МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.38
MSC 90C47, 49J52, 49K35

Сокращение и минимальность коэкзостеров*

М. Э. Аббасов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Аббасов М. Э.* Сокращение и минимальность коэкзостеров // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 3–13. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.101

Для изучения негладких функций В. Ф. Демьяновым были предложены экзостеры. Это семейства выпуклых компактов, позволяющие представлять главную часть приращения изучаемой функции в окрестности рассматриваемой точки в виде минимакса или максимина линейных функций. В терминах этих объектов были описаны условия экстремума, что дало возможность строить новые алгоритмы решения задач недифференцируемой оптимизации. Экзостеры определяются неоднозначно. Чем меньше экзостер, тем ниже вычислительные затраты при работе с ним. Поэтому возникает задача сокращения имеющегося семейства. Впервые эта задача была рассмотрена В. А. Рощиной. Ею были получены условия минимальности экзостеров, а также описаны некоторые методы их сокращения тогда, когда эти условия не выполнены. Однако оказалось, что экзостерное отображение не является непрерывным в метрике Хаусдорфа, что приводит к проблемам со сходимостью численных методов. Для преодоления этой проблемы В. Ф. Демьяновым было введено понятие коэкзостеров. Они позволяют представлять главную часть приращения изучаемой функции в окрестности рассматриваемой точки в виде минимакса или максимина аффинных функций. Можно выделить класс функций с непрерывным коэкзостерным отображением. В терминах этих объектов также удалось описать условия экстремума. Однако и коэкзостеры определяются неоднозначно. В данной работе впервые рассматривается задача сокращения коэкзостеров. Используются определения минимальности, введенные В. А. Рощиной, но в отличие от предложенных в работах В. А. Рощиной идей, разрабатываются условия минимальности и техника сокращения, имеющие наглядную геометрическую интерпретацию.

Ключевые слова: коэкзостеры, негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-00056 мол_а).

1. Необходимые сведения. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, где $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Функция f называется дифференцируемой по направлениям в смысле Дини в точке $x \in X$, если для любого $g \in \mathbb{R}^n$ существует конечный предел

$$f'_D(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha g) - f(x)}{\alpha}.$$

Величина $f'_D(x, g)$ называется производной Дини функции f в точке x по направлению g.

Функция f называется дифференцируемой по направлениям в смысле Адамара в точке $x \in X$, если для любого $g \in \mathbb{R}^n$ существует конечный предел

$$f'_H(x, g) = \lim_{[\alpha, g'] \to [+0, g]} \frac{f(x + \alpha g') - f(x)}{\alpha}.$$

Величина $f'_H(x, g)$ называется производной Адамара функции f в точке x по направлению g.

Пусть $\mathbb{S} = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \|g\| = 1\}$ — единичная сфера с центром в нуле. Так как функции $h_x(g) = f'_D(x, g)$ и $h_x(g) = f'_H(x, g)$ являются положительно однородными как функции от g, можем рассматривать их только на $\mathbb{S}$.

Условия оптимальности описываются в терминах производных по направлению [1].

Теорема 1. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в смысле Дини (Адамара) в точке $x_* \in X$. Для того чтобы точка x_* была локальным минимумом функции f на X, необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$f'_D(x_*, g) \geq 0 \quad \forall g \in \mathbb{S},$$

$$f'_H(x_*, g) \geq 0 \quad \forall g \in \mathbb{S}.$$

Условие

$$f'_H(x_*, g) > 0 \quad \forall g \in \mathbb{S}$$

является достаточным для строгого локального минимума функции f на X.

Теорема 2. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в смысле Дини (Адамара) в точке $x^* \in X$. Для того чтобы точка x^* была локальным максимумом функции f на X, необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$f'_D(x^*, g) \leq 0 \quad \forall g \in \mathbb{S},$$

$$f'_H(x^*, g) \leq 0 \quad \forall g \in \mathbb{S}.$$

Условие

$$f'_H(x^*, g) < 0 \quad \forall g \in \mathbb{S}$$

является достаточным для строгого локального максимума функции f на X.

Для получения условий в более конструктивной форме нужно специальное представление для производных по направлению.

В [1, 2] было введено понятие экзостеров. Обозначим $h_x(g) = f'(x,g)$, где $f'(x,g)$ — производная по направлению в смысле Дини или Адамара. Пусть функция $h_x(g)$ является липшицевой. Тогда для всех $g \in \mathbb{S}$ эта функция может быть представлена (см. [3, 4]) как в виде

$$h_x(g) = h_1(x,g) = \min_{C \in E^*(x)} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \tag{1}$$

так и в виде

$$h_x(g) = h_2(x,g) = \max_{C \in E_*(x)} \min_{v \in C} \langle v, g \rangle, \tag{2}$$

где $E^*(x)$, $E_*(x)$ — семейства выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, которые называются верхним и нижним экзостерами функции f в точке x в смысле Дини или Адамара соответственно.

Существует хорошо разработанное исчисление экзостеров [1], в терминах этих объектов описываются условия оптимальности [5, 6]. Это дает возможность построить новые оптимизационные алгоритмы. Экзостеры определяются неоднозначно. Очевидно, чем меньше семейство, тем ниже вычислительные затраты при его использовании. Так возникает задача сокращения экзостеров. Впервые эта задача была рассмотрена В. А. Рощиной в работах [7–9].

Отображения $E^*(x)$, $E_*(x)$ в (1) и (2) разрывны в метрике Хаусдорфа, поэтому их применение в оптимизационных алгоритмах может приводить к проблемам со сходимостью [10]. Для преодоления этой проблемы было введено понятие коэкзостеров.

Будем говорить, что в точке x функция f имеет верхний коэкзостер в смысле Дини, если справедливо разложение

$$f(x+\Delta) = f(x) + \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} [a + \langle v, \Delta \rangle] + o_x(\Delta), \tag{3}$$

где $\overline{E}(x)$ — семейство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^{n+1}$ и $o_x(\Delta)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha\Delta)}{\alpha} = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Если $o_x(\Delta)$ в (3) удовлетворяет условию

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \frac{o_x(\Delta)}{||\Delta||} = 0, \tag{5}$$

тогда будем говорить, что в точке x функция f имеет верхний коэкзостер в смысле Адамара. Семейство $\overline{E}(x)$ называют верхним коэкзостером функции f в точке x.

Будем говорить, что в точке x функция f имеет нижний коэкзостер в смысле Дини, если справедливо разложение

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[b,w] \in C} [b + \langle w, \Delta \rangle] + o_x(\Delta), \tag{6}$$

где $\underline{E}(x)$ — семейство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^{n+1}$ и $o_x(\Delta)$ удовлетворяет (4). Если $o_x(\Delta)$ в (6) удовлетворяет условию (5), тогда будем говорить, что в точке x функция f имеет нижний коэкзостер в смысле Адамара. Семейство $\underline{E}(x)$ называют нижним коэкзостером функции f в точке x.

Функция f непрерывна, поэтому из (3) и (6) (для $\Delta = 0_n$) следует равенство

$$\min_{C\in\overline{E}(x)} \max_{[a,v]\in C} a = \max_{C\in\underline{E}(x)} \min_{[b,w]\in C} b = 0.$$

Пусть выполняются соотношения

$$h_x(\Delta) = h_3(x,\Delta) = \min_{C\in\overline{E}(x)} \max_{[a,v]\in C} [a + \langle v, \Delta\rangle],$$

$$h_x(\Delta) = h_4(x,\Delta) = \max_{C\in\underline{E}(x)} \min_{[b,w]\in C} [b + \langle w, \Delta\rangle].$$

Отметим, что верхний (нижний) коэкзостер функции f в точке x совпадает с верхним (нижним) коэкзостером функции $h_x(\Delta)$ в нуле. Поэтому можем рассматривать функцию $h_x(\Delta)$ в точке 0_n и использовать обозначения $h(\Delta)$, $\overline{E}$, $\underline{E}$.

Понятие коэкзостера было введено в [1, 2]. Существует хорошо разработанное исчисление коэкзостеров. Условия оптимальности формулируются в терминах этих семейств [11, 12]. Можно описать класс функций с непрерывным коэкзостерным отображением. Использование непрерывных коэкзостеров гарантирует сходимость численных алгоритмов [13]. Но, как видно из (3), (6), ради непрерывности пришлось пожертвовать положительной однородностью. Однако эти объекты также определяются неоднозначно. Таким образом, и для коэкзостеров возникает задача сокращения, которая до настоящего времени не была изучена.

Будем использовать определения минимальности, введенные В. А. Рощиной.

Определение 1. *Верхний (нижний) коэкзостер $E_1(h)$ функции h меньше по включению другого верхнего (нижнего) коэкзостера $E_2(h)$ той же функции h, если $E_1(h) \subset E_2(h)$.*

Определение 2. *Верхний (нижний) коэкзостер $E(h)$ функции h является минимальным по включению, если не существует другого верхнего (нижнего) коэкзостера $\widetilde{E}(h)$ функции h такого, что $\widetilde{E}(h) \subset E(h)$.*

Очевидно, что эти определения не учитывают структуру множеств, входящих в семейство, хотя во многих случаях именно структура множеств играет главную роль.

Определение 3. *Верхний (нижний) коэкзостер $E_1(h)$ функции h меньше по форме другого верхнего (нижнего) коэкзостера $E_2(h)$ той же функции h, если*

$$\forall \widetilde{C} \in E_1(h)\ \exists C \in E_2(h)\colon \widetilde{C} \subset C.$$

Определение 4. *Верхний (нижний) коэкзостер $E(h)$ функции h является минимальным по форме, если не существует другого верхнего (нижнего) коэкзостера $\widetilde{E}(h)$ функции h такого, что*

$$\forall \widetilde{C} \in \widetilde{E}(h)\ \exists C \in E(h)\colon \widetilde{C} \subset C.$$

Замечание 1. Отметим, что минимальный по форме коэкзостер является также минимальным по включению, но обратное неверно. Поэтому необходимые условия минимальности по включению являются также необходимыми условиями минимальности по форме, а достаточные условия минимальности по форме являются достаточными условиями минимальности по включению.

В данной работе предлагаются новые геометрические условия минимальности, которые позволяют сокращать коэкзостеры. Представленные результаты являются обобщением и дальнейшим развитием идей, описанных в [14].

2. Основные результаты. Введем обозначения

$$\mathcal{K}_- = \left\{ g = (g_1, g_2, \dots, g_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g_1 < 0 \right\},$$

$$\mathcal{K}_+ = \left\{ g = (g_1, g_2, \dots, g_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g_1 > 0 \right\}.$$

Для произвольного $g \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $C \in E$ определим опорную гиперплоскость

$$H(C, g) = \langle x - v_C, g \rangle = 0, \quad v_C = \operatorname*{argmax}_{v \in C} \langle v, g \rangle.$$

Очевидно, при таком определении множество C лежит в замкнутом отрицательном полупространстве

$$H_-(C, g) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z - v_C, g \rangle \le 0 \right\},$$

порожденным этой гиперплоскостью ($C \subset H_-(C, g)$).

2.1. Минимальность по включению. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\overline{E}$ — верхний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\widetilde{C} \in \overline{E}$. Семейство $\widetilde{\overline{E}} = \overline{E} \setminus \{\widetilde{C}\}$ также является верхним коэкзостером функции h тогда и только тогда, когда для любого $g \in \mathcal{K}_+$ найдется множество $C_g \in \widetilde{\overline{E}}$ такое, что $C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{E}$ — верхний коэкзостер функции h, а множество $\widetilde{C}$ принадлежит $\overline{E}$. Очевидно, семейство $\widetilde{\overline{E}} = \overline{E} \setminus \{\widetilde{C}\}$ также является верхним коэкзостером функции h тогда и только тогда, когда для любого $\Delta \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\min_{C \in \overline{E}} \max_{[a,v] \in C} [a + \langle v, \Delta \rangle] = \min_{C \in \widetilde{\overline{E}}} \max_{[a,v] \in C} [a + \langle v, \Delta \rangle]. \tag{7}$$

Введем обозначения $\widehat{g} = (1, \Delta)$, $\widehat{v} = (a, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для выполнения равенства (7) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\widehat{g}$ нашлось множество $C_{\widehat{g}} \in \widetilde{\overline{E}}$ такое, что верно неравенство

$$\max_{[a,v] \in C_{\widehat{g}}} [a + \langle v, \Delta \rangle] \le \max_{[a,v] \in \widetilde{C}} [a + \langle v, \Delta \rangle] = \max_{\widehat{v} \in \widetilde{C}} \langle \widehat{v}, \widehat{g} \rangle. \tag{8}$$

Очевидно, справедливость (8) для произвольного $\widehat{g} = (1, \Delta)$ возможна тогда и только тогда, когда для любого $g \in \mathcal{K}_+$ найдется множество $C_g \in \widetilde{\overline{E}}$ такое, что выполняется

$$\max_{\widehat{v} \in C_g} \langle \widehat{v}, g \rangle \le \max_{\widehat{v} \in \widetilde{C}} \langle \widehat{v}, g \rangle = \langle \widehat{v}_{\widetilde{C}}, \widehat{g} \rangle.$$

Последнее эквивалентно тому, что для любого $g \in \mathcal{K}_+$ найдется $C_g \in \widetilde{\overline{E}}$ такое, что для всех $\widehat{v} \in C_g$ выполняется неравенство

$$\langle \widehat{v} - \widehat{v}_{\widetilde{C}}, g \rangle \le 0. \tag{9}$$

Условие (9) эквивалентно включению $C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g)$. □

Теорема 4. *Пусть $\underline{E}$ — нижний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\widetilde{C} \in \underline{E}$. Семейство $\widetilde{\underline{E}} = \underline{E} \setminus \{\widetilde{C}\}$ также является нижним коэкзостером функции h тогда и только тогда, когда для любого $g \in \mathcal{K}_-$ найдется множество $C_g \in \widetilde{\underline{E}}$ такое, что $C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g)$.*

Доказательство. Пусть $\underline{E}$ — нижний коэкзостер функции h, а множество $\widetilde{C}$ принадлежит $\overline{E}$. Очевидно, семейство $\underline{\widetilde{E}} = \underline{E} \setminus \{\widetilde{C}\}$ также является нижним коэкзостером функции h тогда и только тогда, когда для любого $\Delta \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\max_{C \in \underline{E}} \min_{[a,v] \in C} [a + \langle v, \Delta \rangle] = \max_{C \in \underline{\widetilde{E}}} \min_{[a,v] \in C} [a + \langle v, \Delta \rangle]. \tag{10}$$

Учтем введенные в доказательстве теоремы 3 обозначения $\widehat{g} = (1, \Delta)$, $\widehat{v} = (a, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для выполнения равенства (10) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\widehat{g}$ нашлось множество $C_{\widehat{g}} \in \underline{\widetilde{E}}$ такое, что верно неравенство

$$\min_{[a,v] \in C_{\widehat{g}}} [a + \langle v, \Delta \rangle] \geq \min_{[a,v] \in \widetilde{C}} [a + \langle v, \Delta \rangle].$$

Отсюда получим неравенство

$$\max_{[a,v] \in C_{\widehat{g}}} [-a + \langle v, -\Delta \rangle] \leq \max_{[a,v] \in \widetilde{C}} [-a + \langle v, -\Delta \rangle] = \max_{\widehat{v} \in \widetilde{C}} \langle \widehat{v}, -\widehat{g} \rangle. \tag{11}$$

Очевидно, справедливость (11) для произвольного $\widehat{g} = (1, \Delta)$ возможна тогда и только тогда, когда для любого $g \in \mathcal{K}_+$ найдется множество $C_g \in \underline{\widetilde{E}}$ такое, что выполняется

$$\max_{\widehat{v} \in C_g} \langle \widehat{v}, -g \rangle \leq \max_{\widehat{v} \in \widetilde{C}} \langle \widehat{v}, -g \rangle = \langle \widehat{v}_{\widetilde{C}}, -\widehat{g} \rangle.$$

Последнее эквивалентно тому, что для любого $g \in \mathcal{K}_+$ найдется $C_g \in \underline{\widetilde{E}}$ такое, что для всех $\widehat{v} \in C_g$ выполняется неравенство

$$\langle \widehat{v} - \widehat{v}_{\widetilde{C}}, -g \rangle \leq 0. \tag{12}$$

Условие (12) эквивалентно включению $C_g \subset H_-(\widetilde{C}, -g)$. Таким образом, получаем

$$\forall g \in \mathcal{K}_+ \; \exists C_g \in \underline{\widetilde{E}} \colon C_g \subset H_-(\widetilde{C}, -g),$$

или, что то же,

$$\forall g \in \mathcal{K}_- \; \exists C_g \in \underline{\widetilde{E}} \colon C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g).$$

□

Отметим, что предложенные условия могут быть использованы для очищения коэкзостеров от «лишних» множеств.

2.2. Минимальность по форме. Предположим теперь, что ни одно из множеств, входящих в коэкзостер, не может быть отброшено. Перейдем к вопросу минимальности по форме.

Приведенные ниже результаты доказываются так же просто, как и теоремы 3, 4, поэтому приводятся без доказательств.

Пусть $E = \{C_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ и существует подмножество Θ индексного множества Ω такое, что $\bigcap\limits_{\omega \in \Theta} C_\omega = \widehat{C} \neq \emptyset$. Обозначим $B = \{C_\omega \mid \omega \in \Theta\}$.

Теорема 5. *Пусть $\overline{E}$ — верхний коэкзостер функции $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предположим, что для любого $g \in \mathcal{K}_+$ найдется $\omega_g \in \Theta$ такое, что $C_{\omega_g} \subset H_-(\widehat{C}, g)$. Тогда семейство $\widetilde{\overline{E}} = \{\overline{E} \setminus B\} \bigcup \widehat{C}$ также является верхним коэкзостером функции h.*

Теорема 6. *Пусть $\underline{E}$ — нижний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предположим, что для любого $g \in \mathcal{K}_-$ найдется $\omega_g \in \Theta$ такое, что $C_{\omega_g} \subset H_-(\widehat{C}, g)$. Тогда семейство $\widetilde{\underline{E}} = \{\underline{E} \setminus B\} \bigcup \widehat{C}$ также является нижним коэкзостером функции h.*

Перейдем теперь к важному практическому случаю. Пусть семейство E состоит из выпуклых многогранников.

Выберем произвольное $C \in E$. Вершины множеств C обозначим $v_i(C)$, где $i \in I_C$, I_C — множество индексов. Очевидно, что $C = \operatorname{co}\{v_i(C) \mid i \in I_C\}$. Для вершины $v_i(C)$ множества C определим конусы

$$\Gamma^+_{v_i(C)} = \left\{ g \in \mathcal{K}_+ \;\middle|\; \max_{v\in C} \langle v, g\rangle = \langle v_i(C), g\rangle \right\},$$

$$\Gamma^-_{v_i(C)} = \left\{ g \in \mathcal{K}_- \;\middle|\; \max_{v\in C} \langle v, g\rangle = \langle v_i(C), g\rangle \right\}.$$

Теорема 7. *Пусть $\overline{E}$ — верхний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, состоящий из конечного числа выпуклых многогранников, $\widetilde{C} = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \right\} \in \overline{E}$, $\widetilde{C}_0 = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \setminus \{\widehat{i}\} \right\}$. Для того чтобы семейство $\widetilde{\overline{E}} = \left\{ \overline{E} \setminus \{\widetilde{C}\} \right\} \bigcup \widetilde{C}_0$ также было верхним коэкзостером функции h, необходимо, чтобы*

$$\forall g \in \Gamma^+_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})} \quad \exists C_g \in E, C_g \neq \widetilde{C}\colon C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g).$$

Теорема 8. *Пусть $\underline{E}$ — нижний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, состоящий из конечного числа выпуклых многогранников, $\widetilde{C} = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \right\} \in \underline{E}$, $\widetilde{C}_0 = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \setminus \{\widehat{i}\} \right\}$. Для того чтобы семейство $\widetilde{\underline{E}} = \left\{ \underline{E} \setminus \{\widetilde{C}\} \right\} \bigcup \widetilde{C}_0$ также было нижним коэкзостером функции h, необходимо, чтобы*

$$\forall g \in \Gamma^-_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})} \quad \exists C_g \in E, C_g \neq \widetilde{C}\colon C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g).$$

Теорема 9. *Пусть $\overline{E}$ — верхний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, состоящий из конечного числа выпуклых многогранников, $\widetilde{C} = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \right\} \in \overline{E}$, $\widetilde{C}_0 = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \setminus \{\widehat{i}\} \right\}$. Для того чтобы семейство $\widetilde{\overline{E}} = \left\{ \overline{E} \setminus \{\widetilde{C}\} \right\} \bigcup \widetilde{C}_0$ также было верхним коэкзостером функции h, достаточно, чтобы*

$$\forall g \in \Gamma^+_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})} \quad \exists C_g \in E, C_g \neq \widetilde{C},$$

$$\exists u \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \begin{cases} \langle v - u, g\rangle \geq 0, & v \in \widetilde{C}, \\ \langle v - u, g\rangle \leq 0, & v \in C_g. \end{cases} \tag{13}$$

Замечание 2. Отметим, что условие (13) означает, что для любой опорной гиперплоскости к множеству $\widetilde{C} \in \overline{E}$ в точке $v_{\widehat{i}}$ с нормалью из $\mathcal{K}_+$ найдется параллельная ей гиперплоскость, разделяющая $\widetilde{C}$ и какое-то другое множество из $\overline{E}$ так, чтобы $\widetilde{C}$ находилось в положительном полупространстве, порожденным этой гиперплоскостью.

Теорема 10. *Пусть $\underline{E}$ — нижний коэкзостер функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, состоящий из конечного числа выпуклых многогранников, $\widetilde{C} = \operatorname{co}\left\{ v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \right\} \in \underline{E}$, $\widetilde{C}_0 =$*

$\operatorname{co}\left\{v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \setminus \{\widehat{i}\}\right\}$. *Для того чтобы семейство* $\underline{\widetilde{E}} = \left\{\underline{E} \setminus \{\widetilde{C}\}\right\} \bigcup \widetilde{C}_0$ *также было нижним коэкзостером функции* h*, достаточно, чтобы*

$$\forall g \in \Gamma^-_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})} \quad \exists C_g \in E, C_g \neq \widetilde{C},$$

$$\exists u \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \begin{cases} \langle v-u, g\rangle \geq 0, & v \in \widetilde{C}, \\ \langle v-u, g\rangle \leq 0, & v \in C_g. \end{cases} \tag{14}$$

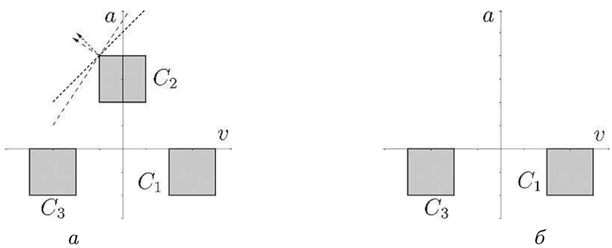
Замечание 3. Отметим, что условие (14) означает, что для любой опорной гиперплоскости к множеству $\widetilde{C} \in \underline{E}$ в точке $v_{\widehat{i}}$ с нормалью из $\mathcal{K}_-$ найдется параллельная ей гиперплоскость, разделяющая $\widetilde{C}$ и какое-то другое множество из $\underline{E}$ так, чтобы $\widetilde{C}$ находилось в положительном полупространстве, порожденным этой гиперплоскостью.

Отрицание вышеприведенных теорем позволяет понять, является ли коэкзостер минимальным или нет. Так, отрицание теорем 3, 4 дает необходимое и достаточное условие минимальности по включению верхнего и нижнего коэкзостеров соответственно.

3. Примеры. ***3.1.*** Рассмотрим верхний коэкзостер $\overline{E}$ вида

$$\begin{aligned} C_1 &= \operatorname{co}\{(-2,4);(0,4);(0,2);(-2,2)\}, \\ C_2 &= \operatorname{co}\{(2,1);(4,1);(4,-1);(2,-1)\}, \\ C_3 &= \operatorname{co}\{(-2,-2);(0,-2);(0,-4);(-2,-4)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, любая опорная гиперплоскость к множеству C_2 с нормалью из $\mathcal{K}_+$ содержит в своем замкнутом отрицательном полупространстве либо множество C_1, либо C_3, поэтому по теореме 3 можно сократить коэкзостер, отбросив C_2 (см. рис. 1).



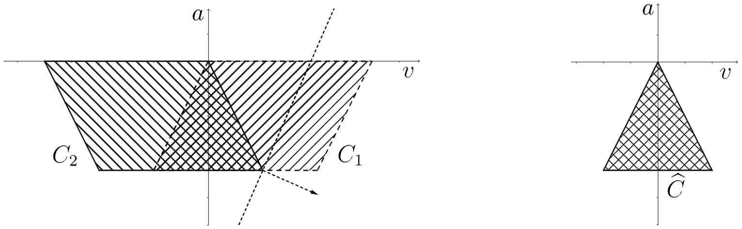
а *б*

Рис. 1. Верхний коэкзостер (*а*) и сокращенный верхний коэкзостер функции (*б*).

3.2. Рассмотрим нижний коэкзостер $\underline{E}$ вида

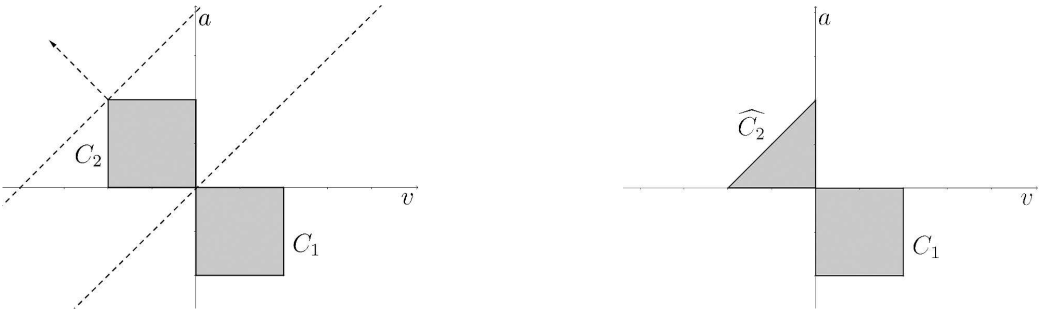
$$\begin{aligned} C_1 &= \operatorname{co}\{(-2,2);(0,3);(0,0);(-2,-1)\}, \\ C_2 &= \operatorname{co}\{(-2,1);(0,0);(0,-3);(-2,-2)\}. \end{aligned}$$

Множества C_1, C_2 имеют непустое пересечение. Обозначим его $\widehat{C}$. Очевидно, любая опорная гиперплоскость к множеству $\widehat{C}$ с нормалью из $\mathcal{K}_-$ содержит в своем замкнутом отрицательном полупространстве либо множество C_1, либо C_2, поэтому по теореме 6 можно сократить коэкзостер, заменив множества C_1, C_2 их пересечением (см. рис. 2).



а *б*

Рис. 2. Нижний коэкзостер (*а*) и сокращенный нижний коэкзостер функции (*б*).



а *б*

Рис. 3. Верхний коэкзостер (*а*) и сокращенный верхний коэкзостер функции (*б*).

3.3. Рассмотрим верхний коэкзостер $\overline{E}$ вида

$$C_1 = \operatorname{co}\{(0,1);(0,0);(-1,0)\},$$
$$C_2 = \operatorname{co}\{(0,0);(1,0);(1,-1);(0,-1)\}.$$

Ясно, что для любой опорной гиперплоскости к множеству C_1 в вершине $(-1,1)$ с нормалью из $\mathcal{K}_+$ найдется параллельная гиперплоскость (проходящая через начало координат), разделяющая множества C_1 и C_2 в смысле (13). По теореме 9 можно сократить множество C_2 за счет удаления вершины $(-1,1)$ (см. рис. 3).

Литература

1. *Demyanov V. F.* Exhausters and Convexificators — New Tools in Nonsmooth Analysis. In Ser.: Quasidifferentiability and Related Topics / eds V. Demyanov, A. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 85–137.

2. *Demyanov V. F.* Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45. P. 13–29. https://doi.org/10.1080/02331939908844424

3. *Demyanov V. F., Rubinov A. M.* Constructive Nonsmooth Analysis. Verlag Peter Land, 1995. 416 p.

4. *Castellani M.* A Dual Representation for Proper Positively Homogeneous Functions // J. Glob. Optim. 2000. Vol. 16, issue 4. P. 393–400.

5. *Abbasov M. E., Demyanov V. F.* Proper and adjoint exhausters in Nonsmooth analysis: Optimality conditions // J. Glob. Optim. 2013. Vol. 56, issue 2. P. 569–585. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9873-8

6. *Demyanov V. F., Roschina V. A.* Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters // Optimization. 2006. Vol. 55. P. 525–540. https://doi.org/10.1080/02331930600815777

7. *Roschina V. A.* Reducing Exhausters // J. Optim. Theory Appl. 2008. Vol. 136, issue 2. P. 261–273. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9296-8

8. *Roschina V. A.* On conditions for minimality of exhausters // J. Convex Anal. 2008. Vol. 15, no. 4. P. 859–868.

9. *Roschina V. A.* Topics in Optimization: Solving Second-Order Conic Systems with Finite Precision; Calculus of Generalized Subdifferentials for Nonsmooth Functions. City University of Hong Kong, 2009.
10. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
11. *Abbasov M. E., Demyanov V. F.* Adjoint Coexhausters in Nonsmooth Analysis and Extremality Conditions // J. Optim. Theory Appl. 2013. Vol. 156, no. 3. P. 535–553.
12. *Demyanov V. F.* Proper exhausters and coexhausters in nonsmooth analysis // Optimization. 2012. Vol. 61. P. 1347–1368. https://doi.org/10.1080/02331934.2012.700929
13. *Аббасов М. Э.* Нахождение стационарных точек функций, допускающих неоднородные аппроксимации приращения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 3–8.
14. *Аббасов М. Э.* Геометрические условия сокращения экзостеров // Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO». 2016. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#1027 (дата обращения: 06.10.2017).

Статья поступила в редакцию 15 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Аббасов Меджид Эльхан оглы — канд. физ.-мат. наук, доц.; m.abbasov@spbu.ru

Reduction and minimality of coexhausters

M. E. Abbasov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Abbasov M. E. Reduction and minimality of coexhausters. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 3–13. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.101

V. F. Demyanov introduced exhausters for the study of nonsmooth functions. These are families of convex compact sets that allow to represent the main part of the increment of a considered function in a neighborhood of a studied point in a form of MaxMin or MinMax of linear functions. Optimality conditions were described in terms of these objects. This paved a way for construction of new algorithms for solving nondifferentiable optimization problems. Exhausters are not uniquely defined. It is obvious that the smaller the exhauster is the lesser computational expenses are when working with it. Thus, problem of reduction of an available family arises. This problem was first considered by V. A. Roshchina. She proposed conditions for minimality and described some methods for the reduction in case when these conditions were not satisfied. However, it turned out that the exhauster mapping is not continuous in the Hausdorff metrics, what leads to the problems with convergence of numerical methods. To overcome this difficulty V. F. Demyanov proposed coexhausters notion. These objects allow to represent the main part of the increment of considered functions in a neighborhood of a studied point in the form of MaxMin or MinMax of affine functions. One can determine a class of functions with continuous coexhauster mapping. Optimality conditions can be described in terms of these objects, too. But coexhausters are also not uniquely defined. The problem of coexhausters reduction is considered in this paper for the first time. Definitions of minimality proposed by V. A. Roshchina are used. In contrast to ideas proposed in the works of V. A. Roshchina, conditions of minimality and the technique of reduction developed in this paper have a clear and transparent geometric interpretation.

Keywords: coexhausters, nonsmooth analysis, nondifferentiable optimization.

References

1. Demyanov V. F., *Exhausters and Convexificators — New Tools in Nonsmooth Analysis*. In Ser. *Quasidifferentiability and Related Topics* (Eds V. Demyanov, A. Rubinov, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, pp. 85–137).

2. Demyanov V. F., “Exhausters of a positively homogeneous function”, *Optimization* **45**, 13–29 (1999).

3. Demyanov V. F., Rubinov A. M., *Constructive Nonsmooth Analysis* (Verlag Peter Land, 1995).

4. Castellani M., “A Dual Representation for Proper Positively Homogeneous Functions”, *J. Glob. Optim.* **16**, issue 4, 393–400 (2000).

5. Abbasov M. E., Demyanov V. F., “Proper and adjoint exhausters in Nonsmooth analysis: Optimality conditions”, *J. Glob. Optim.* **56**, 569–585 (2013). https://doi.org/10.1007/s10898-012-9873-8

6. Demyanov V. F., Roschina V. A., “Optimality conditions in terms of upper and lower Exhausters”, *Optimization* **55**, 525–540 (2006). https://doi.org/10.1080/02331930600815777

7. Roschina V. A., “Reducing Exhausters”, *J. Optim. Theory Appl.* **136**, issue 2, 261–273 (2008). https://doi.org/10.1007/s10957-007-9296-8

8. Roschina V. A., “On conditions for minimality of exhausters”, *J. Convex Anal.* **15**(4), 859–868 (2008).

9. Roschina V. A., *Topics in Optimization: Solving Second-Order Conic Systems with Finite Precision; Calculus of Generalized Subdifferentials for Nonsmooth Functions* (City Univ. of Hong Kong, 2009).

10. Demyanov V. F., Malozemov V. N., *Introduction to Minimax* (Translated from Russian by D. Louvish., Dover publications, inc., New York, 2014, 307 p.).

11. Abbasov M. E., Demyanov V. F., “Adjoint Coexhausters in Nonsmooth Analysis and Extremality Conditions”, *J. Optim. Theory Appl.* **156**(3), 535–553 (2013).

12. Demyanov V. F., “Proper exhausters and coexhausters in nonsmooth analysis”, *Optimization* **61**, 1347–1368 (2012). https://doi.org/10.1080/02331934.2012.700929

13. Abbasov M. E., “Finding stationary points of functions allowing nonhomogenious approximations of augment”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 10*, issue 1, 3–8 (2012) [in Russian].

14. Abbasov M. E., “Geometric conditions of reduction of exhausters”, *Seminar on Constructive Nonsmooth Analysis and Nondifferentiable Optimization “CNSA & NDO”* (2016). Available at: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#1027 (accessed 6, October, 2017) [in Russian].

Author’s information:

Abbasov Majid E. — m.abbasov@spbu.ru