad (19)$$

получается после подстановки $A_3 = 0$ во второе уравнение (16).

Уравнения (18) и (19) имеют нетривиальные решения, если

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 = 0, \quad \alpha_3 = 0. \quad (20)$$

Относительно ω^2 первое уравнение (20) является квадратным, а второе — линейным. В работах [2] и [3] приведены значения частот ω_1 , ω_2 и ω_3 , являющихся корнями уравнений (20).

Рассмотрим теперь случай $N = 4$. Используя табл. 1 с дополнительными столбцами для $c_{j,4}$, $s_{j,4}$ и уравнения связей (9), получаем

$$A_1 = -A_2 - A_4, \quad A_3 = 0, \quad B_1 = B_2 - B_4. \quad (21)$$

К системе уравнений (14)–(16) добавятся еще два уравнения

$$\alpha_4 A_4 + \beta_4 B_4 = cL_1 + cL_2 + L_3, \quad -\beta_4 A_4 + \alpha_4 B_4 = sL_1 - sL_2. \quad (22)$$

Вычтем первое из уравнений (22) из первого уравнения (15), а второе сложим со вторым уравнением (15). Вместе с (17) полученные два уравнения образуют систему четырех уравнений, которая после постановки в (17) выражений (21) для A_1 и B_1 превращается в систему уравнений с четырьмя неизвестными A_2 , B_2 , A_4 и B_4 :

$$\begin{aligned} -(\alpha_1 + \alpha_2)A_2 - \alpha_1 A_4 + (\beta_1 - \beta_2)B_2 - \beta_1 B_4 &= 0, \\ (\beta_1 - \beta_2)A_2 + \beta_1 A_4 + (\alpha_1 + \alpha_2)B_2 - \alpha_1 B_4 &= 0, \\ \alpha_2 A_2 - \alpha_4 A_4 + \beta_2 B_2 - \beta_4 B_4 &= 0, \\ -\beta_2 A_2 - \beta_4 A_4 + \alpha_2 B_2 + \alpha_4 B_4 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение $D_4(\omega^2) = 0$, где D_4 — определитель системы (23), имеет четвертую степень относительно ω^2 . Решив его, мы найдем четыре частоты. Еще одна частота является корнем уравнения $\alpha_3 = 0$.

В случае $\Omega = 0$ имеем $D_4 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4)^2 = 0$. С учетом формул (13) и (8) уравнение $D_4 = 0$ принимает вид

$$\left(9 - \frac{13\omega^2}{4}\right) \left(225 - \frac{17\omega^2}{16}\right) - 2\omega^2 \left(9 - \frac{5\omega^2}{4}\right) = 0. \quad (24)$$

Продолжим увеличивать число N и возьмем $N = 5$. Тогда следствием уравнений связей (9) являются равенства

$$A_1 = -A_2 - A_4 - A_5, \quad A_3 = 0, \quad B_1 = B_2 - B_4 + B_5, \quad (25)$$

а к системе восьми уравнений (10), (11) для случая $N = 4$ добавится два следующих уравнения:

$$\alpha_5 A_5 + \beta_5 B_5 = cL_1 + cL_2 + L_3, \quad -\beta_5 A_5 + \alpha_5 B_5 = -sL_1 + sL_2. \quad (26)$$

Подставив в (17) выражения (25) для A_1 и B_1 , добавив к двум полученным уравнениям два последних уравнения (23) и два уравнения, полученных исключением множителей Лагранжа из (22) и (26), получим систему шести уравнений с неизвестными A_2, B_2, A_4, B_4, A_5 и B_5 :

$$\begin{aligned} &-(\alpha_1 + \alpha_2)A_2 - \alpha_1 A_4 - \alpha_1 A_5 + (\beta_1 - \beta_2)B_2 - \beta_1 B_4 + \beta_1 B_5 = 0, \\ &(\beta_1 - \beta_2)A_2 + \beta_1 A_4 + \beta_1 A_5 + (\alpha_1 + \alpha_2)B_2 - \alpha_1 B_4 + \alpha_1 B_5, \\ &\alpha_2 A_2 - \alpha_4 A_4 + \beta_2 B_2 - \beta_4 B_4 = 0, \quad -\beta_2 A_2 - \beta_4 B_4 + \alpha_2 B_2 + \alpha_4 B_4 = 0, \\ &\alpha_4 A_4 - \alpha_5 A_5 + \beta_4 B_4 - \beta_5 B_5 = 0, \quad -\beta_4 A_4 - \beta_5 A_5 + \alpha_4 B_4 + \alpha_5 B_5 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Семь частот определяются из уравнений $D_6 = 0, \alpha_3 = 0$, где D_6 — определитель системы (27).

В случае $N = 6$ в формулах (25) равенство $A_3 = 0$ следует заменить равенством $A_3 + A_6 = 0$. Объединив уравнения (16) с двумя дополнительными уравнениями, получим систему

$$\begin{aligned} \alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 &= L_1 + L_2 + L_3, & -\beta_3 A_3 + \alpha_3 B_3 &= 0, \\ \alpha_6 A_6 + \beta_6 B_6 &= L_1 + L_2 + L_3, & -\beta_6 A_6 + \alpha_6 B_6 &= 0. \end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения третье уравнение и в полученное уравнение, а также во второе уравнение поставим $A_3 = -A_6$. Оставив без изменения четвертое уравнение, придем к системе трех уравнений

$$-(\alpha_3 + \alpha_6)A_6 + \beta_3 B_3 - \beta_6 B_6 = 0, \quad \beta_3 A_6 + \alpha_3 B_3 = 0, \quad -\beta_6 A_6 + \alpha_6 B_6 = 0 \quad (28)$$

с определителем

$$D_3 = -\alpha_3\alpha_6(\alpha_3 + \alpha_6) - \alpha_3\beta_6^2 - \alpha_6\beta_3^2.$$

При $N = 6$ шесть частот находятся из уравнения $D_6 = 0$, а еще три — из уравнения $-D_3 = \alpha_3\alpha_6(\alpha_3 + \alpha_6) + \alpha_3\beta_6^2 + \alpha_6\beta_3^2 = 0$.

Для невращающейся оболочки имеем $\Omega = 0, \beta_k = 0$, и последнее уравнение эквивалентно трем уравнениям: $\alpha_3 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_3 + \alpha_6 = 0$. Первые два из этих уравнений дают точные значения частот, которым соответствуют формы колебаний с тремя и шестью волнами в окружном направлении. Такие же частоты и формы имеет неподвижная цилиндрическая оболочка при отсутствии роликов.

При дальнейшем возрастании N число уравнений и неизвестных в системе (27) увеличивается на 2, потом еще на 2. Затем (при $N = 9$) увеличивается на 2 число уравнений и неизвестных в системе (28) и т. д.

Если $N = 3k + N_0$, $k = 1, 2, \dots$, $N_0 = 0, 1, 2$, то частоты определяются из двух алгебраических уравнений порядка $2(2k - 1 + N_0)$ и $2k - 1$.

4. Метод определения частот колебаний для нечетного числа роликов.

Рассмотрим случай $n = 7$, от которого нетрудно перейти к случаю произвольного нечетного числа роликов. В табл. 2, где $c_k = \cos(2k\pi/7)$, $s_k = \sin(2k\pi/7)$, $k = 1, 2, 3$, приведены коэффициенты $c_{j,k}$ и $s_{j,k}$ для $n = 7$.

Таблица 2. Коэффициенты для $n = 7$

j	$c_{j,1}$	$c_{j,2}$	$c_{j,3}$	$c_{j,4}$	$c_{j,5}$	$c_{j,6}$	$c_{j,7}$	$s_{j,1}$	$s_{j,2}$	$s_{j,3}$	$s_{j,4}$	$s_{j,5}$	$s_{j,6}$	$s_{j,7}$
1	c_1	c_2	c_3	c_3	c_2	c_1	1	s_1	s_2	s_3	$-s_3$	$-s_2$	$-s_1$	0
2	c_2	c_3	c_1	c_1	c_3	c_2	1	s_2	$-s_3$	$-s_1$	s_1	s_3	$-s_2$	0
3	c_3	c_1	c_2	c_2	c_1	c_3	1	s_3	$-s_1$	s_2	$-s_2$	s_1	$-s_3$	0
4	c_3	c_1	c_2	c_2	c_1	c_3	1	$-s_3$	s_1	$-s_2$	s_2	$-s_1$	s_3	0
5	c_2	c_3	c_1	c_1	c_3	c_2	1	$-s_2$	s_3	s_1	$-s_1$	$-s_3$	s_2	0
6	c_1	c_2	c_3	c_3	c_2	c_1	1	$-s_1$	$-s_2$	$-s_3$	s_3	s_2	s_1	0

Пусть $N = 7$. Принимая во внимание значения коэффициентов из табл. 2, запишем уравнения связей (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + s_1x_4 + s_2x_5 + s_3x_6 + x_7 &= 0, \\
 c_2x_1 + c_3x_2 + c_1x_3 + s_2x_4 - s_3x_5 - s_1x_6 + x_7 &= 0, \\
 c_3x_1 + c_1x_2 + c_2x_3 + s_3x_4 - s_1x_5 + s_2x_6 + x_7 &= 0, \\
 c_3x_1 + c_1x_2 + c_2x_3 - s_3x_4 + s_1x_5 - s_2x_6 + x_7 &= 0, \\
 c_2x_1 + c_3x_2 + c_1x_3 - s_2x_4 + s_3x_5 + s_1x_6 + x_7 &= 0, \\
 c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 - s_1x_4 - s_2x_5 - s_3x_6 + x_7 &= 0. \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 0.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 x_1 &= A_1 + A_6, & x_2 &= A_2 + A_5, & x_3 &= A_3 + A_4, \\
 x_4 &= B_1 - B_6, & x_5 &= B_2 - B_5, & x_6 &= B_3 - B_4, & x_7 &= A_7.
 \end{aligned}$$

Сложив первое уравнение (29) с шестым, второе с пятым и третье с четвертым, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + x_7 &= 0, & c_2x_1 + c_3x_2 + c_1x_3 + x_7 &= 0, \\
 c_3x_1 + c_1x_2 + c_2x_3 + x_7 &= 0, & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Определитель этой системы не равен нулю, поэтому она имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_7 = 0$, и

$$A_1 = -A_6, \quad A_2 = -A_5, \quad A_3 = -A_4, \quad A_7 = 0. \tag{31}$$

Подстановка первых трех уравнений (30) в первые три уравнения (29) дает систему

$$s_1x_4 + s_2x_5 + s_3x_6 = 0, \quad s_2x_4 - s_3x_5 - s_1x_6 = 0, \quad s_3x_4 - s_1x_5 + s_2x_6 = 0$$

с отличным от нуля определителем. Следовательно, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, и

$$B_1 = B_6, \quad B_2 = B_5, \quad B_3 = B_4. \tag{32}$$

Значения коэффициентов из табл. 2 показывают, что для $k = 1, 2, 3$ правые части уравнений (10) с номером k совпадают с правыми частями уравнений с номером $l = 7 - k$, а правые части соответствующих уравнений (11) отличаются только знаком. Для исключения множителей Лагранжа вычтем из k -х уравнений (10) l -е, а k -е и l -е уравнения (11) сложим. Получим три системы уравнений, которые отличаются от уравнений (17) только индексами:

$$\alpha_k A_k - \alpha_l A_l + \beta_k B_k - \beta_l B_l = 0, \quad -\beta_k A_k - \beta_l A_l + \alpha_k B_k + \alpha_l B_l = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Принимая во внимание формулы (31) и (32), подставим $A_k = -A_l$ и $B_k = B_l$ в уравнения (33), которые после этого превратятся в уравнения с двумя неизвестными типа (18):

$$-(\alpha_k + \alpha_l)A_l + (\beta_k - \beta_l)B_l = 0, \quad (\beta_k - \beta_l)A_l + (\alpha_k + \alpha_l)B_l = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Еще одно уравнение

$$\alpha_7 B_7 = 0 \quad (35)$$

получается после подстановки $A_7 = 0$ в 7-е уравнение (11).

Уравнения (34) и (35) имеют нетривиальные решения, если

$$(\alpha_k + \alpha_l)^2 + (\beta_k + \beta_l)^2 = 0, \quad l = 7 - k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \alpha_7 = 0. \quad (36)$$

Относительно ω^2 первые три уравнения (36) являются квадратными, а четвертое — линейным. Таким образом, в случае $n = 7$, $N = 7$ число частот, которые можно найти, равно $n_\omega = 2 \cdot 3 + 1 = 7 = 2N - n$.

Если взять $N = 8$, то в системе (29) изменятся только выражения для x_1 и x_4 , которые примут вид $x_1 = A_1 + A_6 + A_8$, $x_4 = B_1 - B_6 + B_8$. Ввиду того, что по-прежнему $x_1 = x_4 = 0$, мы получаем, что

$$A_1 = -A_6 - A_8, \quad B_1 = B_6 - B_8. \quad (37)$$

Системы (10) и (11) будут содержать по восемь уравнений, причем правая часть 8-го уравнения (11) совпадет с правой частью 6-го уравнения, а правые части 8-го и 6-го уравнений (12) будут отличаться только знаком. Добавив к первым двум уравнениям (33) два уравнения

$$\alpha_6 A_6 - \alpha_8 A_8 + \beta_6 B_6 - \beta_8 B_8 = 0, \quad -\beta_6 A_6 - \beta_8 A_8 + \alpha_6 B_6 + \alpha_8 B_8 = 0,$$

полученных исключением множителей Лагранжа из 6-го и 8-го уравнений (10) и (11), и поставим в них выражения (37). Составленная таким способом система уравнений

$$\begin{aligned} -(\alpha_1 + \alpha_6)A_6 - \alpha_1 A_8 + (\beta_1 - \beta_6)B_6 - \beta_1 B_8 &= 0, \\ (\beta_1 - \beta_6)A_6 + \beta_1 A_8 + (\alpha_1 + \alpha_6)B_6 - \alpha_1 B_8 &= 0, \\ \alpha_6 A_6 - \alpha_8 A_8 + \beta_6 B_6 - \beta_8 B_8 &= 0, \\ -\beta_6 A_6 - \beta_8 A_8 + \alpha_6 B_6 + \alpha_8 B_8 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

отличается от системы (23) только значениями индексов. Равенство нулю определителя системы (38) дает уравнение для определения четырех частот. Остальные пять частот являются корнями двух квадратных $(\alpha_k + \alpha_l)^2 + (\beta_k - \beta_l)^2 = 0$, $k = 2, 3$, и одного линейного уравнений $\alpha_7 = 0$, полученных для $N = 7$.

При $N = 9$ имеем $x_2 = A_2 + A_5 + A_9$, $x_5 = B_2 - B_5 + B_9$, и вторая система (34) с неизвестными A_5 и B_5 превращается в систему четырех уравнений с неизвестными A_5 , A_9 , B_5 и B_9 , аналогичную системе (38). В случае $N = 10$ последняя система (34) заменяется системой с четырьмя неизвестными A_4 , A_{10} , B_4 и B_{10} , а $n_\omega = 4 \cdot 3 + 1 = 13 = 2N - n$.

Дальнейшее увеличение N приводит к появлению систем с шестью неизвестными. При $N = 11$ вместо системы с неизвестными A_4 , A_{10} , B_4 и B_{10} появляется система с неизвестными A_4 , A_{10} , A_{11} , B_4 , B_{10} и B_{11} , которая может быть получена из системы (27) заменой индексов $2 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 10$, $5 \rightarrow 11$. В случае $N = 13$ имеется три системы вида (27) и одно уравнение $\alpha_7 B_7 = 0$. Это уравнение при $N = 14$ превращается в систему трех уравнений, к которой приводит замена индексов $3 \rightarrow 7$, $6 \rightarrow 14$ в системе (28).

Если $N = Kn$, $n = 2n_1 + 1$, $K = 1, 2, \dots$, $n_1 = 1, 2, \dots$, то имеется n_1 независимых систем с $4K - 2$ неизвестными типа (27) и одна система с $2K - 1$ неизвестной типа (28). Частоты являются корнями n_1 алгебраических уравнений порядка $4K - 2$ и одного уравнения порядка $2K - 1$. Общее число неизвестных $(4K - 2)n_1 + (2K - 1) = (2K - 1)n$ равно числу частот $n_\omega = 2N - n$, которые можно найти при данном N .

При добавлении к $N = Kn$ числа $N_0 < n$ количество неизвестных в системах типа (27) увеличивается на $2N_0$. При $N_0 \leq n_1$ число неизвестных в каждой такой системе увеличивается не более чем на 2, а при $N_0 > n_1$ — не более чем на 4. Число неизвестных в системе типа (28) не меняется. Общее число неизвестных равно $(2K - 1)n + 2N_0 = n_\omega$.

5. Метод определения частот колебаний для четного числа роликов.

В качестве примера рассмотрим случай $n = 6$. Шесть роликов имеет ЦКПП-300. Коэффициенты $c_{j,k}$ и $s_{j,k}$ для $n = 6$ содержатся в табл. 3, где $c = 1/2$, $s = \sqrt{3}/2$.

Таблица 3. Коэффициенты для $n = 6$

j	$c_{j,1}$	$c_{j,2}$	$c_{j,3}$	$c_{j,4}$	$c_{j,5}$	$c_{j,6}$	$s_{j,1}$	$s_{j,2}$	$s_{j,3}$	$s_{j,4}$	$s_{j,5}$	$s_{j,6}$
1	c	c	-1	c	c	1	s	s	0	$-s$	$-s$	0
2	c	c	1	c	c	1	s	$-s$	0	s	$-s$	0
3	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0
4	c	c	1	c	c	1	$-s$	s	0	$-s$	s	0
5	c	c	-1	c	c	1	$-s$	$-s$	0	s	s	0
6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Пусть $N = 6$. Учитывая значения коэффициентов из табл. 3, представим уравнения связей (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 cx_1 + cx_2 - x_3 + sx_4 + sx_5 + x_6 = 0, \quad cx_1 + cx_2 + x_3 + sx_4 - sx_5 + x_6 = 0, \\
 -x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\
 cx_1 + cx_2 + x_3 - sx_4 + sx_5 + x_6 = 0, \quad cx_1 + cx_2 - x_3 - sx_4 - sx_5 + x_6 = 0, \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 0,
 \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$x_1 = A_1 + A_5, \quad x_2 = A_2 + A_4, \quad x_3 = A_3, \quad x_4 = B_1 - B_5, \quad x_5 = B_2 - B_4, \quad x_6 = A_6.$$

Сложив 1-е уравнение (39) с 5-м, а 2-е с 4-м, получим уравнения

$$cx_1 + cx_2 - x_3 + x_6 = 0, \quad cx_1 + cx_2 + x_3 + x_6 = 0,$$

которые вместе с 3-м и 6-м уравнениями (39) образуют систему, имеющую только нулевое решение. Ввиду того, что $sx_4 + sx_5 = sx_4 - sx_5 = 0$, система (39) имеет единственное решение $x_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, 6$. Следовательно,

$$A_1 = -A_5, \quad A_2 = -A_4, \quad A_3 = 0, \quad B_1 = B_5, \quad B_2 = B_4, \quad A_6 = 0. \quad (40)$$

Для $k = 1, 2$ правые части уравнений (10) с номером k совпадают с правыми частями уравнений с номером $l = 6 - k$, а правые части соответствующих уравнений (11) отличаются только знаком. После исключения из этих уравнений множителей Лагранжа получим две системы уравнений

$$\alpha_k A_k - \alpha_l A_l + \beta_k B_k - \beta_l B_l = 0, \quad -\beta_k A_k - \beta_l A_l + \alpha_k B_k + \alpha_l B_l = 0, \quad k = 1, 2, \quad (41)$$

аналогичных системам (17) и (33). Принимая во внимание формулы (40), подставим $A_k = -A_l$ и $B_k = B_l$ в уравнения (41), которые после этого превратятся в уравнения с двумя неизвестными типа (18), (34):

$$-(\alpha_k + \alpha_l)A_l + (\beta_k - \beta_l)B_l = 0, \quad (\beta_k - \beta_l)A_l + (\alpha_k + \alpha_l)B_l = 0, \quad k = 1, 2. \quad (42)$$

Еще два уравнения

$$\alpha_3 B_3 = 0, \quad \alpha_6 B_6 \quad (43)$$

получаются после подстановки $A_3 = 0$ и $A_6 = 0$ в 3-е и 6-е уравнения (11).

Из условий существования нетривиальных решений уравнений (42) и (43) следуют уравнения

$$(\alpha_k + \alpha_l)^2 + (\beta_k - \beta_l)^2 = 0, \quad l = 6 - k, \quad k = 1, 2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_6 = 0. \quad (44)$$

Относительно ω^2 первые два уравнения (44) являются квадратными, а два последних — линейными. Число частот, которые можно найти при $n = N = 6$, равно $n_\omega = 2 \cdot 2 + 2 = 6$.

При увеличении N уравнения частот выводятся так же, как при нечетных n . В случае $N = 7$ имеем равенства $x_1 = A_1 + A_5 + A_7 = 0$, $x_4 = B_1 - B_5 + B_7$. Исключив множители Лагранжа из 1-го, 5-го и 7-го уравнений (11), (12) и используя равенства $A_1 = -A_5 - A_7$, $B_1 = B_5 - B_7$, получаем систему уравнений вида (38) с неизвестными A_5 , A_7 , B_5 , B_7 . Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение для определения четырех частот. Еще четыре частоты находятся из трех последних уравнений (44). При $N = 8$ аналогичным способом выводится система четырех уравнений с неизвестными A_4 , A_8 , B_4 и B_8 , а уравнения (43) не изменяются. Дальнейшее увеличение N приводит к замене уравнения $\alpha_3 B_3 = 0$ системой трех уравнений вида (28) с неизвестными A_9 , B_3 , B_9 . При $N = 10$ появляется система с шестью неизвестными вида (27), при $N = 11$ таких систем становится две, при $N = 12$ уравнение $\alpha_6 B_6 = 0$ превращается в систему уравнений вида (28) и т. д.

При $N = (K + 1)(n_1 + 1)$, $n = 2(n_1 + 1)$, $K = 1, 2, \dots$, $n_1 = 1, 2, \dots$, имеется n_1 независимых систем с $2K$ неизвестными типа (27) и две системы типа (28). При нечетных K обе системы типа (28) содержат по K неизвестных, и частоты являются корнями n_1 алгебраических уравнений порядка $2K$ и двух уравнений порядка K . При четных K одна система является системой с $K + 1$ неизвестной, а вторая — с $K - 1$ неизвестной. Частоты находятся путем решения n_1 уравнений порядка $2K$ и уравнений порядка $K + 1$ и $K - 1$. В обоих случаях общее число частот $n_\omega =$

$2Kn_1 + 2K = kn = 2N - n$. Если $N = (K + 1)(n_1 + 1) + N_0$, $0 < N_0 < n_1$, то число неизвестных в N_0 системах типа (27) увеличивается на 2 по сравнению со случаем $N = (K + 1)(n_1 + 1)$, и $n_\omega = 2Kn_1 + 2K + 2N_0 = 2N - n$.

6. Пример расчета. В табл. 4 представлены значения безразмерных частот колебаний для оболочки, подкрепленной тремя роликами ($n = 3$).

Таблица 4. Частоты колебаний для $n = 3$

Ω	Метод	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0	Фурье, $N = 3$	1.66	1.66	7.59	-	-
	Фурье, $N = 4$	1.65	1.65	7.59	11.2	11.2
	Фурье, $N = 5$	1.65	1.65	7.59	10.7	10.7
	Прогонка	1.64	1.64	7.59	10.5	10.5
1	Фурье, $N = 3$	1.52	2.44	8.05	-	-
	Фурье, $N = 4$	1.51	2.39	8.05	10.0	13.4
	Фурье, $N = 5$	1.50	2.37	8.05	9.86	11.9
	Прогонка	1.50	2.36	7.91	9.78	11.5

Верхняя часть таблицы соответствует неподвижной оболочке, для которой $\Omega = 0$. В нижней части таблицы даны значения частот оболочки вращающейся с угловой скоростью равной средней угловой скорости вращения ЦКПП-120. При этом безразмерная угловая скорость $\Omega = 1$.

Кратные частоты невращающейся оболочки $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_4 = \omega_5$ при $\Omega > 0$ расщепляются на две разные частоты, разность между которыми увеличивается с увеличением угловой скорости вращения оболочки Ω . Процесс расщепления кратных частот для гладких оболочек описан в работах [9] и [10]. Зависимость от Ω первых трех частот оболочки, подкрепленной тремя роликами, представлена в работе [2].

В случае $N = 3$ величины частот ω_1 , ω_2 и ω_3 найдены по явным формулам, приведенным в работе [3]. При $\Omega = 0$ величина $\omega_3 = 7.59$, в отличие от $\omega_1 = \omega_2$, является точным значением частоты.

Для $N = 4$ при $\Omega = 0$ кратные частоты $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_4 = \omega_5$ являются корнями биквадратного уравнения (24), а при $\Omega = 1$ частоты ω_1 , ω_2 , ω_4 и ω_5 находятся путем численного решения уравнения $D_4(\omega^2) = 0$, где D_4 — определитель системы (23).

В случае $N = 5$ безразмерные частоты определяются из уравнений $D_6 = 0$ и $\alpha_3 = 0$, где D_6 — определитель системы (27). Для сравнения с приближенными результатами, полученными методом Фурье, в табл. 4 приведены результаты численных расчетов методом ортогональной прогонки [3]. Сравнение показывает, что погрешность приближенных формул для вычисления первых пяти частот не превосходит 3.5%.

7. Заключение. Приближенные значения частот колебаний вращающейся на n роликах цилиндрической оболочки являются корнями алгебраического уравнения порядка $2N - n$ относительно ω^2 , где N — число удерживаемых членов ряда Фурье. В рассмотренном ранее случае $N = n$ это уравнение при $n = 2n_1 + 1$ распадается на n_1 квадратных уравнений и одно линейное уравнение, а при $n = 2n_1 + 2$ — на n_1 квадратных уравнений и два линейных уравнения. Установлено, что при $N > n$ число этих уравнений не изменяется, а порядок одного из них возрастает на 2 при каждом увеличении N на единицу. В частности, если $N = n = 6$, то частоты являются корнями двух квадратных и двух линейных уравнений, а при $n = 6$ и $N = 12$ частоты можно найти путем численного решения двух уравнений шестого порядка и двух кубических уравнений.

Наибольший интерес для приложений представляет определение низших частот, так как именно на этих частотах обычно возникают наиболее опасные резонансы. Для бесконечной оболочки низшим частотам соответствуют формы колебаний с небольшим числом волн по параллели, поэтому число слагаемых $N = n$ позволяет найти эти частоты в явном виде и с достаточной точностью.

Иначе обстоит дело в случае тонких оболочек конечной длины. Для них низшим частотам соответствуют формы с большим числом волн по параллели [8]. Чтобы найти эти формы и соответствующие им низшие частоты колебаний, необходимо выбирать достаточно большое число N членов отрезка ряда Фурье. Тогда при небольшом числе роликов n будет выполняться неравенство $N > n$. Разработанный в данной работе алгоритм вычисления частот может быть использован и для исследования колебаний оболочек конечной длины, что позволит найти их низшие частоты колебаний.

Литература

1. Краснов А. А. Динамика центробежного обогатительного конуса с принудительно деформируемой эластичной стенкой // Обогащение руд. 2001. N 3. С. 34–38.
2. Филиппов С. В. Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах бесконечной цилиндрической оболочки // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 2. С. 138–145.
3. Боярская М. Л., Филиппов С. В. Малые свободные колебания вращающейся на роликах бесконечной цилиндрической оболочки // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 1. С. 31–37.
4. Полушин А. И. Математическое моделирование динамики упругого вращающегося кольца при наличии двух опор // Изв. АН. Механика твердого тела. 1999. N 6. С. 153–158.
5. Полушин А. И. Математическое моделирование динамики вращающегося на опорах кольца при действии сил резания // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2013. N 1. С. 39–49.
6. Боярская М. Л. Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2011. С. 71–80.
7. Забиякин М. В. Колебания вращающейся на роликах цилиндрической оболочки // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 2. С. 237–244.
8. Гольдштейн А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
9. Смирнов А. Л., Товстик П. Е. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 280–290.
10. Smirnov A. Free vibrations of the rotating shells of revolution // Journal of applied mechanics. 1989. Vol. 56, N 2. P. 423–429.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Филиппов Сергей Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; s_b_filippov@mail.ru

Using the Fourier series for analysis of free vibrations of a cylindrical shell rotating on rollers

S. B. Filippov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Filippov S. B. Using the Fourier series for analysis of free vibrations of a cylindrical shell rotating on rollers. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 2, pp. 321–333. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.212>

Small free vibrations of an infinite cylindrical shell rotating on n rollers are considered. The shell is the model of a centrifugal concentrator intended for enrichment of ores. Displacements of the shell are searched as N -terms approximation of Fourier series on the circumference coordinate. The system of $2N$ linear differential equations for the factors of Fourier series is deduced. The solutions of these equations must satisfy the n equations of constraints. The system of $2N - n$ linear algebraic equations for calculating vibration mode shapes is obtained. Vibration frequencies ω_k , $k = 1, 2, \dots, 2N - n$ are the roots of equation $D(\omega^2) = 0$, where D is determinant of this system. The system of the $2N - n$ equations is equivalent to several independent systems with smaller than $2N - n$ number of unknowns. Hence the determinant D of the order $2N - n$ can be represented in the form of a product of determinants of the smaller order. In some cases, in particular in case $N = n$, frequencies are roots of the algebraic equations not above the second degree and can be found in explicit form.

Keywords: rotating cylindrical shell, free vibrations, Fourier series, linear algebraic equations.

References

1. Krasnov A. A., "Dynamics of a centrifugal concentrating cone with compulsorily deformable elastic wall", *Obogashchenie rud* (3), 34–38 (2001) [in Russian].
2. Filippov S. B. "Vibration frequencies and mode shapes of an infinite cylindrical shell rotating on rollers", *Vestnik St. Petersburg Univ. Series 1*, issue 2, 138–145 (2006) [in Russian].
3. Boyarskaya M. L., Filippov S. B., "Small free vibrations of an infinite cylindrical shell rotating on rollers", *Vestnik St. Petersburg Univ. Series 1*, issue 1, 31–37 (2011) [in Russian].
4. Polunin A. I., "Mathematical modeling of dynamics of an elastic rotating ring on two supports", *Izvestiya AN, Mekhanika tverdogo tela* (6), 153–158 (1999) [in Russian].
5. Polunin A. I., "Mathematical modeling of dynamics of a ring rotating on support at action of cutting forces", *Vestnik MGTU im. N. Baumana, Series Estestvennyye nauki* (1), 39–49 (2013) [in Russian].
6. Boyarskaya M. L., "Vibration frequencies and mode shapes of a cylindrical shell rotating on rollers", *Trudy seminara "Compyuternye metody v mekhanike sploshnoy sredy"*, 71–80 (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2011) [in Russian].
7. Zabayakin M. V., "Vibrations of a cylindrical shell rotating on rollers", *Vestnik St. Petersburg Univ. Series 1*, issue 2, 237–244 (2014) [in Russian].
8. Goldenveyzer A. L., Lidskiy V. B., Tovstik P. E., *Free vibrations of thin elastic shells* (Nauka Publ., Moscow, 1979, 384 p.) [in Russian].
9. Smirnov A. L., Tovstik P. E., "Qualitative research of dynamics of the rotating shells of revolution", *Sovremennyye problemy mekhaniki i aviatsii*, 280–290 (Mashinostroenie Publ., Moscow, 1982) [in Russian].
10. Smirnov A., "Free vibrations of the rotating shells of revolution", *Journal of applied mechanics* **56**(2), 423–429 (1989).

Author's information:

Sergei B. Filippov — s_b_filippov@mail.ru