УДК 517.929 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 93D20

# Стабилизация некоторых классов неопределенных систем*

*М. С. Захаренков*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Захаренков М. С.* Стабилизация некоторых классов неопределенных систем // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 51–59. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.106

Рассматривается задача синтеза стабилизирующего управления $u$ для систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Элементы $\alpha_{i,j}(\cdot)$ матрицы $A$ являются равномерно ограниченными неупреждающими функционалами произвольной природы. В случае непрерывной системы элементы матрицы $B$ также являются непрерывными и равномерно ограниченными функционалами. В случае импульсного уравнения элементы матрицы $B$ — дифференцируемые равномерно ограниченные функции времени. Предполагается, что выше главной диагонали матрицы $A(\cdot)$ имеется $k$ изолированных равномерно ограниченных элементов $\alpha_{i_l,j_l}(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\inf_{(\cdot)} |\alpha_{i_l,j_l}(\cdot)| \geq \alpha_- > 0, \quad l \in \overline{1,k},$$

$G_k$ — множество имеющихся в системе изолированных элементов; $J_1$ — это множество индексов строк матрицы $A(\cdot)$, в которых имеются изолированные элементы, а $J_2$ — множество индексов строк матрицы $A(\cdot)$, в которых их нет. Предполагается, что остальные элементы, находящиеся выше главной диагонали, с индексом строки из $J_1$ достаточно малы:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{i,j}(\cdot)| < \delta, \quad \alpha_{i,j} \notin G_k, \quad i \in J_1, \quad j > i.$$

Все остальные элементы, стоящие выше главной диагонали, равномерно ограничены.

В непрерывном случае выполняется $u = S(\cdot)x$, в случае импульсной системы — $u = \xi(t)$, где составляющие вектора $\xi$ являются выходами синхронных импульсных элементов.

С помощью построения специальной квадратичной функции Ляпунова определяется матрица $S(\cdot)$, при которой в непрерывном случае замкнутая система становится глобально экспоненциально устойчивой. В импульсном случае синтезируются сигналы на входах импульсных элементов, при которых система становится глобально асимптотически устойчивой.

*Ключевые слова*: неопределенные импульсные системы, стабилизация неопределенных систем.

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (тема 6.38.230.2015) и РФФИ (грант 17-01-00102a).

**1. Введение.** Во многих работах по стабилизации неопределенных систем рассматриваются системы, у которых неопределенными являются вариации известных элементов матрицы объекта управления [1, 2]. В работах [3–7] неопределенными считаются сами элементы. В [3–5] предполагается, что элементы первой наддиагонали являются знакоопределенными. В [6] знакоопределенными допускались элементы, расположенные на верхней части любой наддиагонали. В работе [7] знакоопределенные элементы были разбросаны хаотично выше главной диагонали. В первой части данной работы будет рассмотрено расширение класса непрерывных неопределенных стабилизируемых систем, предложенного в [7], путем снижения требований к некоторым элементам, находящимся выше главной диагонали. Во второй части работы будет предложен основанный на реализации метода усреднения сигналов в [8] и результатах, полученных в первой части, алгоритм стабилизации импульсной неопределенной системы с матрицей объекта управления, принадлежащей классу, определенному в первой части. Метод усреднения сигналов на выходах модуляторов впервые без строгого обоснования был описан в работе [9]. Далее он был строго математически обоснован в [10].

**2. Стабилизация непрерывной системы.** Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u, \tag{1}$$

$$u = S^*(\cdot)x, \tag{2}$$

где $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}, S(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $*$ — знак транспонирования (все величины вещественные). Задача — построить такую матрицу $S(\cdot)$, при которой система (1), (2) глобально экспоненциально устойчива. Элементами матриц $A(\cdot), B(\cdot), S(\cdot)$ являются неупреждающие функционалы произвольной природы. Элементы $\alpha_{i,j}(\cdot)$ матрицы $A(\cdot)$, стоящие на главной диагонали и ниже нее, равномерно ограничены:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{i,j}(\cdot)| \le \alpha_{+1} < \infty, \quad i \in \overline{1,n}; \quad j \in \overline{1,i}. \tag{3}$$

Назовем знакоопределенный элемент изолированным, если в строке и столбце, на пересечении которых он расположен, нет других знакоопределенных элементов. И предположим, что выше главной диагонали матрицы $A(\cdot)$ имеется $k$ изолированных равномерно ограниченных элементов $\alpha_{i_l,j_l}(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\inf_{(\cdot)} |\alpha_{i_l,j_l}(\cdot)| \ge \alpha_- > 0, \quad l \in \overline{1,k}. \tag{4}$$

За $G_k$ обозначим множество имеющихся в системе изолированных элементов. Пусть $J_1$ — это множество индексов строк матрицы $A(\cdot)$, в которых имеются изолированные элементы, а $J_2$ — множество индексов строк матрицы $A(\cdot)$, в которых их нет. Предполагается, что остальные элементы, находящиеся выше главной диагонали, с индексом строки из $J_1$ достаточно малы:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{i,j}(\cdot)| < \delta, \quad \alpha_{i,j} \notin G_k, \quad i \in J_1, \quad j > i. \tag{5}$$

Все остальные элементы, стоящие выше главной диагонали, равномерно ограничены:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{i,j}(\cdot)| \le \alpha_{+2} < \infty, \quad i \in J_2, \quad j > i. \tag{6}$$

Предположим, что $m = n - k$ и элементы $\beta_{i,j}(\cdot)$ матрицы $B(\cdot)$ обладают свойствами

$$\inf_{(\cdot)} |\beta_{i_s,s}(\cdot)| \geq \beta_0 > 0, \tag{7}$$

$$\sup_{(\cdot)} |\beta_{i_s,s}(\cdot)| \leq \beta_+ < \infty \tag{8}$$

при $i_s \in \overline{1,n} \backslash \{i_1, \cdots, i_k\}$, остальные элементы матрицы $B(\cdot)$ нулевые.
Построим функцию Ляпунова

$$V(x) = x^* H^{-1} x \tag{9}$$

с положительной матрицей $H$ следующей структуры. На главной диагонали стоят положительные числа $h_1, \ldots, h_n$. Элементы матрицы $H$, индексы которых совпадают с индексами элементов из множества $G_k$, а также симметричные им по отношению к главной диагонали имеют вид

$$h_{i_l,j_l} = h_{j_l,i_l} = -0.5\sqrt{h_{i_l} h_{j_l}} \operatorname{sign} \alpha_{i_l,j_l}(\cdot). \tag{10}$$

Остальные элементы матрицы $H$ равны нулю. Задача заключается в определении элементов $h_i$ $(i \in \overline{1,n})$ и матрицы $S(\cdot)$, при которых производная по времени от функции (9), взятая в силу системы (1), (2), обладает свойством

$$\frac{dV}{dt} < -\alpha x^* H^{-2} x, \quad x \neq 0, \quad \alpha > 0. \tag{11}$$

Отсюда следует глобальная экспоненциальная устойчивость рассматриваемой системы. Неравенство (11) равносильно матричному неравенству

$$A^*(\cdot)H^{-1} + H^{-1}A(\cdot) + S(\cdot)B^*(\cdot)H^{-1} + H^{-1}B(\cdot)S^*(\cdot) + \alpha H^{-2} < 0,$$

которое после умножения слева и справа на $H$ принимает вид

$$HA^*(\cdot) + A(\cdot)H + HS(\cdot)B^*(\cdot) + B(\cdot)S^*(\cdot)H + \alpha I < 0,$$

где $I$ — единичная матрица $n \times n$. Полагая в нем

$$S(\cdot) = H^{-1}\Lambda B(\cdot), \tag{12}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, приходим к неравенству

$$Q(\cdot) = HA^*(\cdot) + A(\cdot)H + \Lambda B(\cdot)B^*(\cdot) + B(\cdot)B^*(\cdot)\Lambda + \alpha I < 0. \tag{13}$$

Представим матрицу $A(\cdot)$ в виде $A(\cdot) = A_1(\cdot) + A_2(\cdot)$, где $A_1(\cdot)$ получается из $A(\cdot)$ обнулением всех элементов из (5). Неравенство (13) принимает следующий вид:

$$Q_1(\cdot) + Q_2(\cdot) < 0,$$

где $Q_1(\cdot) = HA_1^*(\cdot) + A_1(\cdot)H + \Lambda B(\cdot)B^*(\cdot) + B(\cdot)B^*(\cdot)\Lambda + 2\alpha I$, $Q_2(\cdot) = HA_2^*(\cdot) + A_2(\cdot)H - \alpha I$. Определим элементы матрицы $H$ и числа $\lambda_i$ $(i \in \overline{1,n})$ таким образом, чтобы выполнялось свойство

$$Q_1(\cdot) < 0. \tag{14}$$

Определим матрицу $Q_1^{J_1}(\cdot)$ как матрицу, состоящую из элементов матрицы $Q_1(\cdot)$ с индексами из $J_1$:

$$Q_1^{J_1}(\cdot) = (q_{1_{i,j}}(\cdot))_{i,j\in J_1}.$$

Поскольку у матрицы $B(\cdot)$ в каждом столбце имеется ровно один ненулевой элемент, а в каждой строке — не более чем один ненулевой элемент, то для удобства пронумеруем ненулевые элементы матрицы $B(\cdot)$ номерами строк, в которых они находятся. Далее перейдем к последовательному анализу нижних главных диагональных миноров матрицы $Q_1(\cdot)$. Рассмотрим первый нижний главный диагональный минор матрицы $Q_1(\cdot)$:

$$\Delta_1(\cdot) = T_1(\cdot) + 2\beta_n(\cdot)^2\lambda_n,$$

где

$$T_1(\cdot) = 2\alpha + 2\alpha_{n,n}(\cdot)h_n,$$

если $\alpha_{n-1,n}(\cdot)$ не изолированный, и

$$T_1(\cdot) = 2\alpha + 2\alpha_{n,n}(\cdot)h_n - \alpha_{n,n-1}(\cdot)\mathrm{sign}\alpha_{n-1,n}(\cdot)\sqrt{h_{n-1}h_n},$$

если $\alpha_{n-1,n}(\cdot)$ изолированный. Матрица $T_1(\cdot)$ равномерно ограничена вследствие (3), (10). Таким образом, выбрав достаточно большое по модулю отрицательное число $\lambda_n$, можно добиться того, что $\Delta_1(\cdot)<0$.

Перейдем ко второму нижнему главному диагональному минору матрицы $Q_1(\cdot)$. Его вид будет зависеть от того, является ли элемент $\alpha_{n-1,n}(\cdot)$ изолированным. Если он не изолированный, то элемент $q_{1_{n-1,n-1}}(\cdot)$ содержит внутри себя слагаемое вида $2\beta_{n-1}(\cdot)^2\lambda_{n-1}$. Сгруппировав все слагаемые второго минора, получим

$$\Delta_2(\cdot) = T_2(\cdot) + \Lambda_{n-1}(\cdot) + 4\beta_{n-1}^2(\cdot)\beta_n^2(\cdot)\lambda_{n-1}\lambda_n, \tag{15}$$

где матрица $T_2(\cdot)$ равномерно ограничена, $\Lambda_{n-1}(\cdot)$ не зависит от $\lambda_{n-1}$, но зависит от $\lambda_n$. Здесь за счет выбора достаточно большого по модулю числа $\lambda_{n-1}$ мы добиваемся того, что $\Delta_2(\cdot) > 0$. Пусть теперь $n-1 \in J_1$. В этом случае второй нижний главный диагональный минор матрицы $Q_1(\cdot)$ можно записать в следующем виде:

$$\Delta_2(\cdot) = T_2(\cdot) + q_{1_{n-1,n-1}}(\cdot)\cdot 2\beta_n^2(\cdot)\lambda_n = T_2(\cdot) + 2\Delta_1^{Q_1^{J_1}}(\cdot)\beta_n^2(\cdot)\lambda_n, \tag{16}$$

где матрица $T_2(\cdot)$ равномерно ограничена, $\Delta_1^{Q_1^{J_1}}(\cdot)$ — первый нижний главный диагональный минор матрицы $Q_1^{J_1}(\cdot)$. Таким образом, имеем $\mathrm{sign}\Delta_2(\cdot) = -\mathrm{sign}q_{1_{n-1,n-1}}(\cdot)$. Ключевым внутри $q_{1_{n-1,n-1}}(\cdot)$ является слагаемое

$$-\alpha_{n-1,n}(\cdot)\sqrt{h_{n-1}h_n}\mathrm{sign}\alpha_{n-1,n}(\cdot),$$

где благодаря выбору достаточно большого значения $h_n$ мы добиваемся отрицательного знака для $q_{1_{n-1,n-1}}(\cdot)$, и соответственно получаем $\Delta_2(\cdot) > 0$. Рассмотрим теперь общий вид $i$-го нижнего главного диагонального минора матрицы $Q_1(\cdot)$:

$$\Delta_i(\cdot) = T_i(\cdot) + \Lambda_{n-i+1}(\cdot) + 2^{i-j}\Delta_j^{Q_1^{J_1}}(\cdot)\prod_{l\in J_2, l>n-i}\beta_l^2(\cdot)\lambda_l, \tag{17}$$

где матрица $T_i(\cdot)$ равномерно ограничена, $\Lambda_{n-i+1}(\cdot)$ не зависит от $\lambda_d$ ($d = \min\limits_{l\in J_2, l>n-i} l$) $j$ — количество строк с изолированными элементами матрицы $A(\cdot)$, считая снизу до текущей строки, $\Delta_j^{Q_1^{J_1}}(\cdot)$ — $j$-й нижний главный диагональный минор матрицы $Q_1^{J_1}(\cdot)$. Возможность записи $i$-го минора в таком виде доказывается по индукции и является возможной благодаря удачному выбору структур матриц $H$ и $\Lambda$.

Таким образом, если в $i$-й строке матрицы $A(\cdot)$ нет изолированного элемента, то мы добиваемся нужного нам знака минора $\Delta_{n-i+1}(\cdot)$ матрицы $Q_1(\cdot)$ за счет выбора достаточно большого по модулю числа $\lambda_i$. В противном случае, если существует $\alpha_{i,j}(\cdot)$ — изолированный элемент в матрице $A(\cdot)$, мы добиваемся нужного знака минора $\Delta_{n-i+1}(\cdot)$ матрицы $Q_1(\cdot)$ за счет выбора достаточно большого значения $h_j$. Оставшиеся элементы матриц $H$ и $\Lambda$ определим единицами. Таким образом, можно добиться выполнения для матрицы $Q_1(\cdot)$ критерия Сильвестра.

Отдельно стоит отметить то, какое влияние оказывают элементы из (6) на знак минора. Чтобы убедиться в том, что эти элементы существенно не влияют на наш алгоритм выбора коэффициентов, рассмотрим более подробно матрицы $HA_1^*(\cdot)$ и $A_1(\cdot)H$. Действительно, так как элементы из (6) имеют индексы строк из множества $J_2$, то они будут оказывать влияние только на элементы матрицы $A_1(\cdot)H$ с индексами строк из $J_2$ и элементы матрицы $HA_1^*(\cdot)$ с индексами столбцов из $J_2$. А тогда от них соответственно не будет зависеть $\Delta_j^{Q_1^{J_1}}(\cdot)$, так как матрица $Q_1^{J_1}(\cdot)$ состоит из элементов матрицы $Q_1(\cdot)$ с индексами строк и столбцов из $J_1$.

Теперь покажем, что при достаточно малых $\delta$ выполняется

$$Q_2(\cdot) < 0. \tag{18}$$

Согласно неравенству Рэлея для выполнения (18) достаточно, чтобы собственные числа матрицы $M(\cdot)$ удовлетворяли оценке

$$\max_i \mu_i(M(\cdot)) < \alpha, \tag{19}$$

где $M(\cdot) = HA_2^*(\cdot) + A_2(\cdot)H$. Ввиду симметрии матрицы $M(\cdot)$ имеем

$$\max_i \mu_i(M(\cdot)) = ||M(\cdot)||,$$

$||M(\cdot)||$ — спектральная норма матрицы $M(\cdot)$. Поскольку справедливы соотношения

$$||M(\cdot)|| \le 2||H||||A_2(\cdot)|| \le 2\mu_{\max}|A_2(\cdot)| = 2\mu_{\max}\delta\sqrt{\frac{k}{2}(2n-k-3)},$$

где $\mu_{\max}$ — максимальное собственное число матрицы $H$, то неравенство (19) выполняется при

$$\delta < \frac{\alpha}{2\mu_{\max}\sqrt{\frac{k}{2}(2n-k-3)}}. \tag{20}$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (3)–(7), (20). *В этом случае существуют такие числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *и матрица* $H$, *что система* (1), (2), (12) *глобально экспоненциально устойчива.*

**3. Стабилизация импульсной системы.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(\cdot)x + B(t)\xi, \quad \eta = \eta(x), \quad t \ge t_0, \tag{21}$$

где $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\quad \eta^* = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$. Сигнал $\xi_i(t)$ на выходе $i$-го импульсного элемента связан с сигналом $\eta_i(t)$ на его входе соотношением

$$\xi_i = \mathfrak{M}_i \eta_i, \tag{22}$$

где $\mathfrak{M}_i$ — оператор, который каждую непрерывную на $[t_0, +\infty)$ функцию $\eta_i(t)$ отображает в последовательность $\{t_k\}$ и функцию $\xi_i(t)$ такие, что

$$\delta T \leq t_{k+1} - t_k \leq T, \quad \delta \in (0,1), \quad T > 0, \tag{23}$$

$\xi_i(t)$ не зависит от значений $\eta_i(\tau)$ при $\tau > t$ и является кусочно-непрерывной функцией, не меняющей знака на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$.

Пусть существует «эквивалентная нелинейность» [10] $\phi_i(\eta)$ ($\phi_i(0) = 0$) — непрерывная монотонно возрастающая функция такая, что для любого $k$ найдется $\tilde{t}_{ik} \in [t_k, t_{k+1})$, при котором среднее значение $k$-го импульса

$$v_{ik} = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \xi_i(t) dt \tag{24}$$

соотносится с $\eta_i(\tilde{t}_{ik})$ следующим образом:

$$v_{ik} = \phi_i(\eta_i(\tilde{t}_{ik})), \tag{25}$$

при этом

$$\phi_i(\gamma) \to \pm\infty \quad \text{при} \quad \gamma \to \pm\infty. \tag{26}$$

Кроме того, пусть элементы матрицы $B(t)$ теперь являются дифференцируемыми функциями времени и удовлетворяют условиям

$$\sup_{t \geq t_0} |B(t)| < \infty, \tag{27}$$

$$\sup_{t \geq t_0} |\dot{B}(t)| < \infty, \tag{28}$$

а матрица $A(\cdot)$ принадлежит к классу, определенному в предыдущем пункте. Положим в системе (21)

$$\eta_i = \phi_i^{-1}(\sigma_i), \quad \sigma_i = s_i^* x, \quad i \in \overline{1, m}, \tag{29}$$

где $\phi_i^{-1}$ — функция, обратная к $\phi_i$, тогда свойство (25) примет вид

$$v_{ik} = \sigma_i(\tilde{t}_{ik}). \tag{30}$$

Пусть $v_k$ — вектор с координатами (24), $v(t) = v_k$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$, $g(t) = \int\limits_0^t (\xi(\gamma) - v(\gamma)) d\gamma$. Сделаем замену переменных, чтобы исключить $\xi$ из (21):

$$x = z + Bg. \tag{31}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \dot{z} = Az + ABg + B\xi - B\dot{g} - \dot{B}g = Az + (AB - \dot{B})g + B\xi - B(\xi - v) = \\ = Az + BS^*(z + Bg) + (AB - \dot{B})g = Dz + w, \end{aligned} \tag{32}$$

где $D = A + BS^*, w = B(v - S^*z) + (AB - \dot{B})g$. Возьмем функцию Ляпунова

$$V(z) = z^* H^{-1} z, \tag{33}$$

где $H$ построена ранее. Из свойств оператора $\mathfrak{M}$ следует согласно [10] неравенство

$$|g(t)| \leq T|v(t)|. \tag{34}$$

Далее, действуя аналогично [8], получаем оценку

$$V(z(t_N)) + p \int\limits_{t_0}^{t_N} V dt \leq V(z(t_0)), \tag{35}$$

где $p > 0$. Отсюда следует, что $|z(t)| \in L_2[t_0, +\infty)$. С помощью оценок, предложенных в [10] при использовании неравенства Виртингера, получаем, что $|v| \in L_2[t_0, +\infty)$. Вследствие (23) имеет место асимптотика

$$v(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{36}$$

из которой в силу (34) следует, что

$$g(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{37}$$

Из (35) получается равномерная оценка для $|z(t_k)|$. Далее получаем, что функция $|\dot{z}(t)|$ равномерно ограничена по $t$. А тогда $|z(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, из чего следует, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Сформулируем полученный результат.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* (3)–(6), (22), (26)–(28), *тогда при достаточно малом значении* $T$ *система* (21), (29) *глобально асимптотически устойчива.*

### Литература


1. *Kwon O., Park J. H.* Matrix inequality approach to a novel stability criterion for time-delay systems with nonlinear uncertainties // J. Optim. Theory Appl. Vol. 126, N 3. 2005. P. 643–656.
2. *Qian W., Cong S., Sun Y., Fei S.* Novel robust stability criteria for uncertain systems with time-varying delay // Appl. Math. Comput. Vol. 215. 2009. P. 866–872.
3. *Li Ji, Qian Ch., Ding Sh.* Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems // International Journal of Control. 2010. Vol. 83, N 11. P. 2241–2252.
4. *Liu L., Huang J.* Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequence gain sign // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. Vol. 51, N 4. P. 625–631.
5. *Zhai Ju., Li W., Fei Sh.* Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory Appl. 2013. Vol. 7. Iss. 2. P. 305–313.
6. *Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A.* Stabilization of a New Classes of Uncertain Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-Papers Online). 2015. Vol. 48, N 11. P. 1034–1037.
7. *Зубер И. Е., Волошинова Т. В., Гелиг А. Х.* Расширенный класс неопределенных стабилизируемых систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Т. 3(61). Вып. 3. 2016.
8. *Гелиг А. Х., Зубер И. Е.* Стабилизация некоторых классов неопределенных систем с помощью прямого и непрямого управления. II. Импульсные и дискретные системы // Автоматика и телемеханика. 2012. № 9. С. 72–87.
9. *Andeen R. E.* The principle of equivalent areas // Trans. AIEE (Application and Industry). 1960. N 79. P. 332–336.

10. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1993.

Статья поступила в редакцию 26 мая 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

*Захаренков Максим Сергеевич* — аспирант; maxxzahar@rambler.ru

## Stabilization of some class of uncertain systems

*M. S. Zakharenkov*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Zakharenkov M. S. Stabilization of some class of uncertain systems. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 51–59. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.106

Consider the problem of stabilizing control $u$ synthesis for systems

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Elements $\alpha_{i,j}(\cdot)$ of matrix $A$ are uniformly bounded functionals of arbitrary nature. In case of continuous system matrix $B$ elements are also continuous and uniformly bounded functionals. In case of pulse-modulated system matrix $B$ elements are differentiable uniformly bounded functions of time. Assumed that $k$ isolated uniformly bounded elements $\alpha_{i_l,j_l}(\cdot)$ exist over the main diagonal of matrix $A(\cdot)$ such as

$$\inf_{(\cdot)} |\alpha_{i_l,j_l}(\cdot)| \geq \alpha_- > 0, \quad l \in \overline{1,k}.$$

$G_k$ is a set of isolated elements existing in the system. $J_1$ is a set of indexes of rows of matrix $A(\cdot)$, where isolated elements are located and $J_2$ is a set of indexes of rows of matrix $A(\cdot)$, where isolated elements do not exist. Assumed that other elements located over the main diagonal with indexes from $J_1$ are sufficiently small.

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{i,j}(\cdot)| < \delta, \quad \alpha_{i,j} \notin G_k, \quad i \in J_1, \quad j > i.$$

Other elements located over the main diagonal are uniformly bounded.

In continuous case $u = S(\cdot)x$, in pulse-modulated case $u = \xi(t)$, where vector $\xi$ components are outputs of synchronized pulse elements.

Using construction of special quadratic Lyapunov function one can determine $S(\cdot)$, such that for continuosed case closed loop system is globally exponentially stable. In pulse-modulated case such output pulses are synthesised so that system is globally asymptotically stable.

*Keywords*: uncertain pulse-modulated systems, uncertain systems stabilization.

## References

1. Kwon O., Park J. H., “Matrix inequality approach to a novel stability criterion for time-delay systems with nonlinear uncertainties”, *J. Optim. Theory Appl.* **126**(3), 643–656 (2005).

2. Qian W., Cong S., Sun Y., Fei S., “Novel robust stability criteria for uncertain systems with time-varying delay”, *Appl. Math. Comput.* **215**, 866–872 (2009).

3. Li Ji, Qian Ch., Ding Sh., “Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems”, *International Journal of Control* **83**(11), 2241–2252 (2010).

4. Liu L., Huang J., “Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequence gain sign”, *IEEE Trans. Autom. Control* **51**(4), 625–631 (2006).

5. Zhai Ju., Li W., Fei Sh., “Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems”, *IET Control Theory Appl.* **7**(2), 305–313 (2013).

6. Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A., “Stabilization of a New Classes of Uncertain Systems”, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-Papers Online)* **48**(11), 1034–1037 (2015).

7. Zuber I. E., Voloshinova T. V., Gelig A. Kh., “An extended class of stabilizable uncertain systems”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1* **3(61)**, issue 3, 402–407 (2016) [in Russian]. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.307

8. Gelig A. Kh., Zuber I. E., “Using the direct and indirect control to stabilize some classes of uncertain systems. II. Pulse and discrete systems”, *Automation and Remote Control* **73**, issue 9, 1498–1510 (2012).

9. Andeen R. E., “The principle of equivalent areas”, *Trans. AIEE (Application and Industry)* (79), 332–336 (1960).

10. Gelig A. Kh., Churilov A. N., *Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems* (Birkhäuser, Boston, 1998, 362 p.).

Author’s information:

*Zakharenkov Maksim S.* — maxxzahar@rambler.ru