

# Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. I

*Б. Ф. Иванов*

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,  
Высшая школа технологии и энергетики,  
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

**Для цитирования:** *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. I // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 70–78. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.108>

Пусть  $m \geq 2$ , числа  $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$  удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1$$

и функции  $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ . Установлено, что, если множество «резонансных точек» этих функций не пусто и выполнено так называемое «резонансное условие», то всегда можно указать такие сколь угодно малые в смысле нормы возмущения  $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ , при которых множество резонансных точек функции  $\gamma_k + \Delta\gamma_k$  совпадает с множеством резонансных точек функции  $\gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , но при этом

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Понятия «резонансная точка» и «резонансное условие» для функций из пространств  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ,  $p \in (1, +\infty]$  были введены автором в его предыдущих работах.

*Ключевые слова:* неравенство Гёльдера.

**Введение.** Пусть  $m \geq 2$ , числа  $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$  и функции  $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ . Если выполняется

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

то согласно неравенству Гёльдера (см., например, [1, с. 232]) можем записать

$$\left| \int_{\mathbb{R}^1} \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leq \prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}. \quad (1)$$

Если же выполняется

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1, \quad (2)$$

то произведение функций, стоящих под знаком интеграла в левой части неравенства (1), является функцией локально интегрируемой, но сам интеграл при этом может

быть как ограничен, так и не ограничен. В докладе, сделанном автором на VIII Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и его приложения» [2], в терминах одного обобщения соответствующих понятий из классической теории резонанса были анонсированы условие ограниченности и одно условие неограниченности интеграла из левой части (1). Работа, посвященная условиям ограниченности, находится в печати. В настоящей статье рассматривается случай неограниченности.

Работа состоит из введения и трех параграфов. Первый параграф носит вспомогательный характер. Во втором — для любых пространств  $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ ,  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ,  $p_1, p \in (1, +\infty]$ , и любой функции  $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$  вводится понятие (определение 2.1) множества «резонансных точек функции  $\gamma$  относительно пространства  $L^p(\mathbb{R}^1)$ » (в дальнейшем, «резонансное множество»). Оно является подмножеством  $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$  и (пример 2.1) для каждого тригонометрического полинома относительно любого пространства  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ,  $p \in (1, +\infty]$ , представляет собой множество частот (показателей Фурье) или спектр этого полинома. В § 3 вводится понятие «резонансное условие» (определение 3.1), которое (замечание 3.1) в случае тригонометрических многочленов соответствует понятию резонансного условия из классической теории резонанса.

Основное утверждение работы, составляющее содержание теорем 3.1 и 3.2 из § 3, состоит в следующем. Если числа  $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$  удовлетворяют условию (2), функции  $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ , множества «резонансных точек» этих функций не пусты и выполнено «резонансное условие», то всегда можно указать такие сколь угодно малые в смысле нормы возмущения  $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ , при которых множество резонансных точек функции  $\gamma_k + \Delta\gamma_k$  совпадает с множеством резонансных точек функции  $\gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , но при этом выполняется равенство

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Настоящая статья содержит § 1, § 2 и представляет собой первую часть работы; вторая часть, содержащая § 3, подготовлена к печати.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

- $\tilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ ;
- $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$  — множество резонансных точек функции  $\gamma$  относительно пространства  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ;
- $\mathcal{R}_k$  — множество резонансных точек функции  $\gamma_k$ ;
- $0 \in \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k$  — резонансное соотношение (определение операции сложения множеств из  $\tilde{\mathbb{R}}^1$  приводится);
- $\frac{1}{s_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{p_j}, \quad \frac{1}{s_k} + \frac{1}{r_k} = 1, \quad 1 \leq k \leq m.$

**1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения.** Пусть функция  $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$ . Обозначим преобразование Фурье этой функции через  $\hat{u}$  и выберем его в виде

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} u(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Обратное преобразование Фурье функции  $v \in L^1(\mathbb{R}^1)$  будем обозначать через  $\tilde{v}$ . Оно имеет вид

$$\tilde{v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} v(y) dy.$$

Обозначим также через  $S(\mathbb{R}^1)$  пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через  $S'(\mathbb{R}^1)$  — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Следуя [3, с. 30–32], поставим в соответствие каждой комплекснозначной локально интегрируемой на прямой функции  $\gamma$  линейный непрерывный функционал, определяемый следующим образом:

$$(\gamma, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^1} \overline{\gamma(t)} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^1).$$

Если  $p \in [1, +\infty]$  и  $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$ , то, как известно (см., например, [4, с. 77]), функционал  $(\gamma, \varphi)$  принадлежит пространству  $S'(\mathbb{R}^1)$ .

Известно также [3, с. 213], что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции  $f$  называется линейный непрерывный функционал на  $S(\mathbb{R}^1)$ , обозначаемый в соответствии с (3) через  $\hat{f}$  и задаваемый (с учетом выбора определения для  $(f, \varphi)$  и вида записи преобразования Фурье) формулой  $(\hat{f}, \hat{\varphi}) = 2\pi(f, \varphi)$ .

В силу введенных выше обозначений известные формулы принимают вид

$$\begin{aligned} \{\delta(\tau)\}^\sim(y) &= 1(y), & \{1(\tau)\}^\sim(y) &= 2\pi\delta(y), & \{e^{i\lambda\tau}\}^\sim(y) &= 2\pi\delta(y - \lambda), \\ \{\gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau)\}^\sim(y) &= \hat{\gamma}_1(y)\hat{\gamma}_2(y), & \{\hat{\gamma}_1(y)\hat{\gamma}_2(y)\}^\sim(\tau) &= \gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta$  — дельта-функция,  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  и  $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^1)$ .

Введем еще одно обозначение. Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^1$ ,  $a < b$  и число  $\rho > 0$  столь мало, что  $a + \rho < b - \rho$ . Обозначим через  $\Omega(\tau, [a, b], \rho)$  такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\hat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = \frac{1}{\rho^2} \xi_{[a, b]}(y) * \xi_{[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]}(y) * \xi_{[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]}(y),$$

где  $\xi_M(y)$  — характеристическая функция множества  $M \subseteq \mathbb{R}^1$ .

Нетрудно проверить, что выполняются соотношения

$$0 \leq \hat{\Omega}(y, [a, b], \rho) \leq 1, \quad (5)$$

$$\hat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = 0, \quad y \notin (a - \rho, b + \rho), \quad (6)$$

$$\hat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = 1, \quad y \in [a + \rho, b - \rho], \quad (7)$$

$$\left| \frac{d}{dy} \hat{\Omega}(y, [a, b], \rho) \right| \leq \frac{2}{\rho}, \quad \left| \frac{d^2}{dy^2} \hat{\Omega}(y, [a, b], \rho) \right| \leq \frac{1}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$\Omega(\tau, [a, b], \rho) \in L^p(\mathbb{R}^1), \quad p \in [1, +\infty]. \quad (9)$$

**2. Резонансные точки.** В этом параграфе для функций из пространств  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ,  $p > 1$ , вводится понятие множества резонансных точек, являющееся (пример 2.1) естественным аналогом понятия множества частот (показателей Фурье) тригонометрического многочлена. Доказаны две леммы о свойствах множеств резонансных точек, а также рассмотрен ряд примеров, которые будут использованы в § 3.

Положим  $\tilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$  и будем считать окрестностью точки  $\infty$  всякое множество вида  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ , где  $a, b \in \mathbb{R}^1, a \leq b$ .

Пусть числа  $p_1, p \in (1, +\infty]$ .

**Определение 2.1.** Точка  $u \in \tilde{\mathbb{R}}^1$  называется *нерезонансной точкой* функции  $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$  относительно пространства  $L^p(\mathbb{R}^1)$ , если существует такая функция  $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , для которой  $\hat{\gamma}(y) = \hat{\alpha}_u(y)$  в какой-либо окрестности точки  $u$ . Остальные точки множества  $\tilde{\mathbb{R}}^1$  называются *резонансными точками* функции  $\gamma$  относительно пространства  $L^p(\mathbb{R}^1)$  и их множество обозначается  $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ .

Отметим, что равенство  $\hat{\gamma}(y) = \hat{\alpha}_u(y)$  в определении 2.1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 2.1, очевидно, следует, что  $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$  — замкнутое множество и, если  $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \emptyset$ .

Определим на  $\tilde{\mathbb{R}}^1$  операцию сложения следующим образом. Суммой элементов  $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{\mathbb{R}}^1$  будем называть элемент из  $\tilde{\mathbb{R}}^1$ , обозначаемый  $\omega_1 + \omega_2$  и определяемый для конечных элементов как обычно, а в остальных случаях по правилам:

- 1) выражение  $\infty + \infty$  не определено;
- 2)  $\omega + \infty = \infty, \omega \in \mathbb{R}^1$ .

Введенную так операцию будем предполагать коммутативной и ассоциативной, сумму более чем трех слагаемых определять индуктивно и при этом выражение, содержащее более одного символа  $\infty$ , считать не имеющим смысла.

Для  $A, B, \dots, C \subseteq \tilde{\mathbb{R}}^1$  положим

$$A + B + \dots + C = \{x \mid x = a + b + \dots + c, a \in A, b \in B, \dots, c \in C\}.$$

Сумма множеств считается определенной, если определены соответствующие суммы элементов этих множеств.

Отметим некоторые свойства множества резонансных точек.

**Лемма 2.1.** Пусть числа  $p_1, p \in (1, +\infty]$  и функция  $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ , тогда:

- 1) для любого  $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ ,

$$\mathcal{R}\{c\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}; \quad (10)$$

- 2) для любых функций  $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$  выполняется включение

$$\mathcal{R}\{\gamma_1 + \gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\}; \quad (11)$$

- 3) если  $\omega \in \mathbb{R}^1$ , то

$$\mathcal{R}\{e^{i\omega\tau}\gamma(\tau), L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{\omega\} + \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \quad (12)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое и третье утверждения достаточно очевидны. Проверим второе.

Пусть точка  $\omega_0 \in \tilde{\mathbb{R}}^1, \omega_0 \notin \mathcal{R}\{\gamma_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}, \omega_0 \notin \mathcal{R}\{\gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ . Тогда можно указать такую функцию  $\alpha_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$ , что  $\hat{\alpha}_1(y) = \hat{\gamma}_1(y)$  в некоторой окрестности точки  $\omega_0$  и функцию  $\alpha_2 \in L^q(\mathbb{R}^1), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , преобразование Фурье которой  $\hat{\alpha}_2(y)$  совпадает с  $\hat{\gamma}_2(y)$  в некоторой окрестности точки  $\omega_0$ . Но тогда  $\hat{\alpha}_1(y) + \hat{\alpha}_2(y) = \hat{\gamma}_1(y) + \hat{\gamma}_2(y)$  в некоторой окрестности точки  $\omega_0$ , то есть  $\omega_0 \notin \mathcal{R}\{\gamma_1(\tau) + \gamma_2(\tau), L^p(\mathbb{R}^1)\}$ . Следовательно, (11) выполняется.

**Лемма 2.2.** Пусть числа  $p_1, p \in (1, +\infty]$ , функция  $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$  и точка  $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ . Тогда, если существует  $V_u$  окрестность точки  $u$ , в которой

$$\widehat{\gamma}, \frac{d\widehat{\gamma}}{dy}, \frac{d^2\widehat{\gamma}}{dy^2} \in L^1(V_u), \quad (13)$$

то  $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $V_u$  — окрестность точки  $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ , в которой выполняется (13). Рассмотрим два случая.

1. Точка  $u \in \mathbb{R}^1$ . Тогда можно указать такое  $\rho > 0$ , что  $(u - 3\rho, u + 3\rho) \subset V_u$ . Обозначим (см. § 1)  $\alpha_u(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)$ , откуда получим  $\widehat{\alpha}_u(y) = \widehat{\gamma}(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)$ . Согласно (7) и (6) имеем  $\widehat{\alpha}_u(y) = \widehat{\gamma}(y)$ , если  $y \in (u - \rho, u + \rho)$ , и  $\text{supp } \widehat{\alpha}_u(y) \subseteq \text{supp } \widehat{\gamma}(y) \cap [u - 3\rho, u + 3\rho] \subset V_u$ . Так как в силу (8) функция  $\widehat{\Omega}(y, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)$  имеет ограниченные производные и согласно (5) ограничена, то из равенства

$$\alpha_u(\tau) = \{\widehat{\alpha}_u(y)\}^{\sim}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}(y) \widehat{\Omega}(y, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho) dy,$$

используя (13), в результате двукратного интегрирования по частям получаем, что  $\alpha_u(\tau) = O(1)/\tau^2$ . Кроме того, функция  $\alpha_u$  ограничена, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции. Следовательно,  $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$  при любом  $q \in [1, +\infty]$ . Но тогда  $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ .

2. Точка  $u = \infty$ . В этом случае можно указать такие  $a, b \in \mathbb{R}^1$ ,  $a \leq b$ , что в области  $V_\infty = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  будет выполняться (13). Обозначим  $\Omega_1(\tau) = \Omega(\tau, [a - 2, b + 2], 1)$  и  $\alpha_\infty(\tau) = \gamma(\tau) * [\delta(\tau) - \Omega_1(\tau)]$ , где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция. В силу (4) будем иметь  $\widehat{\alpha}_\infty(y) = \widehat{\gamma}(y) - \widehat{\gamma}(y) \widehat{\Omega}_1(y)$  и согласно (7) можем записать  $\text{supp } \widehat{\alpha}_\infty(y) \subseteq (-\infty, a - 1] \cap [b + 1, +\infty) \subset V_u$ . Следовательно, с учетом (13), (5)–(8) в результате двукратного интегрирования по частям получаем равенство

$$\begin{aligned} \alpha_\infty(\tau) &= \{\widehat{\alpha}_\infty(y)\}^{\sim}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}(y) [1 - \widehat{\Omega}_1(y)] dy = \\ &= -\frac{1}{2\pi\tau^2} \int_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \left\{ \widehat{\gamma}''(y) [1 - \widehat{\Omega}_1(y)] - 2\widehat{\gamma}'(y) \widehat{\Omega}_1'(y) - \widehat{\gamma}(y) \widehat{\Omega}_1''(y) \right\} dy = \frac{O(1)}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, функция  $\alpha_\infty(\tau)$  ограничена, так как в силу (13) выполняется неравенство

$$|\alpha_\infty(\tau)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{V_\infty} |\widehat{\gamma}(y)| dy < +\infty.$$

Таким образом,  $\alpha_\infty(\tau) \in L^q(\mathbb{R}^1)$  при любом  $q \in [1, +\infty]$ , то есть точка  $u = \infty$  является нерезонансной.  $\square$

Следующий пример показывает, что координаты резонансных точек тригонометрических многочленов относительно любых пространств  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ,  $p > 1$ , являются частотами (или показателями Фурье) этих многочленов.

**Пример 2.1.** Пусть  $\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k \tau}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^1$ . Тогда согласно (4) можем записать  $\widehat{\gamma}(y) = 2\pi \sum_{k=1}^n c_n \delta(y - \lambda_k)$ , откуда в силу

(10), (11) и леммы 2.2 следует, что для любого  $p \in (1, +\infty]$  справедливо равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \bigcup_{k=1}^n \{\lambda_k\}.$$

**Пример 2.2.** Пусть числа  $p, s \in (1, +\infty]$ ,  $\delta > 0$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$  и имеется функция

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{0\}. \quad (14)$$

Проверим это. Чтобы найти резонансное множество функции  $\gamma$ , найдем  $\hat{\gamma}$ . Выберем произвольное конечное  $y \neq 0$ . В результате двукратного интегрирования по частям получаем

$$\hat{\gamma}(y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}} = \frac{K_1}{y^2} + \frac{K_2}{y^3} \int_0^{\infty} \frac{\sin y\tau d\tau}{(1 + \tau)^{3 + \frac{1}{p} + \delta}}, \quad (15)$$

где  $K_1, K_2$  — некоторые константы. Таким образом, в окрестности каждой конечной ненулевой точки функция  $\hat{\gamma}(y)$  дважды непрерывно дифференцируема и, следовательно, по лемме 2.2 каждая конечная ненулевая точка является нерезонансной. Также по лемме 2.2 в силу выполнения (13) нерезонансной является и бесконечная точка.

Покажем, что  $\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{0\}$ . Если точка  $y = 0$  нерезонансная, то существует  $V_0$  — окрестность этой точки и функция  $\alpha_0 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ , для которой  $\hat{\gamma}(y) = \hat{\alpha}_0(y)$ ,  $y \in V_0$ . Выберем столь малое число  $\rho > 0$ , что  $[-3\rho, +3\rho] \subset V_0$ , и обозначим  $\Omega_0(\tau) = \Omega(\tau, [-2\rho, +2\rho], \rho)$ ,  $\gamma_0(\tau) = \alpha_0(\tau) * \Omega_0(\tau)$ . В силу определения функции  $\alpha_0(\tau)$ , числа  $\rho > 0$  и свойств (6), (7) можем записать  $\hat{\gamma}_0(y) = \hat{\alpha}_0(y)\hat{\Omega}_0(y) = \hat{\gamma}(y)\hat{\Omega}_0(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^1$ ,  $\hat{\gamma}_0(y) = \hat{\gamma}(y)$ ,  $y \in [-\rho, +\rho]$ . Кроме того, так как согласно (9)  $\Omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^1)$ , то в силу неравенства Юнга (см., например, [5, с. 42])  $\gamma_0 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ .

Обозначим  $\gamma_1(\tau) = \gamma(\tau) * [\delta(\tau) - \Omega_0(\tau)]$ , где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция. Как видно из (15), функции

$$\hat{\gamma}, \frac{d\hat{\gamma}}{dy}, \frac{d^2\hat{\gamma}}{dy^2} \in L^1(\mathbb{R}^1 \setminus [-\rho, +\rho]).$$

Поэтому в результате двукратного интегрирования по частям с учетом (15), (5)–(8) получаем равенство

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \hat{\gamma}_1(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-\rho, +\rho]} e^{iy\tau} \hat{\gamma}(y) [1 - \hat{\Omega}_0(y)] dy = \\ &= -\frac{1}{2\pi\tau^2} \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-\rho, +\rho]} e^{iy\tau} \left\{ \hat{\gamma}''(y) [1 - \hat{\Omega}_0(y)] - 2\hat{\gamma}'(y)\hat{\Omega}'_0(y) - \hat{\gamma}(y)\hat{\Omega}''_0(y) \right\} dy = \frac{O(1)}{\tau^2}. \end{aligned}$$

А так как функция  $\gamma_1$  вдобавок ограничена, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции, то  $\gamma_1 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ . Следовательно,  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ .

Но  $\gamma \notin L^r(\mathbb{R}^1)$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ , так как из неравенства  $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$  следует  $r(\frac{1}{p} + \delta) < 1$ , то есть  $\|\gamma\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} = \infty$ . Таким образом,  $\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{0\}$ .

**Пример 2.3.** Пусть числа  $p, s \in (1, +\infty]$ ,  $\delta > 0$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\lambda\tau}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\lambda\}.$$

Действительно, в силу (12), (14) и правила сложения в  $\widetilde{\mathbb{R}}^1$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} &= \mathcal{R}\left\{e^{i\lambda\tau} \frac{1}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\right\} = \\ &= \{\lambda\} + \mathcal{R}\left\{\frac{1}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\right\} = \{\lambda\} + \{0\} = \{\lambda\}. \end{aligned}$$

**Пример 2.4.** Пусть числа  $p, s \in (1, +\infty]$  и  $\delta > 0$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$ ;  $\mu \neq 0$  и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}. \quad (16)$$

Проверим это. Прежде всего отметим, что функция  $\widehat{\gamma}$  дважды непрерывно дифференцируема. Действительно, можем записать

$$\widehat{\gamma}(y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} \frac{e^{i\mu\tau^2} d\tau}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}} = 2 \int_0^\infty \frac{\cos y\tau e^{i\mu\tau^2} d\tau}{(1 + \tau)^{\frac{1}{p} + \delta}} = 2[f_1(y) + f_2(y) + f_3(y)],$$

где

$$f_1(y) = \int_0^2 \frac{\cos y\tau e^{i\mu\tau^2} d\tau}{(1 + \tau)^{\frac{1}{p} + \delta}},$$

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_2^\infty \cos y\tau \left[ \frac{1}{\tau^{\frac{1}{p} + \delta}} - \left(\frac{1}{p} + \delta\right) \frac{1}{\tau^{\frac{1}{p} + \delta + 1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{p} + \delta\right) \left(\frac{1}{p} + \delta + 1\right) \frac{1}{\tau^{\frac{1}{p} + \delta + 2}} \right] e^{i\mu\tau^2} d\tau, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(y) &= \int_2^\infty \cos y\tau \left[ \sum_{k=3}^\infty (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{p} + \delta\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{p} + \delta + 1\right) \dots \left(\frac{1}{p} + \delta + k - 1\right) \frac{1}{\tau^{\frac{1}{p} + \delta + k}} \right] e^{i\mu\tau^2} d\tau. \end{aligned}$$

Функции  $f_1$  и  $f_3$ , очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим функцию  $f_2$ . Трижды проинтегрируем по частям интеграл, стоящий в правой части равенства (17), используя всякий раз замену

$$e^{i\mu\tau^2} d\tau = \frac{1}{2i\mu\tau} d e^{i\mu\tau^2}.$$

Тогда полученное выражение окажется функцией дважды непрерывно дифференцируемой по переменной  $y$  и по лемме 2.2 все конечные точки будут для функции  $\gamma$  нерезонансными, т. е.  $\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \{\infty\}$ .

Покажем, что точка  $\infty$  является резонансной. Допустим, что  $\{\infty\} \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\}$ . Тогда согласно определению 2.1 можно указать такие числа  $a, b \in \mathbb{R}^1$ ,  $a \leq b$ , и функцию  $\alpha_\infty \in L^r(\mathbb{R}^1)$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ , что будет выполняться равенство  $\hat{\gamma}(y) = \hat{\alpha}_\infty(y)$ ,  $y \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ . Обозначим  $\Omega_1(\tau) = \Omega(\tau, [a - 2, b + 2], 1)$ ,  $\gamma_1(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega_1(\tau)$  и  $\gamma_2(\tau) = \gamma(\tau) * [\delta(\tau) - \Omega_1(\tau)]$ , где  $\delta$  — дельта-функция. Так как  $\hat{\gamma}$  дважды непрерывно дифференцируема и  $\hat{\gamma}_1(y) = \hat{\gamma}(y) \cdot \hat{\Omega}_1(y)$ , где в силу (6)  $\text{supp } \hat{\Omega}_1(y) = [a - 3, b + 3]$ , то в результате двукратного интегрирования по частям с учетом (5), (6) и (8) получаем

$$\gamma_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \hat{\gamma}_1(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{a-3}^{b+3} e^{iy\tau} \hat{\gamma}(y) \hat{\Omega}_1(y) dy = \frac{O(1)}{\tau^2}.$$

Кроме того, функция  $\gamma_1(\tau)$  ограничена, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции, откуда  $\gamma_1 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ .

Рассмотрим функцию  $\gamma_2$ . Согласно свойству (7) можем записать  $1 - \hat{\Omega}_1(y) = 0$ , если  $y \in [a - 1, b + 1]$ , поэтому  $\hat{\gamma}_2(y) = \hat{\gamma}(y) [1 - \hat{\Omega}_1(y)] = \hat{\alpha}_\infty(y) [1 - \hat{\Omega}_1(y)]$ . Так как в силу (9)  $\Omega_1 \in L^1(\mathbb{R}^1)$ , получаем  $\gamma_2(\tau) = \alpha_\infty(\tau) - \alpha_\infty(\tau) * \Omega_1(\tau) \in L^r(\mathbb{R}^1)$ .

Следовательно,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ . Но по условию имеем  $\frac{1}{p} + \delta < 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{r}$ , откуда  $r(\frac{1}{p} + \delta) < 1$ , т. е.  $\gamma \notin L^r(\mathbb{R}^1)$ . Полученное противоречие показывает, что  $\infty$  — это резонансная точка.

**Пример 2.5.** Пусть числа  $p, s \in (1, +\infty]$  и  $\delta > 0$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mu \neq 0$  и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\lambda\tau} e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда выполняется

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}.$$

Действительно, в силу (12), (16) и правила сложения в  $\tilde{\mathbb{R}}^1$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\gamma(\tau), L^s(\mathbb{R}^1)\} &= \mathcal{R}\left\{e^{i\lambda\tau} \frac{e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\right\} = \\ &= \{\lambda\} + \mathcal{R}\left\{\frac{e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\right\} = \{\lambda\} + \{\infty\} = \{\infty\}. \end{aligned}$$



## Литература

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
2. Ivanov B. F. On the Hölder Inequality // Комплексный анализ и его приложения: материалы VIII Петрозаводской международной конференции (3–9 июля 2016). Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2016. С. 31–35.
3. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: ФМ, 1959.
4. Функциональный анализ. Серия: Справочная математическая библиотека / под ред. С. Г. Крейна; М.: Наука, 1972.
5. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Статья поступила в редакцию 25 мая 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Иванов Борис Филиппович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ivanov-bf@yandex.ru

## On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. I

B. F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,  
Higher School of Technology and Energy, ul. Ivana Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095, Russian Federation

**For citation:** Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. I. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 70–78. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.108>

Let  $m \geq 2$ , numbers  $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$  satisfy inequality

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1,$$

and functions  $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ . We prove that if the set of “resonance points” of each of these functions is not empty and so-called “resonance condition” holds as well then there are such arbitrary small (low norm) perturbations  $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$  that the resonance set of function  $\gamma_k + \Delta\gamma_k$  coincides with the resonance set of function  $\gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  but

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Concepts of “resonance point” and “resonance condition” for functions from the spaces  $L^p(\mathbb{R}^1)$ ,  $p \in (1, +\infty]$  were introduced by the author in his earlier papers.

*Keywords:* the Hölder inequality.

## References

1. Bourbaki N., *Integration. Measures, integration of measures* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
2. Ivanov B. F., “On the Hölder Inequality”, *Complex analysis and applications. Materials of the VIII Petrozavodsk International Conference (3–9 June 2016)*, 31–35 (Petrozavodsk Univ. Press, Petrozavodsk, 2016) [in Russian].
3. Gelfand I. M., Shilov G. E., *The generalized functions and operations over them, the issue 1* (PhM, Moscow, 1959) [in Russian].
4. *Functional analysis*. In Ser. *The reference mathematical library* (ed. by S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].
5. Steyn I., Weiss G., *Introduction to the harmonic analysis on Euclidean spaces* (Mir, Moscow, 1974) [in Russian].

Author’s information:

Ivanov Boris F. — ivanov-bf@yandex.ru