

О возможности применения метода знако-возмущенных сумм для обработки результатов динамических испытаний*

М. В. Волкова, О. Н. Граничип, Г. А. Волков, Ю. В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Волкова М. В., Граничип О. Н., Волков Г. А., Петров Ю. В. О возможности применения метода знако-возмущенных сумм для обработки результатов динамических испытаний // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 32–43. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.104>

В настоящее время методы измерения и прогнозирования динамической прочности материалов сложны и не стандартизированы. Рассматривается способ обработки экспериментальных данных, основанный на критерии инкубационного времени. Обычно на практике имеется лишь небольшое число измерений со случайными ошибками и ограниченной статистической информацией, поскольку динамические эксперименты являются трудоемкими и на проведение каждого отдельного испытания требуется много времени. Это сильно ограничивает количество доступных методов обработки данных, если только мы не удовлетворены приблизительными эвристическими решениями. В предположении о симметричности шума используется метод знако-возмущенных сумм для определения конечных доверительных интервалов с заданной доверительной вероятностью. Показано, что нескольких экспериментальных точек достаточно, чтобы определить значение прочностного параметра с точностью, подходящей для инженерных расчетов. Работоспособность предложенного метода продемонстрирована на примере обработки ряда экспериментов по динамическому разрушению горных пород.

Ключевые слова: знако-возмущенные суммы, динамическое разрушение, инкубационное время.

1. Введение. Одной из важнейших инженерных задач является измерение прочности и реологических параметров материалов. Для определения таких параметров, как статическая прочность σ_c или модуля Юнга существуют стандартные методы, потому что величины этих параметров могут быть измерены напрямую. Эти измерительные методы позволяют определить некоторое среднее значение требуемого параметра с определенной степенью точности, например, $\sigma_c \in [\sigma_{c-}; \sigma_{c+}]$. Кроме того, возможность прямого измерения предполагает, что физический смысл измеряемого параметра установлен и хорошо известен, поэтому все исследователи имеют единую точку зрения о полученных результатах.

Более сложная ситуация наблюдается в динамике, где прочность материала не может быть охарактеризована одним параметром критического напряжения. Разумно назвать «динамической» прочностью σ_d амплитуду нагружающего импульса, приводящего к разрушению материала. В случае, когда нагрузка линейно растет, «динами-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 17-11-01053).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

ческая» прочность σ_d будет всегда совпадать с напряжением в момент разрушения σ_* . Результаты испытаний показывают, что при интенсивном воздействии образцы могут кратковременно выдерживать нагрузку, значительно превышающую их статическую прочность σ_c , и значение напряжения в момент разрушения σ_* зависит от скорости нагружения и формы разрушающего импульса [1–8]. Такие скоростные зависимости прочности часто интерпретируются в определенных теориях как свойство материалов. Основной сложностью, возникающей при таком подходе, является то, что таких прочностных кривых может быть построено неограниченное количество, поскольку наблюдается сильное влияние формы и скорости ударного воздействия на значения σ_d . Кроме того, такой подход к вопросам прочности материала в принципе некорректен, когда разрушение материала вызвано пороговыми импульсами. В этом случае уровень напряжения в момент разрушения σ_* может быть значительно меньше статической прочности. Такое явление называется эффектом задержки разрушения.

Для предсказания условий динамического разрушения используется структурно-временной подход, основанный на критерии инкубационного времени разрушения [9, 10]. Основная идея этого критерия состоит в том, что разрушение не происходит мгновенно, и для каждого переходного процесса существует некоторое характерное время разрушения τ — инкубационное время, которое является константой материала, характеризующей его прочность при высокоскоростных динамических воздействиях. Добавление только одного дополнительного параметра прочности — инкубационного времени τ позволяет прогнозировать значение разрушающего напряжения, а также вычислять скоростные зависимости прочности для всех типов ударных нагрузок. Этот структурно-временной подход был успешно применен для решения многих задач по определению динамической прочности различных материалов и сплошных сред, например, при таких процессах, как динамическое разрушение горных пород и бетона, высокоскоростное пластическое деформирование металлов, акустическая ультразвуковая кавитация жидкостей и т. д. [10–13].

Эксперименты с прямым измерением инкубационного времени не реализуемы, и в настоящее время значение инкубационного времени может быть получено только по неявной схеме. Самый простой способ — выбрать значение τ , обеспечивающее хорошее соответствие между модельной кривой и множеством экспериментальных данных. Для выявления наилучшего соответствия модельной кривой и отвечающего ей оптимального значения инкубационного времени τ может быть использован любой метод. Естественные условия метода наименьших квадратов (МНК) обеспечивают строго согласованную точечную оценку [14], однако этот метод дает только одно определенное значение инкубационного времени без какой-либо оценки погрешности в случае отсутствия изменчивости в наблюдениях. Погрешность оценки параметров по методу наименьших квадратов является асимптотически нормальной, и это свойство может быть использовано для построения приблизительных доверительных интервалов. Однако эти интервалы основаны на центральной предельной теореме, и следовательно, гарантируются только асимптотически по мере того, как число экспериментальных точек стремится к бесконечности. При этом стандартные алгоритмы оценивания обычно используют условие непрерывного возмущения в данных. Однако это условие трудно обеспечить в рассматриваемой задаче, так как динамические эксперименты очень сложны и трудоемки, поэтому обычно для обработки экспериментальных данных нет большого количества точек. Это часто приводит к вырожденности экспериментальных данных и возникновению сложных задач идентификации. В связи с этим применение классической системы теории идентификации с конечным

числом экспериментальных точек приводит только к эвристическим доверительным интервалам, которые не имеют строгих теоретических гарантий.

Альтернативный подход к идентификации для определения интервала значений параметра методом гарантированных множеств не использует статистические свойства шума, а вместо этого допускает некоторые известные границы сверху для неопределенных параметров системы. Цель подхода, как правило, заключается в вычислении некоторых верхних или нижних оценок на множестве данных, согласованных с этими параметрами. Сходимость полученного множества оценок к истинному неизвестному вектору-параметру не может быть достигнута без каких-либо существенных дополнительных допущений (см., например, [15, 16]). В контексте рассматриваемой задачи использование робастных оценок минимаксных методов дает консервативный результат в виде очень широкого интервала для инкубационного времени τ с высокой погрешностью.

С учетом вышеизложенного необходимо использовать альтернативный подход, который позволит построить доверительные интервалы с заданной степенью достоверности вокруг оценки, полученной по МНК при слабых статистических предположениях. Таким методом является новый SPS (Sign-Perturbed Sums) алгоритм, предложенный в [17], обеспечивающий неасимптотические доверительные интервалы для неизвестного многомерного параметра в линейной регрессионной модели для установленной малой выборки. В настоящей работе предлагается применять SPS-алгоритм для оценки величины инкубационного времени τ , которое является нелинейным параметром модели, описывающей скоростную зависимость прочности в рамках структурно-временного подхода. Данный способ хорошо подходит для этой задачи, поскольку он обеспечивает доверительный интервал для τ с допустимой для инженерных расчетов точностью. Для определения среднего значения инкубационного времени с погрешностью $\delta = 20\text{--}35\%$ достаточно приблизительно десяти экспериментальных точек, при этом гарантируется точная доверительная вероятность конечной выборки, даже если отсутствует информация о конкретных вероятностных распределениях шума. Основные предположения относительно шумовых условий состоят только в том, что они независимы и имеют симметричные распределения около нуля, однако их распределения могут изменяться в каждой временной точке. Применимость нового алгоритма к подходу на основе инкубационного времени апробирована на нескольких экспериментах по динамическому разрушению различных типов горных пород [18]. Эта работа является расширенной версией [19], где приведены результаты обработки экспериментов по динамическому разрушению бетона.

2. Подход на основе инкубационного времени. Основные особенности структурно-временного подхода следующие. Общая форма критерия инкубационного времени имеет вид

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\sigma(t')}{\sigma_c} \right)^\alpha dt' \leq 1, \quad (1)$$

где $\sigma(t')$ — нагружающее напряжение, τ — инкубационное время разрушения, t — момент времени, в который проверяется, будет ли разрушение или нет, α — безразмерный параметр (для большинства хрупких материалов $\alpha = 1$). Согласно (1) разрушение не происходит, если левая часть критерия меньше единицы. Время разрушения t_* соответствует моменту времени t , для которого впервые будет достигаться равенство.

В большинстве экспериментальных схем по динамическим испытаниям реализуется линейный рост напряжений до момента разрушения. Тогда нагружающее воздей-

ствие зависит от скорости деформации $\dot{\epsilon}$ и модуля упругости k следующим образом:

$$\sigma(t) = h(t)k\dot{\epsilon}t, \quad (2)$$

где $h(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Подстановка функции (2) в критерий (1) приводит к следующему уравнению для времени разрушения t_* :

$$h(t_*)\left(\frac{t_*}{\tau}\right)^{\alpha+1} - h(t_* - \tau)\left(\frac{t_*}{\tau} - 1\right)^{\alpha+1} = s, \quad (3)$$

где $s = (\alpha + 1)(\sigma_c/(k\dot{\epsilon}\tau))^\alpha$ — безразмерный параметр, значение которого зависит от скорости нагружающего воздействия. Время разрушения t_* не может быть отрицательным, поэтому $h(t_*) = 1$, следовательно нужно рассмотреть два случая, когда $t_* > \tau$ или $t_* \leq \tau$. Из выражения (3) следует, что $s = 1$ при $t_* = \tau$, поэтому окончательное уравнение для определения момента разрушения t_* принимает вид

$$\begin{cases} (t_*/\tau)^{\alpha+1} = s, & s < 1, \\ (t_*/\tau)^{\alpha+1} - (t_*/\tau - 1)^{\alpha+1} = s, & s \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, подход на основе инкубационного времени позволяет прогнозировать скоростные зависимости динамического порога разрушения $\sigma_*(\dot{\epsilon}) = k\dot{\epsilon}t_*$. В большинстве случаев при расчетах динамической прочности хрупких материалов, таких как горные породы, параметр $\alpha = 1$. Далее корни уравнения (4) могут быть выражены в явном виде в зависимости от формы и критического напряжения разрушения следующим образом:

$$\sigma_*(\dot{\epsilon}) = \varphi(\tau, \dot{\epsilon}) = \begin{cases} \sigma_c + \frac{\tau}{2}k\dot{\epsilon}, & \dot{\epsilon} \leq \frac{2\sigma_c}{k\tau}, \\ \sqrt{2\sigma_c\tau k\dot{\epsilon}}, & \dot{\epsilon} > \frac{2\sigma_c}{k\tau}. \end{cases} \quad (5)$$

Применение критерия инкубационного времени продемонстрировано на примере экспериментов по ударному разрушению гранита и туфа. Теоретическая кривая в сравнении с экспериментальными точками [18] показана на рис. 1. Величина $\tau = 79\mu s$ (сплошная линия) рассчитывается согласно МНК, и как было указано выше, этот результат не дает никакой информации о погрешности вычисленного значения.

Другой метод — метод минимакса, оценивающий границы интервала по «крайним» экспериментальным точкам — дает очень широкий интервал для значения инкубационного времени $\tau \in [50; 115]\mu s$, и также не дает никакого представления о том, будут ли новые экспериментальные точки попадать в найденный интервал. Следовательно, необходимо использовать другой метод обработки данных, который даст не только более узкий интервал для возможных значений τ , но и предоставит информацию о степени достоверности этого интервала.

3. Постановка задачи. В рассматриваемых динамических экспериментах в качестве управляющего параметра можно выбрать скорость деформации $\dot{\epsilon}$, которой соответствует наблюдение σ_* — напряжение в момент разрушения. Тогда экспериментальные данные удовлетворяют следующей модели N наблюдений с помехами:

$$\sigma_{*i} = \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где v_i — независимые случайные помехи (погрешность) с симметричным распределением. Если скоростная зависимость прочности подчиняется принципам структурно-временного подхода, то функция φ будет равна

$$\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i) = k\dot{\epsilon}_i(\tau), \quad (7)$$

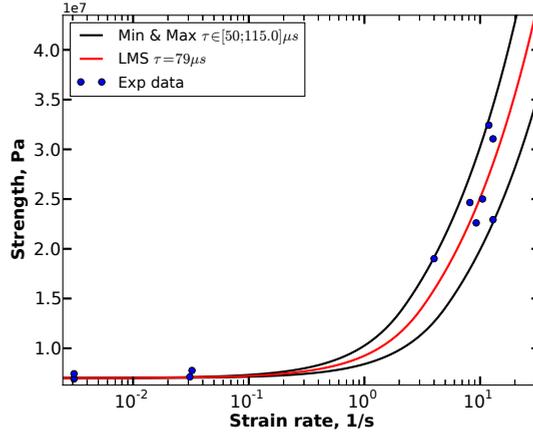


Рис. 1. Динамическое разрушение гранита. Синие точки — экспериментальные данные. Линии представляют собой теоретические кривые, построенные по критерию инкубационного времени разрушения: красная линия — с помощью МНК; черные линии — с помощью метода min&max robust.

где t_* — время разрушения, предсказанное критерием инкубационного времени посредством решения уравнения (4).

Уравнение (7) позволяет вычислить напряжение в момент разрушения при различных τ . Тогда с помощью МНК можно определить оптимальное значение инкубационного времени, для которого следующая сумма принимает минимальное значение:

$$\sum_{i=1}^N (\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i) - \sigma_{*i})^2 \rightarrow \min_{\tau}. \quad (8)$$

Однако мы не можем получить достаточно хороший доверительный интервал для неизвестного τ при малом количестве испытаний N без существенных ограничений для произвольных помех v_i .

Основная задача. Наша цель — построить доверительные интервалы для неизвестного параметра τ с заданной доверительной вероятностью для конечного, и скорее всего, малого количества экспериментальных точек. Эти доверительные интервалы должны определяться для наблюдаемых значений $\{\sigma_{*i}\}_{i=1}^N$ в зависимости от задаваемых действующих факторов $\{\dot{\epsilon}_i\}_{i=1}^N$, которые также могут быть выбраны. Построенные интервалы имеют квазисвободные распределения, поскольку делается только два вполне обоснованных предположения о распределении случайных помех: они являются независимыми случайными величинами, и их распределение обладает свойством симметрии. Наличие столь слабых ограничений очень важно, поскольку на практике знания о распределении шума ограничены. Кроме того, построенные доверительные интервалы должны содержать оценку по МНК.

4. Вычисление доверительных интервалов с помощью SPS-процедуры.

Для конечного числа наблюдений можно использовать следующую процедуру, которая аналогична SPS-процедуре из [17]. Согласно МНК минимум функционала (8) будет достигаться для оптимального значения инкубационного времени, являющегося

ся решением уравнения

$$H_0(\tau) = \sum_{i=1}^N (\sigma_{*i} - \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)}{d\tau} = 0, \quad (9)$$

где

$$\frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon})}{d\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2}k\dot{\epsilon}, & \dot{\epsilon} \leq \frac{2\sigma_c}{k\tau}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}\tau} \sqrt{\sigma_c k \dot{\epsilon}}, & \dot{\epsilon} > \frac{2\sigma_c}{k\tau}. \end{cases} \quad (10)$$

При минимальных предварительных статистических знаниях о шуме максимально используется информация о данных. Основным предположением является симметрия шума. Для некоторого $M > 0$ генерируется $N(M - 1)$ случайных значений Бернулли $\beta_{ij} = \pm 1$ с вероятностью $1/2$ и вводится $M - 1$ знако-возмущенных сумм следующего вида:

$$H_j(\tau) = \sum_{i=1}^N \beta_{ij} (\sigma_{*i} - \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)}{d\tau}, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (11)$$

Пусть τ^* является номинальным значением инкубационного времени τ , т. е. истинным значением параметра, которое существует в природе, если бы не было случайных помех. Тогда величины $H_0(\tau^*)$ и $H_j(\tau^*)$ имеют одинаковое распределение, в силу сделанного предположения о независимости и симметрии случайных возмущений v_i , так как в этом случае согласно (6) имеем $v_i = \sigma_{*i} - \varphi(\tau^*, \dot{\epsilon}_i)$. Следовательно нет оснований, по которым конкретное значение $|H_j(\tau^*)|$ должно быть больше или меньше другого значения $|H_{j'}(\tau^*)|$, и вероятность того, что конкретное значение $|H_j(\tau^*)|$ есть m -е наибольшее из упорядоченной совокупности $\{|H_j(\tau^*)|\}_{j=0}^{M-1}$, будет одинаковой для всех j , в том числе для $j = 0$ (случай, когда нет множителя β_{ij}), и равной $1/M$.

Алгоритм.

1. Учитывая выбираемое значение доверительной вероятности $p \in (0, 1)$, задайте целые числа $M > q > 0$ такие, что $p = 1 - q/M$.
2. Сгенерируйте $N(M - 1)$ одинаково распределенных независимых случайных знаков с вероятностями $\{\beta_{ij}\}$ с $\text{Prob}\{\beta_{ij} = 1\} = \text{Prob}\{\beta_{ij} = -1\} = 1/2$ для $i = 1, 2, \dots, N$ и $j = 1, 2, \dots, M - 1$.
3. Определите интервал $\widehat{\mathcal{T}} := \{\tau \in \mathbb{R} | \text{SPS_indicator}(\tau) = 1\}$.

Процедура: SPS_indicator(τ).

1. Для заданного τ вычислите разницу между предсказанным и наблюдаемым в эксперименте значением $\delta_i(\tau) = \sigma_{*i} - \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.
2. Вычислите

$$H_0(\tau) = \sum_{i=1}^N \delta_i(\tau) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)}{d\tau}, \quad (12)$$

$$H_j(\tau) = \sum_{i=1}^N \beta_{ij} \delta_i(\tau) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)}{d\tau}, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (13)$$

3. Отсортируйте набор скалярных величин $|H_j(\tau)|$ по возрастанию от наименьшего до наибольшего.

4. Вычислите ранг $\mathcal{R}(\tau)$ для $|H_0(\tau)|$ в упорядоченной совокупности $\{|H_j(\tau)|\}_{j=0}^{M-1}$, где $\mathcal{R}(\tau) = 1$, если значение $|H_0(\tau)|$ наименьшее; $\mathcal{R}(\tau) = 2$, если значение $|H_0(\tau)|$ является вторым наименьшим и т. д.
5. Если $\mathcal{R}(\tau) \leq M - q$, то присвойте процедуре $\text{SPS_indicator}(\tau)$ значение 1, иначе присвойте значение 0.

Заметим, что значение инкубационного времени $\hat{\tau}$, полученное согласно МНК, по определению является корнем уравнения $H_0(\hat{\tau}) = 0$, поэтому эта оценка будет включена в доверительный интервал, полученный согласно SPS-процедуре, т. е. $\hat{\tau} \in \hat{\mathcal{T}}$. Вероятность того, что τ^* принадлежит $\hat{\mathcal{T}}$, приведена в следующей теореме.

Теорема. *Если помехи являются независимыми случайными величинами, обладающими свойством симметрии, то $\text{Prob}\{\tau^* \in \hat{\mathcal{T}}\} = 1 - q/M$, где $M, q, \hat{\mathcal{T}}$ из шагов 1 и 3 описанного выше алгоритма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается аналогично соответствующей теореме, приведенной в работе [17]. Основное различие заключается в нелинейности функции $\varphi(\cdot, \cdot)$ из (5), однако она является одномерной, выпуклой, монотонно возрастающей и непрерывной по параметру τ . В самом деле, согласно формуле (10) производная функции $d\varphi(\tau)/d\tau$ является положительной для любого $\tau > 0$, и при этом критическая скорость нагружения $\dot{\epsilon}_c = 2\sigma_c/k\tau$ непрерывно уменьшается с ростом τ . Это означает, что $\varphi(\tau_1, \dot{\epsilon}) > \varphi(\tau_2, \dot{\epsilon})$ для любых значений $\dot{\epsilon}$, при условии, что $\tau_1 > \tau_2$. Следовательно, когда $\tau \notin [\tau_{\min}; \tau_{\max}]$, т. е. τ не принадлежит интервалу, полученному согласно минимаксной оценке, кривые $\varphi(\tau, \dot{\epsilon})$ будут лежать вне интервала $\min\&\max$ (рис. 1), т. е. под или над экспериментальными точками. Рассмотрим случай, когда $\tau < \tau_{\min}$ и все предсказанные значения прочности меньше величин, наблюдаемых в эксперименте: $\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i) < \sigma_{*i}, \forall i = 1, \dots, N$. Тогда все слагаемые суммы $H_0(\tau)$ из (9) будут положительными и эта сумма будет превосходить по модулю любую сумму $H_j(\tau)$ из (11), поскольку в ней некоторые слагаемые поменяют знак на отрицательный, т. е. $|H_0(\tau)| > |H_j(\tau)|, \forall \tau < \tau_{\min}$ и $j = 1, \dots, M - 1$. В этом случае будем иметь $\mathcal{R}(\tau) = M$, и соответствующее значение τ будет отсеиваться процедурой $\text{SPS_indicator}(\tau)$. Аналогично будут отсеяны значения $\tau > \tau_{\max}$, так как в этом случае все слагаемые суммы $H_0(\tau)$ будут отрицательными, в отличие от $H_j(\tau)$. Следовательно, получим $|H_0(\tau)| > |H_j(\tau)|$ и $\mathcal{R}(\tau) = M$. Таким образом, интервал $\hat{\mathcal{T}}$, определенный согласно SPS-алгоритму, будет содержаться в интервале $\min\&\max$. Более того, согласно леммам 1–3 из работы [17] для $\forall \tau \in \hat{\mathcal{T}}$ вероятность того, что любое значение $H_j(\tau)$ занимает в упорядоченной совокупности $\{|H_j(\tau)|\}_{j=0}^{M-1}$ какую-то определенную позицию, равна $1/M$, следовательно, $\text{Prob}(\mathcal{R}(\tau) \leq M - q) = 1 - q/M$.

Сразу стоит дополнить вышеприведенную теорему следующими замечаниями.

Замечание 1. Естественное ограничение сверху на число генерируемых наборов случайных знаков M при N наблюдениях таково: $M < 2^N - 2$.

Замечание 2. Нижняя граница для числа генерируемых наборов случайных знаков M определяется степенью достоверности вычисляемого интервала p : $M > 1/(1 - p)$.

Однако опыт расчетов показал, что для построения доверительных интервалов с относительно большой степенью достоверности, равной 70–90%, достаточно выбирать значения $M \sim 20\text{--}40$.

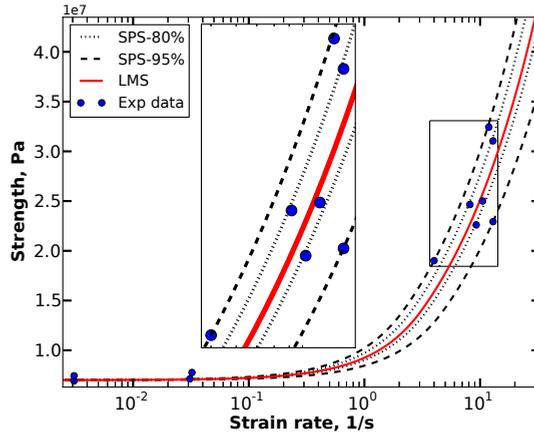


Рис. 2. Динамическое разрушение гранита [18]. Красные линии построены с помощью МНК; пунктирные — согласно SPS-процедуре для $\tau_{0.8} \in [71; 96]\mu s$; штрихованные линии — согласно SPS-процедуре для $\tau_{0.95} \in [51; 112]\mu s$.

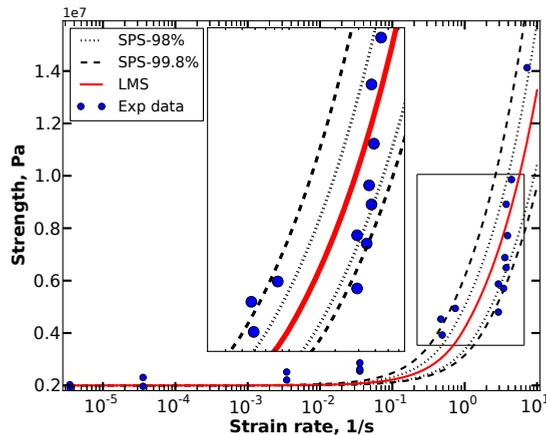


Рис. 3. Динамическое разрушение туфа [18]. Красные линии построены с помощью МНК; пунктирные линии — согласно SPS-процедуре для $\tau_{0.98} \in [605; 1400]\mu s$; штрихованные линии — согласно SPS-процедуре для $\tau_{0.998} \in [511; 2100]\mu s$.

5. Эксперименты. Результаты применения SPS-процедуры при обработке экспериментальных данных по динамическому разрушению различных типов горных пород показаны на рис. 2, 3.

В случае динамического разрушения гранита (см. рис. 2) два значения для доверительных вероятностей 80 и 95% были достигнуты при следующих значениях параметров SPS-процедуры: $M = 20$, $q = 4$ и $M = 20$, $q = 1$. Это дает нам два интервала для инкубационного времени разрушения: $\tau_{0.8} \in [71; 96]\mu s$ и $\tau_{0.95} \in [51; 112]\mu s$, в то время как МНК обеспечивает $\tau = 79\mu s$.

Таким образом, SPS-процедура позволяет рассчитать значение инкубационного времени с относительно небольшой погрешностью порядка 22% при достаточно большой степени доверительной вероятности, равной 80%.

В случае динамического разрушения туфа (см. рис. 3) мы имеем аналогичную ситуацию для следующих значений параметров SPS-процедуры: $M = 50$, $q = 1$ для 98% и $M = 500$, $q = 1$ для 99.8%. При этом погрешность 98% доверительного интервала $\tau_{0.98} \in [605; 1400]\mu s$ всего лишь порядка 40% относительно оценки по МНК $\tau = 977\mu s$. Второй доверительный интервал $\tau_{0.998} \in [511; 2100]\mu s$ с погрешностью 99.8% согласно теореме стремится к интервалу, определяемому методом минимакса.

Стоит отметить, что при расчетах использовалось различное количество экспериментальных точек для каждого материала, но это не повлияло на применимость SPS-алгоритма. Этот алгоритм дает значения инкубационного времени с подходящей для инженерных расчетов степенью точности, приблизительно равной 20–40%.

6. Заключение. Основная проблема в динамической механике разрушения — отсутствие стандартных методов для расчета и прогнозирования предельных характеристик интенсивных воздействий для различных материалов и сплошных сред. Структурно-временной подход показал себя как хороший инструмент для решения упомянутых задач, но для него также не определена стандартная процедура для нахождения значения инкубационного времени. Основная трудность заключается в том, что инкубационное время τ может быть измерено только косвенным способом и стандартные измерительные методы не работают. Предлагаемое применение SPS-процедуры показывает, как рассчитать инкубационное время разрушения с учетом заданной погрешности δ в условиях ограниченности количества экспериментальных точек. Этот алгоритм также позволяет оценить достоверность полученных интервалов для параметра τ . В будущем планируется сделать более слабые предположения о шуме, такие как в [20–22], и расширить полученные результаты на случай функции $\varphi(\cdot, \cdot)$ с $\alpha \neq 1$ (см. (4)).

Литература

1. Campbell J. D., Ferguson W. G. The temperature and strain-rate dependence of shear strength of mild steel // The Philosophical Magazine. 1970. Vol. 21. P. 63–82.
2. Rosakis A. J., Duffy J., Freund L. B. The determination of dynamic fracture toughness of also 4340 steel by the shadow spot method // J. Mech. Phys. Solids. 1984. Vol. 32, N 4. P. 443–160.
3. Shockey D. A., Seaman L., Curran D. R. Material behavior under high stress and ultrahigh loading rates. New York: Springer US, 1983.
4. Johnson G. R., Cook W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures // Engineering Fracture Mechanics. 1985. Vol. 21. P. 31–48.
5. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979. 272 с.
6. Ravi-Chandar K. Experimental challenges in the investigation of dynamic fracture of brittle materials // Physical Aspects of Fracture. NATO Science Series, Ser. II: Mathematics, Physics and Chemistry. 2001. Vol. 32. P. 323–342.
7. Kalthoff J. F., Winkler S. Failure mode transition at high rates of shear loading // Proc. of Int. Conf. on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials. 1987. P. 161–176.
8. Kanel G. I., Razorenov S. V., Baumung K., Singer J. Dynamic yield and tensile strength of aluminum single crystals at temperatures up to the melting point // Journal of Applied Physics. 2001. Vol. 90, N 1. P. 136–143.
9. Petrov Y. V., Utkin A. A. Dependence of the dynamic strength on loading rate // Mater. Science. 1989. Vol. 25, N 2. P. 153–156.
10. Petrov Y. V. Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: Fracture, cavitation, and electrical breakdown // Doklady Physics. 2004. Vol. 49, N 4. P. 246–249.

11. *Gruzdkov A. A., Petrov Y. V.* Cavitation breakup of low- and high-viscosity liquids // Technical Physics. 2008. Vol. 53, N 3. P. 291–295.
12. *Pugno N. M.* Dynamic quantized fracture mechanics // International Journal of Fracture. 2006. Vol. 140, N 1–4. P. 159–168.
13. *Wang Q. Z., Zhang S., Xie H. P.* Rock dynamic fracture toughness tested with holed-cracked flattened brazilian discs diametrically impacted by SHPB and its size effect // Experimental Mechanics. 2010. Vol. 50. P. 877–885.
14. *Ljung L.* System Identification: Theory for the User. New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.
15. *Bai E.-W., Nagpal K. M., Tempo R.* Bounded-error parameter estimation: Noise models and recursive algorithms // Automatica. 1996. Vol. 32, N 7. P. 985–999.
16. *Blanchini F., Szaiaer M.* A convex optimization approach to synthesizing bounded complexity h_{inf} filters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2012. Vol. 57, N 1. P. 219–224.
17. *Csaji B., Campi M. C., Weyer E.* Sign-perturbed sums: A new system identification approach for constructing exact non-asymptotic confidence regions in linear regression models // IEEE Trans. on Signal Processing. 2015. Vol. 63, N 1. P. 169–181.
18. *Cho S. H., Ogata Y., Kaneko K.* Strain-rate dependency of the dynamic tensile strength of rock // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2003. Vol. 40. P. 763–777.
19. *Volkova M., Volkov G., Granichin O., Petrov Y.* Sign-Perturbed Sums Approach for Data Treatment of Dynamic Fracture Tests // Proc. of the 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Melbourne, Australia, 12–15 December 2017.
20. *Senov A., Amelin K., Amelina N., Granichin O.* Exact confidence regions for linear regression parameter under external arbitrary noise // Proc. of the 2014 American Control Conference (ACC), Portland, USA, 4–6 June 2014. P. 5097–5102.
21. *Сенов А. А., Граничин О. Н.* Идентификация параметров линейной регрессии при произвольных внешних помехах в наблюдениях // Сб. трудов XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014), Россия, Москва, ИПУ РАН, 16–19 июня 2014. С. 2708–2719.
22. *Amelin K., Granichin O. N.* Randomized control strategies under arbitrary external noise // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 61, N 5. P. 1328–1333.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Волкова Марина Владимировна — ассистент; m.volkova@spbu.ru

Граничин Олег Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; o.granichin@spbu.ru

Волков Григорий Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; g.volkov@spbu.ru

Петров Юрий Викторович — д-р физ.-мат. наук, проф.; y.v.petrov@spbu.ru

On the possibility of sign-perturbed sums method application for the processing of dynamic tests data

M. V. Volkova, O. N. Granichin, G. A. Volkov, Yu. V. Petrov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Volkova M. V., Granichin O. N., Volkov G. A., Petrov Yu. V. On the possibility of sign-perturbed sums method application for the processing of dynamic tests data. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 32–43. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.104>

Methods of measurement and prediction of materials dynamic strength are complicated and non-standardized. The way of experimental data treatment based on incubation time criterion is considered. In practice, we only have a finite number of noisy measurements and limited statistical knowledge about the noise since dynamic tests are labor consuming and each assay demands a lot of time. This strongly restricts the number of available data treatment methods unless we are satisfied with approximate, heuristic solutions. Under

the assumption of noise symmetries, we use Sign-Perturbed Sums (SPS) approach for constructing finite-sample confidence regions which have exact confidence probabilities, i.e. they contain the true parameter with a user-chosen exact probability for any finite data set. It is shown that a few experimental points are enough to determine strength parameter with accuracy proper for engineering. The proposed method is demonstrated through a number of practical experiments.

Keywords: sign-perturbed sums, dynamic fracture, incubation time.

References

1. Campbell J. D., Ferguson W. G., “The temperature and strain-rate dependence of shear strength of mild steel”, *The Philosophical Magazine* **21**, 63–82 (1970).
2. Rosakis A. J., Duffy J., Freund L. B., “The determination of dynamic fracture toughness of alsi 4340 steel by the shadow spot method”, *J. Mech. Phys. Solids* **32**(4), 443–160 (1984).
3. Shockey D. A., Seaman L., and Curran D. R., *Material behavior under high stress and ultrahigh loading rates* (Springer US, New York, 1983).
4. Johnson G. R., Cook W. H., “Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures”, *Engineering Fracture Mechanics* **21**, 31–48 (1985).
5. Nikiforovsky V. S., Shemyakin E. I., *Dynamic fracture solids* (Nauka, Novosibirsk, 1979, 272 p.) [in Russian].
6. Ravi-Chandar K., “Experimental challenges in the investigation of dynamic fracture of brittle materials”, *Physical Aspects of Fracture. NATO Science Series, Ser. II: Mathematics, Physics and Chemistry* **32**, 323–342 (2001).
7. Kalthoff J. F., Winkler S., “Failure mode transition at high rates of shear loading”, *Proc. of Int. Conf. on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*, 161–176 (1987).
8. Kanel G. I., Razorenov S. V., Baumung K., Singer J., “Dynamic yield and tensile strength of aluminum single crystals at temperatures up to the melting point”, *Journal of Applied Physics* **90**(1), 136–143 (2001).
9. Petrov Y. V., Utkin A. A., “Dependence of the dynamic strength on loading rate”, *Mater. Science* **25**(2), 153–156 (1989).
10. Petrov Y. V., “Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: Fracture, cavitation, and electrical breakdown”, *Doklady Physics* **49**(4), 246–249 (2004).
11. Gruzdkov A. A., Petrov Y. V., “Cavitation breakup of low- and high-viscosity liquids”, *Technical Physics* **53**(3), 291–295 (2008).
12. Pugno N. M., “Dynamic quantized fracture mechanics”, *International Journal of Fracture* **140**(1–4), 159–168 (2006).
13. Wang Q. Z., Zhang S., Xie H. P., “Rock dynamic fracture toughness tested with holed-cracked flattened brazilian discs diametrically impacted by shpb and its size effect”, *Experimental Mechanics* **50**, 877–885 (2010).
14. Ljung L., *System Identification: Theory for the User* (Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, 1999).
15. Bai E.-W., Nagpal K. M., Tempo R., “Bounded-error parameter estimation: Noise models and recursive algorithms”, *Automatica* **32**(7) 985–999 (1996).
16. Blanchini F., Szafer M., “A convex optimization approach to synthesizing bounded complexity h_{inf} filters”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(1), 219–224 (2012).
17. Csaji B., Campi M. C., Weyer E., “Sign-perturbed sums: A new system identification approach for constructing exact non-asymptotic confidence regions in linear regression models”, *IEEE Trans. on Signal Processing* **63**(1), 169–181 (2015).
18. Cho S. H., Ogata Y., Kaneko K., “Strain-rate dependency of the dynamic tensile strength of rock”, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* **40**, 763–777 (2003).
19. Volkova M., Volkov G., Granichin O., Petrov Y., “Sign-Perturbed Sums Approach for Data Treatment of Dynamic Fracture Tests”, *Proc. of the 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Melbourne, Australia, 12–15 December 2017).
20. Senov A., Amelin K., Amelina N., Granichin O., “Exact confidence regions for linear regression parameter under external arbitrary noise”, *Proc. of the 2014 American Control Conference (ACC)*, 5097–5102 (Portland, USA, 4–6 June 2014).

21. Senov A. A., Granichin O. N., "Identification of linear regression parameters for arbitrary external noise in observations", *Proceedings of XII All-Russian Conference on Control Problems (VSPU-2014)*, 2708–2719 (Russia, Moscow, ICS RAS, 16–19 June 2014) [in Russian].

22. Amelin K., Granichin O. N., "Randomized control strategies under arbitrary external noise", *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(5), 1328–1333 (2016).

Author's information:

Volkova Marina V. — m.volkova@spbu.ru

Granichin Oleg N. — o.granichin@spbu.ru

Volkov Grigorii A. — g.volkov@spbu.ru

Petrov Yurii V. — y.v.petrov@spbu.ru