УДК 531.36 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 34D23

Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки

Б. И. Коносевич, Ю. Б. Коносевич

Институт прикладной математики и механики,
Украина, 83114, Донецк, ул. Р. Люксембург, 74

Для цитирования: *Коносевич Б. И., Коносевич Ю. Б.* Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 79–90. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.109

Изучается модель синхронного электромотора, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей уравнения для токов в обмотках ротора. Момент нагрузки предполагается нелинейной функцией угловой скорости ротора, допускающей линейную оценку. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет счетное число стационарных решений, соответствующих рабочему режиму равномерного вращения ротора с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре. Получено эффективное достаточное условие, при котором любое движение ротора синхронного электромотора с течением времени стремится к равномерному вращению.

Ключевые слова: синхронный электромотор, глобальная устойчивость, метод сведения, принцип инвариантности Ла-Салля.

Введение. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) называют *фазовой*, если при записи в нормальном виде ее правая часть периодична по некоторым компонентам фазового вектора (по угловым переменным) [1]. Если автономная фазовая система ОДУ имеет хотя бы одно стационарное решение, то она имеет по крайней мере счетное множество стационарных решений. Они получаются из исходного сдвигами на периоды по угловым переменным. Важной научной и практической задачей является установление условий, при которых любое решение фазовой системы ОДУ стремится с течением времени к одному из стационарных решений, то есть система является *системой градиентного типа* [2]. Если система градиентного типа имеет только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение (с точностью до сдвигов на периоды), то ее называют *глобально устойчивой* [2].

В [1, 3] предложен метод сведения, позволяющий вывести свойство глобальной устойчивости многомерной фазовой системы ОДУ из свойства глобальной устойчивости одного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Условием глобальной устойчивости этого уравнения является неравенство, установленное Ф. Трикоми [4]. Получаемые таким путем критерии глобальной устойчивости обычно содержат неопределенные параметры и требуют проверки выполнения частотных неравенств.

В [2] представлена двухтоковая модель синхронного электромотора. В [5] предложена математическая модель синхронного электромотора, включающая любое число токов в демпферной обмотке, отмечена глобальная устойчивость этой модели при отсутствии нагрузки. Для случая, когда момент нагрузки является линейной функцией угловой скорости ротора, достаточное условие глобальной устойчивости такой модели найдено в [6].

В настоящей работе этот результат обобщен на случай, когда момент нагрузки является нелинейной функцией угловой скорости ротора, которая удовлетворяет линейной оценке. Условие глобальной устойчивости синхронного электромотора сведено к легко проверяемому неравенству Трикоми для одного дифференциального уравнения второго порядка, которое не содержит неопределенных параметров.

1. Математическая модель синхронного электромотора. Динамика синхронного электромотора описывается в [5] системой дифференциальных уравнений с фазовым вектором $(\theta, \dot{\theta}, i_0, i_1, \ldots, i_{n_2})$. Здесь i_0 — ток в обмотке возбуждения, i_n $(n = 1, 2, \ldots, n_2)$ — токи в стержнях демпферной обмотки, θ — угол между радиус-вектором к стержню с током i_{n_2} и вектором напряженности вращающегося магнитного поля статора, $\dot{\theta}$ — производная угла θ по времени t. В эти уравнения входят момент нагрузки M и следующие постоянные параметры: u — постоянное напряжение на обмотке возбуждения, R_1 и L_1 — активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения, R_2 и L_2 — активное и индуктивное сопротивления стержней демпферной обмотки, B — напряженность магнитного поля, n_1 — число витков в обмотке возбуждения, n_2 — число стержней в демпферной обмотке, S_1 — площадь витка обмотки возбуждения, S_2 — площадь диаметрального сечения демпферной обмотки, m — коэффициент сильного регулирования $(m \geq 0)$, J — осевой момент инерции ротора вместе с присоединенными к нему вращающимися частями.

В уравнении, определяющем $\ddot{\theta}$, откорректируем знак перед $m\dot{\theta}$ и коэффициент при $i_0 \sin(\theta + \pi/4)$, домножив его на 4. Знаки величин u, i_0, i_n $(n = 1, 2, \ldots, n_2)$ изменим на противоположные. Далее предполагается, что $u > 0$. Введем вместо тока i_0 переменную x по формуле $i_0 = x + u/R_1$, вместо угла θ будем пользоваться углом $\gamma = \theta + \pi/4$. Обозначая через φ угол поворота ротора относительно статора, имеем $\varphi = \gamma + \omega t + \text{const}$. Здесь $\omega > 0$ — постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре.

Момент нагрузки M предполагается в [2, 5] постоянной отрицательной величиной, в [6] рассматривается случай линейного диссипативного момента $M = -k\dot{\varphi}$, $k > 0$ — постоянная. В настоящей работе предполагается, что момент нагрузки является нечетной непрерывно дифференцируемой монотонно убывающей нелинейной функцией $M = M(\dot{\varphi})$ угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} \neq 0$ знак этой функции противоположен знаку ее аргумента.

Поскольку $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$, момент $M(\dot{\varphi})$ представляется в виде

$$M(\dot{\varphi}) = M(\omega + \dot{\gamma}) = -c_0 + \Delta M(\dot{\gamma}), \tag{1}$$

где

$$\Delta M(\dot{\gamma}) = M(\omega + \dot{\gamma}) - M(\omega), \qquad c_0 = -M(\omega) \quad (c_0 > 0). \tag{2}$$

Функция $\Delta M(\dot{\gamma})$ является монотонно убывающей вместе с $M(\dot{\varphi})$, и поэтому при $\dot{\gamma} \neq 0$ знак $\Delta M(\dot{\gamma})$ противоположен знаку $\dot{\gamma}$. Таким образом, имеем

$$\dot{\gamma} \Delta M(\dot{\gamma}) < 0 \ \ (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M(0) = 0. \tag{3}$$

Предположим, что существует постоянная $k > 0$ такая, что

$$\Delta M(\dot\gamma) \le -k\dot\gamma \;\; (\dot\gamma \ge 0), \quad \Delta M(\dot\gamma) \ge -k\dot\gamma \;\; (\dot\gamma \le 0). \tag{4}$$

Два неравенства (4) эквивалентны одному неравенству $\dot\gamma[\Delta M(\dot\gamma) + k\dot\gamma] \le 0$. Отсюда следует, что при любом $\dot\gamma$ выполняется неравенство

$$\dot\gamma \Delta M(\dot\gamma) \le -k\dot\gamma^2, \tag{5}$$

т. е. график функции $\dot\gamma\Delta M(\dot\gamma)$ лежит под параболой $-k\dot\gamma^2$. Для дальнейшего анализа необходимо, чтобы выполнялось условие $m + k > 0$. Поэтому при $m > 0$ можно отказаться от требования $k > 0$ и взять $k = 0$.

В результате при моменте нагрузки вида (1) имеем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую работу синхронного электромотора:

$$\begin{aligned}
&J\ddot\gamma = -m\dot\gamma + \Delta M(\dot\gamma) - a_1 x \sin\gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - b_0 \sin\gamma - c_0,\\
&L_1 \dot x = -R_1 x + a_1 \dot\gamma \sin\gamma,\\
&L_2 \dot{i_n} = -R_2 i_n + a_2 \dot\gamma \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, n_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$a_1 = 4n_1 S_1 B\sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} S_2 B, \quad b_0 = \frac{4}{R_1} u n_1 S_1 B\sqrt{2}, \quad c_0 = -M(\omega) \tag{7}$$

— положительные постоянные, $\dot{i_n}$ — производные токов i_n по времени.

2. Локальная устойчивость стационарных решений и план получения условий глобальной устойчивости. Нормальным режимом работы синхронного электромотора является равномерное вращение его ротора относительно статора с постоянной угловой скоростью $\dot\varphi = \omega$, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре. Этот режим соответствует стационарному решению системы (6):

$$\gamma = \gamma^0, \quad \dot\gamma = 0, \quad x = x^0, \quad i_n = i_n^0 \quad (n = 1, 2, \ldots, n_2), \tag{8}$$

где γ^0, x^0, i_n^0 — постоянные. Так как выполняется $\Delta M(0) = 0$, после подстановки выражений (8) в уравнения (6) находим

$$x^0 = 0, \quad i_n^0 = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, n_2),$$

а для γ^0 получаем уравнение

$$b_0 \sin\gamma + c_0 = 0. \tag{9}$$

Опуская особый случай, когда $c_0/b_0 = 1$, будем далее предполагать, что

$$c_0/b_0 < 1. \tag{10}$$

Тогда система (6) имеет два счетных набора стационарных решений:

$$(\gamma, \dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = (d_s, 0, 0, 0, \ldots, 0), \quad s = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{11}$$

$$(\gamma, \dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = (e_s, 0, 0, 0, \ldots, 0), \quad s = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{12}$$

где стационарные значения d_s, e_s угла γ определены формулами

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \qquad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{13}$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \tag{14}$$

Рассмотрим следующие функции фазовых переменных системы (6):

$$\begin{gathered}
W(\dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = \frac{1}{2}J\dot\gamma^2 + \frac{1}{2}L_1 x^2 + \frac{1}{2}L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2, \\
U(\gamma) = \int\limits_0^\gamma (b_0 \sin\alpha + c_0)\, d\alpha = b_0(1 - \cos\gamma) + c_0\gamma, \\
V(\gamma, \dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = W(\dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) + U(\gamma).
\end{gathered} \tag{15}$$

Производная функции W по времени в силу системы уравнений (6) определяется равенством

$$\dot W(\gamma, \dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = -m\dot\gamma^2 + \dot\gamma \Delta M(\dot\gamma) - R_1 x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 - \dot\gamma(b_0 \sin\gamma + c_0). \tag{16}$$

Воспользовавшись определениями (15) функций U, V, получаем

$$\dot V(\dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = -m\dot\gamma^2 + \dot\gamma \Delta M(\dot\gamma) - R_1 x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \tag{17}$$

Согласно определению (15), функция W является определенно положительной по отношению к переменным $\dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}$. Ее можно интерпретировать как кинетическую энергию рассматриваемой системы, а функцию U — как ее потенциальную энергию. Тогда функция V является полной энергией системы, а формула (17) выражает теорему об изменении энергии.

Как отмечено выше, при условии (10) на каждом промежутке $[-\pi + 2\pi s, \pi + 2\pi s]$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) существуют два значения d_s, e_s угла γ, которым соответствуют два стационарных решения (11), (12) системы (6).

Теорема 1. *Стационарные решения* (11) *системы* (6) *асимптотически устойчивы, а стационарные решения* (12) *неустойчивы.*

Доказательство. Из определения (15) функции $U(\gamma)$ следует, что при условии (10) значения d_s и e_s являются, соответственно, точками локальных минимумов и локальных максимумов этой функции. Поэтому каждая из функций $V_{1s} = V - U(d_s)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) определенно положительна по отношению к возмущениям $\gamma - d_s, \dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}$ для стационарного решения (11), а каждая из функций $V_{2s} = V - U(e_s)$ принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарного решения (12).

Производные $\dot V_{1s}, \dot V_{2s}$ этих функций по t в силу уравнений (6) совпадают с производной (17) функции V и поэтому неположительны. Эти производные обращаются в нуль только при $\dot\gamma = 0, x = 0, i_1 = \ldots = i_{n_2} = 0$, то есть только в стационарных точках (11), (12). Поскольку стационарные точки изолированы, то в некоторой окрестности каждой из двух стационарных точек (11), (12) с данным номером s не существует других решений системы (6), для которых $\dot V_{1s} = 0$ или $\dot V_{2s}$.

Поэтому, согласно приведенным в [7] теоремам 5.2 и 6.3 (теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского), стационарные решения (11) системы (6) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (12) неустойчивы. Теорема 1 доказана. □

Для получения условий глобальной устойчивости системы (6) воспользуемся принципом инвариантности Ла-Салля в формулировке теоремы VIII из книги [8].

В этой теореме предполагается существование неотрицательной функции Ляпунова V, имеющей знакопостоянную отрицательную производную по t в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, и доказывается, что любое ограниченное при $t \geq 0$ решение системы с течением времени неограниченно приближается к множеству $\mathcal{M}$ точек фазового пространства, состоящему из фазовых траекторий тех решений, определенных при $t \geq 0$, для которых $\dot{V} = 0$. Доказательство указанной теоремы справедливо и в том случае, когда вместо неотрицательности функции V во всем фазовом пространстве предполагается, что данная функция ограничена снизу на решениях рассматриваемой системы.

В качестве функции Ляпунова в этой теореме возьмем функцию V, определенную в (15) и имеющую знакопостоянную отрицательную производную (17) в силу системы (6). Функция V не является ограниченной снизу во всем фазовом пространстве, так как в ее определение входит функция U, которая, согласно (15), содержит линейный по γ член $c_0\gamma$. Для применимости теоремы Ла-Салля с такой функцией V достаточно, чтобы угол γ был ограничен снизу на решениях системы. Поэтому для получения условий глобальной устойчивости системы (6) достаточно найти условия ограниченности угла γ, установить ограниченность остальных фазовых переменных и доказать, что притягивающее множество $\mathcal{M}$ состоит только из стационарных точек.

3. Условия ограниченности угла $\boldsymbol{\gamma}$. Чтобы получить достаточные условия ограниченности угла γ, воспользуемся подходом [1, 3], который позволяет вывести свойство ограниченности угловой переменной для многомерной системы из свойства ограниченности такой переменной для эталонного дифференциального уравнения второго порядка. Далее будут использоваться эталонные уравнения вида

$$J\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin\gamma - c_0, \tag{18}$$

где постоянные $b_0, c_0 > 0$ определены формулами (7), а постоянная $a_0 > 0$ выбирается специальным образом.

Уравнение вида (18) с положительными коэффициентами a_0, b_0, c_0 детально изучено [3, 4, 9]. Приведем основные результаты этого исследования.

Стационарные решения $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$, $\gamma^0 = \text{const}$, уравнения (18) определяются тригонометрическим уравнением (9). Поэтому в предположении (10) уравнение (18) имеет два счетных набора стационарных решений, которые определяются указанными в (13), (14) значениями d_s, e_s постоянной γ^0.

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно установить, что стационарные точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_s, 0)$ являются для уравнения (18) асимптотически устойчивыми особыми точками типа «фокус» или «узел», а точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0)$ — неустойчивые особые точки типа «седло».

Глобальный анализ уравнения вида (18) дал Ф. Трикоми [4]. Введя параметры

$$a = a_0/\sqrt{b_0 J}, \quad c = c_0/b_0, \tag{19}$$

он установил, что существует критическое значение параметра a, которое является функцией $a_{\text{cr}}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ и обладает следующими свойствами [2, 9]. В случае $a > a_{\text{cr}}$ каждое решение уравнения (18) стремится к одной из его стационарных точек при $t \to +\infty$. При $a \le a_{\rm cr}$ кроме решений, стремящихся к стационарным, существуют решения, вдоль которых угол γ неограниченно убывает с течением времени. Неравенство $a > a_{\rm cr}$ будем называть *неравенством Трикоми.*

Для функции $a_{\rm cr}(c)$ не существует явного выражения, но разными авторами найдены ее аналитические оценки сверху и снизу (см. [9, с. 122–123]). При получении этих оценок вместо угла γ используют угол $\theta = -\gamma$. Тогда указанному в (14) главному стационарному значению $\gamma^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$ угла γ соответствует значение $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ угла θ. Так как $\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin\theta_0$, и величина $a_{\rm cr}(c)$ переходит в функцию $a_{\rm cr}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. В [10] при помощи компьютера построен график функции $a_{\rm cr} = a_{\rm cr}(\theta_0)$ и показано, что линейная и синусоидальная аппроксимации $a_{\rm cr\,L}(\theta_0) = 0.76 \cdot \theta_0$ и $a_{\rm cr\,S}(\theta_0) = 2.76622 \cdot \sin(0.283886 \cdot \theta_0)$ обеспечивают вычисление $a_{\rm cr}(\theta_0)$ с абсолютной погрешностью не больше, чем $1.5{\cdot}10^{-2}$ и $3.4{\cdot}10^{-5}$ соответственно.

Достаточные условия ограниченности угла γ дает следующая теорема, доказательство которой следует доказательству теоремы 4.4.1 из [1].

Теорема 2. *Если существуют значения постоянных параметров λ, $\varepsilon \ge 0$ такие, что*

1) *любое решение дифференциального уравнения*

$$J\ddot{\gamma} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} + b_0 \sin\gamma + c_0 = 0, \tag{20}$$

где b_0, c_0 определены в (7), *ограничено при $t \ge 0$,*

2) *при всех значениях фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ выполнено неравенство*

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + 2\lambda W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \varepsilon J^{-1}\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}(b_0 \sin\gamma + c_0) \le 0, \tag{21}$$

где функция W определена в (15), *то в любом решении*

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t), x(t), i_1(t), \dots, i_{n_2}(t) \tag{22}$$

системы (6) *функция $\gamma(t)$ ограничена сверху и снизу на полуоси $t \ge 0$.*

Условием 2 теоремы 2 является неравенство (21). Подставим в его левую часть выражения (15), (16) функций W, $\dot{W}$ и затем, воспользовавшись верхней оценкой (5) функции $\dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma})$, потребуем, чтобы полученное в результате выражение было неположительным. Приходим к неравенству

$$(-m - k + \lambda J + \varepsilon J^{-1})\dot{\gamma}^2 + (-R_1 + \lambda L_1)x^2 + (-R_2 + \lambda L_2)\sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 \le 0,$$

достаточному для выполнения неравенства (21). Оно выполняется при всех значениях $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ только в случае, когда параметры λ, ε удовлетворяют неравенствам

$$-m - k + \lambda J + \varepsilon J^{-1} \le 0, \quad -R_1 + \lambda L_1 \le 0, \quad -R_2 + \lambda L_2 \le 0.$$

Их анализ приводит к следующему выводу.

Лемма 1. *Пусть существует постоянная $k > 0$ такая, что нелинейный момент нагрузки удовлетворяет условию* (4), *и пусть значения $\varepsilon_1, \lambda_1, \lambda_2$ и точки X, Y, Z, Z_0 плоскости (λ, ε) определены формулами*

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = (m+k)J, \quad \lambda_1 = (m+k)J^{-1}, \quad \lambda_2 = \min(R_1/L_1, R_2/L_2), \\ X = (0, \varepsilon_1), \quad Y = (\lambda_1, 0), \quad Z = (\lambda_2, 0), \quad Z_0 = (\lambda_2, \varepsilon_1(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1). \end{gathered} \tag{23}$$

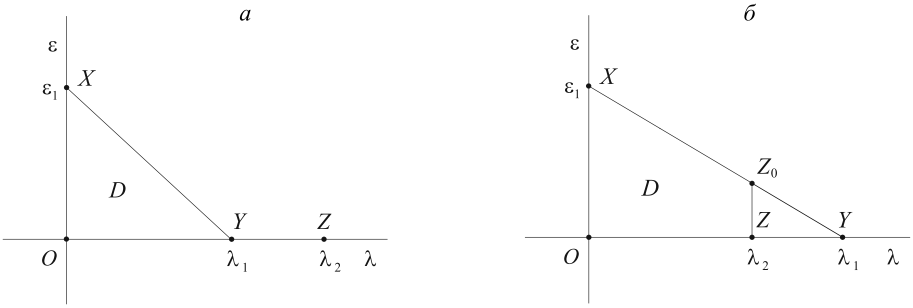

Рис. 1. Область D значений параметров λ, ε: $\lambda_1 \le \lambda_2$ (*а*); $\lambda_1 > \lambda_2$ (*б*).

Тогда множество D_0 значений параметров $\lambda, \varepsilon \ge 0$, удовлетворяющих условию 2 теоремы 2, непусто и содержит множество D, которое при $\lambda_1 \le \lambda_2$ состоит из точек плоскости (λ, ε), лежащих внутри треугольника OXY и на его сторонах (рис. 1, а), а при $\lambda_1 > \lambda_2$ множество D состоит из точек, лежащих внутри трапеции OXZ_0Z и на ее сторонах (рис. 1, б).

Лемма 1 позволяет заменить в теореме 2 предположение о существовании значений параметров λ, ε, обеспечивающих выполнение условия 2, конкретным указанием области изменения этих параметров, в которой выполнено данное условие.

Рассмотрим теперь условие 1 теоремы 2. Определение (19) параметров a, c для уравнения (20) принимает вид

$$a = d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 J}, \quad c = c_0/b_0,$$

где $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$. Условие 1 ограниченности решений уравнения (20) в теореме 2 означает, что для этого уравнения выполнено неравенство Трикоми $a > a_{\text{cr}}(c)$, то есть $d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c)$. Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $d_{\max}$ — максимум функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в замкнутой ограниченной области D. Точка $(\lambda, \varepsilon) \in D$, в которой выполняется неравенство $d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c)$, существует только в том случае, когда $d_{\max}/\sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c)$.*

Чтобы найти $d_{\max}$, заметим, что при любом $K > 0$ функция $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ строго монотонно возрастает вдоль луча $\varepsilon = K\lambda$ $(\lambda \ge 0)$, идущего на плоскости (λ, ε) из начала координат в первый квадрант. Поэтому свое максимальное значение $d_{\max}$ в выпуклой области D функция $d(\lambda, \varepsilon)$ принимает на «северо-восточной» границе этой области, то есть на отрезке XY в случае $\lambda_1 \le \lambda_2$ (рис. 1, *а*) или на ломаной XZ_0Z в случае $\lambda_1 > \lambda_2$ (рис. 1, *б*). Проведя вычисления, приходим к такому выводу.

Лемма 3. *Для функции $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, являющейся коэффициентом демпфирования в уравнении* (20), *ее максимум в области D равен*

$$d_{\max} = \begin{cases} m + k, & 0 < \lambda_1 \le 2\lambda_2; \\ 2\sqrt{\varepsilon_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1}, & \lambda_1 > 2\lambda_2. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь значения $\varepsilon_1, \lambda_1, \lambda_2$ определены по формулам (23).

С помощью лемм 1–3 получаем из теоремы 2 достаточный критерий ограниченности угла γ, в котором вместо коэффициента $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, зависящего от неопределенных параметров λ, ε, используется его известное максимальное значение $d_{\max}$.

Теорема 3. *Пусть нелинейный момент нагрузки удовлетворяет условию* (4) *и пусть для дифференциального уравнения*

$$J\ddot{\gamma} + d_{\max}\dot{\gamma} + b_0 \sin\gamma + c_0 = 0, \tag{25}$$

где b_0, c_0, $d_{\max}$ *определены по формулам* (7), (24), *выполнено неравенство Трикоми* $d_{\max}/\sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c)$, *где* $c = c_0/b_0$.

Тогда в любом решении (22) *системы* (6) *функция* $\gamma(t)$ *ограничена при* $t \geq 0$.

4. Теорема о глобальной устойчивости. Докажем, что для любого решения системы (6) в случае ограниченности угла γ имеет место ограниченность остальных фазовых переменных $\dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}$. Для обеспечения ограниченности угла γ достаточно принять условия теоремы 3. Таким образом, необходимо доказать следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда любое решение* (22) *системы* (6) *ограничено по всем переменным при* $t \geq 0$.

Доказательство. Из определения (15) функции $U(\gamma)$ и формул (13), (14) следует, что при условии (10) значения $\gamma = d_s$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ соответствуют точкам локальных минимумов этой функции, а значения $\gamma = e_s$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точкам ее локальных максимумов.

При доказательстве теоремы 2 для функции $\gamma(t)$ выводится оценка снизу $\gamma(t) \geq e_{s_0}$ $(t \geq 0)$, где номер $s_0 \leq 0$ определяется в ходе доказательства. Слева и справа от точки локального максимума $\gamma = e_{s_0}$ функции $U(\gamma)$ расположены точки $\gamma = d_{s_0 - 1}$ и $\gamma = d_{s_0}$ ее локальных минимумов. При этом значение $\gamma = d_{s_0}$ является точкой минимума функции $U(\gamma)$ на всей полуоси $\gamma \geq e_{s_0}$. Следовательно, на рассматриваемом решении (22) системы (6) функция

$$\Delta U(\gamma) = U(\gamma) - U(d_{s_0}) = \int\limits_{d_{s_0}}^{\gamma} (b_0 \sin\sigma + c_0)\, d\sigma = b_0(\cos d_{s_0} - \cos\gamma) + c_0(\gamma - d_{s_0}) \tag{26}$$

неотрицательна на этой полуоси: $\Delta U(\gamma) \geq 0$, $\gamma \geq e_{s_0}$.

Рассмотрим функцию

$$v(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = W(\dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) + \Delta U(\gamma).$$

Она лишь на константу отличается от функции $V(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2})$, определенной в (15), и поэтому имеет такую же производную (17) по t в силу системы (6):

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1 x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2.$$

Поскольку $\dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) \leq 0$ согласно (3), то $\dot{v} \leq 0$. Поэтому на решении системы (6) функция v не превосходит своего начального значения, то есть фазовые переменные принадлежат множеству

$$\Omega = \big\{(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) : W(\dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) + \Delta U(\gamma) \leq v_0\big\}, \tag{27}$$

где

$$v_0 = W(\dot{\gamma}_0, x_0, i_{10}, \ldots, i_{n_2 0}) + \Delta U(\gamma_0)$$

— значение функции v в начальный момент $t = 0$. Из неотрицательности функций $W, \Delta U$ следует, что $v_0 \geq 0$, и тогда из (27) получаем, что на решении системы (6) выполняются два неравенства

$$W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq v_0, \quad \Delta U(\gamma) \leq v_0. \tag{28}$$

Согласно определению (15), функция W является определенно положительной квадратичной формой переменных $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Поэтому первому из неравенств (28) удовлетворяют только значения этих переменных, лежащие в шаре $\dot{\gamma}^2 + x^2 + i_1^2 + \ldots + i_{n_2}^2 \leq \rho^2$ конечного радиуса ρ. Второе неравенство (28) с учетом выражения (26) для ΔU приводит к еще одному доказательству ограниченности функции $\gamma(t)$ сверху. □

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть функция V определена по формуле* (15), *и пусть $\mathcal{M}$ — множество точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий всех решений системы* (6), *определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию $\dot{V} = 0$.*

Множество $\mathcal{M}$ состоит только из стационарных точек системы (6).

Доказательство. Из формулы (17) для $\dot{V}$ с учетом (3) следует, что множество $\mathcal{M}$ образовано фазовыми траекториями, для которых $\dot{\gamma} = 0,\ x = 0,\ i_1 = \cdots = i_{n_2} = 0$, т. е. оно состоит из стационарных точек $\gamma = \gamma^0,\ \dot{\gamma} = 0,\ x = 0,\ i_1 = \ldots = i_{n_2} = 0$ системы (6). В п. 2 установлено, что при $c = c_0/b_0 < 1$ множество стационарных точек данной системы состоит из двух счетных подмножеств, соответствующих значениям (13) постоянной γ^0. Лемма 5 доказана. □

В теореме 3 даны условия ограниченности решений системы уравнений (6) по переменной γ. Далее, в лемме 4 установлено, что из ограниченности решений системы (6) по γ следует их ограниченность по всем переменным.

Тогда из принципа Ла-Салля (см. п. 2) с функцией Ляпунова V, определенной в (15), следует, что при выполнении условий теоремы 3 всякое решение системы уравнений (6) с течением времени неограниченно приближается к инвариантному множеству $\mathcal{M}$. Согласно лемме 5, множество $\mathcal{M}$ — это множество стационарных точек системы (6). Поскольку расстояния между любыми двумя точками множества $\mathcal{M}$ ограничены снизу положительной постоянной $\min(d_0 - e_0, e_1 - d_0) > 0$, то стремление решения к $\mathcal{M}$ означает, что оно стремится к одной из стационарных точек. При этом, как показывает теорема 1, на 2π-периоде изменения угла γ существует одна локально асимптотически устойчивая и одна неустойчивая стационарные точки.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть нелинейный момент нагрузки удовлетворяет неравенствам* (4) *и для эталонного дифференциального уравнения* (25) *выполнено неравенство Трикоми $d_{\max}/\sqrt{b_0 J} > a_{\mathrm{cr}}(c)$, где величина $d_{\max}$ определена в* (24), *$c = c_0/b_0 < 1$.*

Тогда каждое решение системы уравнений (6), *описывающей динамику синхронного электромотора, с течением времени стремится к одному из стационарных решений. При этом на каждом 2π-периоде изменения угла γ множество стационарных решений состоит из одного неустойчивого и одного асимптотически устойчивого стационарных решений.*

5. Результаты численного моделирования. Пользуясь системой единиц СИ и опуская наименования единиц измерения (метр, килограмм, секунда, ампер), выбираем следующие значения параметров $J, \omega,\ R_1, R_2,\ L_1, L_2,\ n_2, a_1, a_2, b_0$ в системе уравнений (6): $J = 10^{-3}$, $\omega = 10^3$, $R_1 = 3 \cdot 10^{-9}$, $R_2 = 3 \cdot 10^{-10}$, $L_1 = 6 \cdot 10^{-11}$, $L_2 = 6 \cdot 10^{-12}$, $n_2 = 6$, $a_1 = 5.6250 \cdot 10^{-7}$, $a_2 = 1.1250 \cdot 10^{-10}$, $b_0 = 7.5 \cdot 10^{-3}$.

Момент нагрузки полагаем равным $M(\dot{\varphi}) = -7.5 \cdot 10^{-7}\ \dot{\varphi} - 10^{-6}\ \mathrm{sign}(\dot{\varphi})\sqrt{10\ |\dot{\varphi}|}$. Тогда в соответствии с (2) имеем $c_0 = -M(\omega) = 8.5 \cdot 10^{-4}$, а соответствующий момент $\Delta M(\dot{\gamma})$ удовлетворяет оценкам (4), где $k = 7.5 \cdot 10^{-7}$.

Для параметра m рассматриваем следующие два значения: 1) $m = 3.4343 \cdot 10^{-4}$, 2) $m = 5.3660 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, имеем два набора параметров, входящих в уравнения (6). Эти параметры не связаны с параметрами реальных электромоторов, их выбор здесь обусловлен стремлением дать иллюстрацию полученных результатов.

Для каждого из этих двух наборов параметров рассматриваем два значения начальной угловой скорости $\dot{\gamma}_0$: a) $\dot{\gamma}_0 = 8$, b) $\dot{\gamma}_0 = -8$. Остальные начальные значения фиксированы: $\gamma_0 = 0$, $x_0 = 0.5$, $i_{10} = 0.1$, $i_{20} = 0.2$, $i_{30} = -0.1$, $i_{40} = -0.2$, $i_{50} = -0.3$, $i_{60} = -0.2$.

В результате имеем четыре варианта ($1a$, $1b$, $2a$, $2b$) выбора параметров и начальных данных, которые отличаются только значениями m и $\dot{\gamma}_0$.

На рис. 2 показан график потенциальной энергии $U(\gamma)$ и кривые $(\gamma(t), V(t))$, полученные путем численного интегрирования системы (6) для вариантов $1a$, $1b$, $2a$, $2b$. Здесь $V(t)$ — это определенная в (15) функция V, взятая на решении системы (6). Так как $W \geq 0$, то $V = W + U \geq U$, и поэтому в процессе убывания $V(t)$ графики кривых $(\gamma(t), V(t))$ не могут опуститься ниже графика $U(\gamma)$.

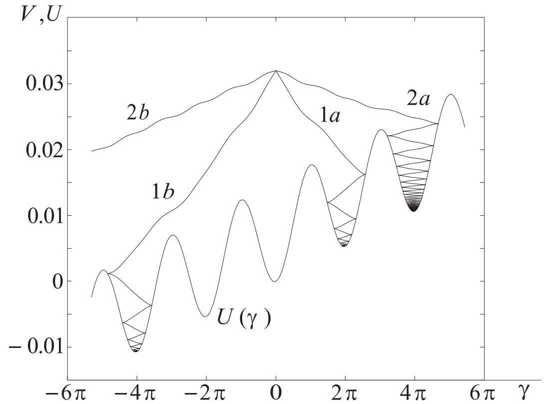

Рис. 2. Графики кривых $(\gamma(t), V(t))$ и функции $U(\gamma)$.

С помощью приведенной в п. 2 синусоидальной аппроксимации критического значения получаем $a_{cr} = 0.0892$ для обоих наборов параметров. Проверка неравенства Трикоми $a > a_{cr}$ для эталонного уравнения (25) показывает, что $a = 0.1257$ для набора 1, и неравенство Трикоми здесь выполнено. Следовательно, по теореме 4, для набора 1 система уравнений (6) глобально устойчива. На рис. 2 это проявляется в том, что принадлежащие набору 1 решения с течением времени попадают в «потенциальную яму», соответствующую одной из асимптотически устойчивых стационарных точек, а затем притягиваются к этой точке (кривые $1a$, $1b$). Для набора 2 имеем $a = 0.0199$, так что неравенство Трикоми здесь не выполнено, и глобальная устойчивость системы (6) не гарантирована. Поэтому тут существуют решения, как стремящиеся к стационарному (кривая $2a$), так и неограниченные по γ (кривая $2b$).

Литература

1. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

2. *Леонов Г. А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47–85.

3. *Леонов Г. А.* Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 2. С. 238–244.

4. *Tricomi F.* Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annali della Roma Schuola Normale Superiore de Pisa. 1933. Vol. 2, N 2. P. 1–20.

5. *Леонов Г. А., Зарецкий А. М.* Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 18–27.

6. *Коносевич Б. И., Коносевич Ю. Б.* Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора // Механика твердого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. 2016. Вып. 46. С. 73–90.

7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.

8. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.

9. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.

10. *Коносевич Б. И., Коносевич Ю. Б.* Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электромотора // Труды Института прикладной математики и механики. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. 2014. Т. 29. С. 121–126.

Статья поступила в редакцию 5 августа 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Коносевич Борис Иванович — д-р физ.-мат. наук; konos.donetsk@yandex.ru
Коносевич Юлия Борисовна — канд. физ.-мат. наук; konos.donetsk@yandex.ru

Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich

Institute of applied mathematics and mechanics, ul. Rozy Luxemburg, 74, Donetsk, 83114, Ukraine

For citation: Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 79–90. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.109

Systems of differential equations describing the dynamics of synchronous electric machines are periodic in the angular variable, and so they have a denumerable set of steady solutions corresponding to the operating mode of steady rotation of the rotor. Such system is called to be of gradient type if any solution of this system tends with time to one of these steady rotations (equilibrium states). The gradient type system is said to be globally stable when it has only one locally asymptotically stable equilibrium state on the period of the angular variable. In the article the subject of investigation is the Leonov—Zaretskiy model of the synchronous electric motor (Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, **45**(4), 2012), which includes differential equations for electric currents in the damper and excitation windings of the rotor. The authors of this model proved that it is globally stable in the case of zero load moment. In the present paper the load moment is assumed to be a nonlinear function of the angular velocity of the rotor, having a linear estimate. Easily verifiable sufficient condition of global stability is obtained for this case.

Keywords: synchronous electric motor, global stability, reduction method, LaSalle invariance principle.

References

1. Gelig A. Kh., Leonov G. A., Yakubovich V. A., *Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state* (Nauka, Moscow, 1978, 400 p.) [in Russian].

2. Leonov G. A., "Phase synchronization. Theory and applications", *Automatics and Telemechanics* **10**, 47–85 (2006) [in Russian].

3. Leonov G. A., "Lyapunov's second method in the theory of phase synchronization", *Applied Mathematics and Mechanics* **40**(2), 238–244 (1976) [in Russian].

4. Tricomi F., "Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica", *Annali della Roma Schuola Normale Superiore de Pisa* **2**(2), 1–20 (1933).

5. Leonov G. A., Zaretskiy A. M., "Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **45**(4), 157–163 (2012).

6. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B., "Sufficient condition of global stability of a model of the synchronous electric motor", *Mechanics of rigid body* **46**, 73–90 (2016) [in Russian].

7. Barbashin E. A., *Introduction to the stability theory* (Nauka, Moscow, 1967, 224 p.) [in Russian].

8. LaSalle J., Lefschetz S., *Stability by Liapunov's direct method* (Academic Press, New York, London, 1961, 224 p.).

9. Barbashin E. A., Tabueva V. A., *Dynamical systems with cylindrical phase space* (Nauka, Moscow, 1969, 300 p.) [in Russian].

10. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B., "Approximation of the critical value of the damping parameter for the synchronous electric motor", *Proceedings of the Institute of applied mathematics and mechanics* **29**, 121–126 (2014) [in Russian].

Author's information:

Konosevich Boris I. — konos.donetsk@yandex.ru
Konosevich Yuliya B. — konos.donetsk@yandex.ru