УДК 519.85 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 65K10, 15A80, 90C48, 65F50

О решении одной многомерной задачи тропической оптимизации с использованием разрежения матриц*

Н. К. Кривулин, В. Н. Сорокин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривулин Н. К., Сорокин В. Н.* О решении одной многомерной задачи тропической оптимизации с использованием разрежения матриц // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 91–104. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.110

В работе предлагается полное решение задачи минимизации функции, заданной на векторах с элементами из тропического (идемпотентного) полуполя. Рассматриваемая задача тропической оптимизации возникает, например, когда требуется найти наилучшее, в смысле метрики Чебышёва, приближенное решение тропических векторных уравнений, и встречается в различных приложениях, включая задачи планирования, размещения и принятия решений. Для решения задачи сначала находится минимальное значение целевой функции, предлагается описание множества решений в форме системы неравенств и приводится одно из решений. Далее с помощью разрежения матрицы задачи строится расширенное множество решений, а затем полное решение в виде некоторого семейства подмножеств. Описываются процедуры, позволяющие сократить число подмножеств, которые необходимо исследовать при построении полного решения. Показано, как полное решение задачи может быть записано в параметрическом виде в компактной векторной форме. Полученное решение обобщает известные результаты, которые обычно сводятся к получению одного из решений и не позволяют найти все множество решений задачи. Для иллюстрации основных результатов работы приводится пример численного решения задачи на множестве трехмерных векторов.

Ключевые слова: идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация, чебышёвская аппроксимация, полное решение, разрежение матриц.

1. Введение. Тропическая (идемпотентная) алгебра представляет собой раздел математики, который изучает свойства полуколец и полуполей с идемпотентным сложением и их приложения. Исследованиям в этой области посвящено немало работ, включая [1–7], а также детальный обзор литературы в [8]. Использование моделей и методов тропической алгебры позволяет ряд нелинейных в обычном смысле задач приводить к линейной форме в терминах некоторого идемпотентного полукольца или полуполя, что во многих случаях облегчает решение и упрощает интерпретацию результатов. Такой подход находит все более широкое применение при решении практических задач в различных областях, включая задачи планирования, размещения, принятия решений и др.

Одним из направлений развития тропической математики является разработка методов решения задач оптимизации, которые могут быть сформулированы и решены

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ в рамках научного проекта № 16-02-00059.

в терминах идемпотентной математики (задач тропической оптимизации). Имеется целый ряд практических задач (см., например, [9–13]), которые сводятся к наилучшему приближенному решению в смысле метрики Чебышёва векторного уравнения $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{p}$ обозначают заданные матрицу и вектор, $\boldsymbol{x}$ — неизвестный вектор, а произведение матрицы на вектор понимается в смысле тропической математики.

Рассмотрим, например, задачу оптимального планирования времени начала работ некоторого проекта с целью обеспечения заданных директивных сроков завершения работ. В этой задаче берется идемпотентное полуполе с операцией max в роли сложения и арифметического сложения в роли умножения, координаты вектора $\boldsymbol{x}$ имеют смысл времени начала выполнения для каждой работы, которое требуется определить, вектор $\boldsymbol{p}$ задает директивные сроки завершения работ, матрица $\boldsymbol{A}$ — ограничения снизу на величину интервалов времени между началом и завершением работ.

Проблема чебышёвской аппроксимации для решения рассматриваемого уравнения сводится к нахождению векторов $\boldsymbol{x}$, на которых достигается минимум в задаче

$$\min \quad (\boldsymbol{Ax})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{Ax},$$

где матричные и векторные операции понимаются в смысле идемпотентной алгебры.

Исследованию задачи посвящен ряд работ, опубликованных в различное время, включая [3, 10–13]. Представленные в этих работах результаты обычно описывают получение одного из решений и не позволяют найти все множество решений задачи.

Для нахождения решения задачи в статьях [14–17] предлагается подход, при котором вводится дополнительный параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача сводится к решению параметризованных неравенств. С помощью такого подхода были получены решения в компактной векторной форме для рассматриваемой задачи, а также некоторых ее вариантов, включая задачи с ограничениями.

Цель настоящей работы состоит в исследовании и решении задачи тропической оптимизации с целевой функцией более общего вида. На основе применения методов решения с использованием разреженных матриц, описанного в [18], находится полное решение задачи и его представление в компактной векторной форме.

Работа построена следующим образом. Сначала находится минимальное значение целевой функции задачи, предлагается описание множества решений в форме системы неравенств и приводится одно из решений. Далее с помощью разрежения матрицы задачи находится расширенное множество решений, а затем полное решение в виде некоторого семейства подмножеств. Предлагаются процедуры, позволяющие сократить число подмножеств, которые необходимо исследовать при построении полного решения. Показано, как полное решение задачи может быть записано в параметрическом виде в компактной векторной форме. Для иллюстрации полученных результатов приводится пример численного решения задачи на множестве трехмерных векторов.

2. Основные понятия тропической алгебры. Рассмотрим необходимые в дальнейшем основные понятия и предварительные результаты тропической (идемпотентной) алгебры [1–7]. Идемпотентное полуполе определяется как набор $\langle \mathbb{X}, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$, где $\mathbb{X}$ обозначает непустое множество с заданными на нем ассоциативными и коммутативными операциями сложения $\oplus$ с нейтральным элементом $\mathbb{0}$ (ноль) и умножения $\odot$ с нейтральным элементом $\mathbb{1}$ (единица).

Сложение обладает свойством идемпотентности: для любого элемента $x \in \mathbb{X}$ выполняется равенство $x \oplus x = x$. Умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо: для любого $x \neq \mathbb{0}$ существует x^{-1} такой, что $x \odot x^{-1} = \mathbb{1}$.

Идемпотентность сложения задает на множестве $\mathbb{X}$ частичный порядок: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Отсюда следует, что неравенство $x \oplus y \leq z$ эквивалентно двум неравенствам $x \leq z$ и $y \leq z$. Кроме того, операции сложения и умножения являются монотонными, а операция обращения — антитонной. Будем предполагать, что указанный частичный порядок продолжен до линейного на множестве $\mathbb{X}$. Ниже операции max и min понимаются в смысле указанного линейного порядка.

Целые степени определяются обычным образом: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x \odot x^{p-1}$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$ для всех $x \neq \mathbb{0}$ и натуральных p. В дальнейшем будем считать полуполе алгебраически полным в том смысле, что введенная операция возведения в степень может быть распространена на случай степеней с рациональным показателем. Далее символ $\odot$ для упрощения записи будем опускать.

В прикладных задачах часто встречаются следующие вещественные идемпотентные полуполя: $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, $\mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0 \rangle$, $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1 \rangle$ и $\mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times, +\infty, 1 \rangle$. Здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ обозначает множество положительных вещественных чисел.

Рассмотрим полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$, которое обычно называют $(\max, +)$-алгеброй. В нем множество $\mathbb{X}$ определено как множество действительных чисел $\mathbb{R}$, расширенное путем добавления числа $-\infty$. Роль тропического сложения играет операция взятия максимума, а в качестве умножения берется арифметическое сложение. Для любого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1}, равный противоположному числу $-x$ в обычной арифметике. Степень x^y определена для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и соответствует арифметическому произведению xy. Порядок, индуцированный идемпотентным сложением, совпадает с обычным линейным порядком на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц размера $m \times n$ над полуполем $\mathbb{X}$.

Нулевая матрица имеет все элементы равными $\mathbb{0}$. Матрицу, в которой отсутствуют нулевые строки (столбцы), назовем регулярной по строкам (столбцам). Матрица без нулевых строк и нулевых столбцов называется регулярной.

Операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ матриц выполняются по стандартным правилам с заменой обычных скалярных операций сложения и умножения на тропические. Свойства монотонности скалярных операций распространяются на операции над матрицами, для которых отношение $\leq$ вводится как покомпонентное.

Будем называть мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ операцию преобразования в матрицу $\boldsymbol{A}^- \in \mathbb{X}^{n \times m}$, элементы которой определяются по правилу: $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Рассмотрим множество $\mathbb{X}^{n \times n}$ квадратных матриц порядка n. Матрица является диагональной, если все ее недиагональные элементы равны нулю. Единичной называется диагональная матрица $\boldsymbol{I}$, у которой все элементы на диагонали равны единице.

Для регулярных по строкам матриц $\boldsymbol{A}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- \geq \boldsymbol{I}$.

Матрица, состоящая из одного столбца (строки), образует вектор-столбец (вектор-строку). Далее все векторы, если не указано иначе, считаются вектор-столбцами. Множество вектор-столбцов размерности n обозначим через $\mathbb{X}^n$. Нулевой вектор имеет все компоненты равными $\mathbb{0}$. Вектор является регулярным, если у него нет нулевых компонент. Вектор, все компоненты которого равны $\mathbb{1}$, обозначается как $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})^T$.

Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ справедливо равенство $\boldsymbol{x}^- \boldsymbol{x} = \mathbb{1}$. Если вектор $\boldsymbol{x}$ является регулярным, то выполняется неравенство $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{I}$.

Выпуклой линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ называется выражение вида $u_1\boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus u_k\boldsymbol{x}_k$, где числа $u_1, \dots, u_k$ удовлетворяют условию $u_1 \oplus \cdots \oplus u_k = \mathbb{1}$. Это условие означает, что $u_i \leq \mathbb{1}$ для всех индексов $i = 1, \dots, k$, и по крайней мере для одного i выполняется равенство $u_i = \mathbb{1}$.

Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m \times n}$, а также вектор $\boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^m$, и требуется найти все векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющие неравенству

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}. \tag{1}$$

Решение этой задачи обеспечивается следующим утверждением, полное доказательство которого приводится, например, в работах [7, 19].

Лемма 1. *Для любой регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{d}$ решение неравенства* (1) *имеет вид*

$$\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{d}^- \boldsymbol{A})^-.$$

3. Задачи тропической оптимизации. Задачи тропической оптимизации обычно состоят в минимизации или максимизации некоторой целевой функции, заданной на векторах над идемпотентным полуполем. Такие задачи возникают, например, при исследовании уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$, для которого требуется найти точное или приближенное решение [3, 10–13].

Сначала предположим, что заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и вектор $\boldsymbol{p} \in \mathbb{X}^n$. Пусть требуется найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают задачу

$$\min \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{p}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

Решение этой задачи обеспечивает наилучшее приближенное решение уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ в смысле чебышёвской метрики. Исследование задачи было проведено, например, в работах [14, 16, 17], где приводится частичное решение в следующем виде.

Лемма 2. *Для любых регулярных матрицы $\boldsymbol{A}$ и вектора $\boldsymbol{p}$ минимум в задаче* (2) *равен $\Delta = ((\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^- \boldsymbol{A})^-)^- \boldsymbol{p})^{1/2}$ и достигается при $\boldsymbol{x} = \Delta(\boldsymbol{p}^- \boldsymbol{A})^-$.*

Обобщением задачи (2) с дополнительным вектором $\boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$ является задача нахождения регулярных векторов $\boldsymbol{x}$, которые обеспечивают

$$\min \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Заметим, что при $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ получается задача минимизации функции $\boldsymbol{x}^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{x}$, полное решение которой было получено в [15, 17].

В настоящей работе задача (3) рассматривается в следующей форме. Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается

$$\min \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{x}. \tag{4}$$

В работах [15, 17] было получено частичное решение этой задачи.

Ниже для решения задачи (4) сначала так же, как в работах [15, 17], будет определен минимум целевой функции и получено одно из решений. Затем для полного решения задачи строится система неравенств, которая определяет множество всех решений. На основе использования разреженных матриц находится более широкое множество решений, а затем полное решение задачи в форме семейства подмножеств решений.

4. Предварительный анализ задачи. Цель этого раздела состоит в том, чтобы найти минимум целевой функции, охарактеризовать множество решений и описать некоторые свойства такого множества. Для этого будем использовать подход [15–17, 19, 20], при котором вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача оптимизации сводится к решению параметризованного неравенства. Докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ — *регулярная по строкам матрица, а* $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{q}$ — *регулярные векторы. Тогда минимум в задаче* (4) *равен*

$$\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}, \tag{5}$$

а все регулярные решения $\boldsymbol{x}$ *определяются системой неравенств*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}. \tag{6}$$

В частности, минимум достигается при $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{q}$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции через θ. Рассмотрим равенство $\theta = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}$ и заметим, что для всех регулярных векторов $\boldsymbol{x}$ справедливо $\theta > \mathbb{0}$. Так как θ — минимум, то можно заменить равенство на неравенство $\theta \geq (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}$, которое эквивалентно двум неравенствам $\theta \geq (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p}$ и $\theta \geq \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}$.

Решая с помощью леммы 1 первое неравенство относительно $\boldsymbol{p}$, а второе относительно $\boldsymbol{x}$, приходим к системе из двух неравенств $\boldsymbol{p} \leq \theta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x} \leq \theta\boldsymbol{q}$.

После подстановки второго неравенства системы в первое, получаем $\boldsymbol{p} \leq \theta^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}$, затем $\theta \geq ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2} = \Delta > \mathbb{0}$, и таким образом находим нижнюю границу для θ. Проверим, что эта граница достигается при $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{q}$. Действительно, после подстановки в целевую функцию имеем $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} = \Delta^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \Delta\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{q} = \Delta$.

Следовательно, нижняя граница Δ для θ оказывается точной и поэтому определяет минимум целевой функции.

Заменив в системе θ на Δ, а затем, умножив обе части первого неравенства на Δ^{-1}, получаем, что все регулярные решения задачи (4) должны удовлетворять системе (6). Учитывая эквивалентность преобразований, верно и обратное утверждение: любой регулярный вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий системе (6), является решением задачи (4). ☐

Следствие 1. *Множество решений задачи* (4) *вместе с любыми решениями содержит их всевозможные выпуклые линейные комбинации.*

Доказательство. Рассмотрим случай выпуклой линейной комбинации двух решений. Пусть $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — решения задачи (4), а u_1 и u_2 — такие числа, что $u_1 \oplus u_2 = \mathbb{1}$.

Так как векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ являются решениями задачи (4), то они определяются системой (6), а их выпуклая комбинации удовлетворяет соотношениям

$$\boldsymbol{A}(u_1\boldsymbol{x}_1 \oplus u_2\boldsymbol{x}_2) \geq u_1\Delta^{-1}\boldsymbol{p} \oplus u_2\Delta^{-1}\boldsymbol{p} = (u_1 \oplus u_2)\Delta^{-1}\boldsymbol{p} = \Delta^{-1}\boldsymbol{p},$$
$$u_1\boldsymbol{x}_1 \oplus u_2\boldsymbol{x}_2 \leq u_1\Delta\boldsymbol{q} \oplus u_2\Delta\boldsymbol{q} = (u_1 \oplus u_2)\Delta\boldsymbol{q} = \Delta\boldsymbol{q}.$$

Следовательно, вектор $u_1\boldsymbol{x}_1 \oplus u_2\boldsymbol{x}_2$ также является решением задачи (4). Полученный результат легко обобщается на случай с произвольным количеством решений. $\square$

5. Разрежение матрицы задачи. Для расширения множества решений задачи (4) применим метод с использованием разрежения матриц, предложенный в [18]. Сначала преобразуем матрицу задачи $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ в матрицу $\widehat{\boldsymbol{A}} = (\widehat{a}_{ij})$, приравнивая нулю все элементы, которые строго меньше порогового значения по следующему правилу:

$$\widehat{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } a_{ij} \geq \Delta^{-2} p_i q_j^{-1}; \\ \mathbb{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее матрицу $\widehat{\boldsymbol{A}}$, полученную при помощи такого преобразования, будем называть разреженной матрицей задачи. Свойства этой матрицы отражает следующий результат.

Лемма 4. *Замена матрицы $\boldsymbol{A}$ на $\widehat{\boldsymbol{A}}$ не меняет множество решений задачи* (4).

Доказательство. Сначала проверим, что переход к разреженной матрице сохраняет минимальное значение Δ целевой функции, полученное в лемме 3. Для упрощения выкладок рассмотрим величину Δ^2. Определим индексы k и s следующим образом:

$$k = \arg\max_{1\leq i\leq n} (a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n)^{-1} p_i, \qquad s = \arg\max_{1\leq j\leq n} a_{kj}q_j,$$

и запишем выражение для Δ^2 в виде

$$\Delta^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p} = \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n)^{-1} p_i =$$
$$= (a_{k1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{kn}q_n)^{-1} p_k = (a_{ks}q_s)^{-1} p_k.$$

Регулярность по строкам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярность вектора $\boldsymbol{q}$ гарантируют, справедливость неравенства $a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n > \mathbb{0}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, так как вектор $\boldsymbol{p}$ регулярный, то $\Delta > \mathbb{0}$, а значит и $a_{ks} > \mathbb{0}$.

Рассмотрим произвольную строку i матрицы $\boldsymbol{A}$. Из формулы для Δ^2 видно, что выполняется неравенство $\Delta^2 \geq (a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n)^{-1} p_i$. Оно эквивалентно неравенству $a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n \geq \Delta^{-2} p_i$, которое верно только при условии, что выполняется $a_{ij}q_j \geq \Delta^{-2} p_i$ для некоторого индекса j. Отсюда заключаем, что в каждой строке i матрицы $\boldsymbol{A}$ существует по меньшей мере один элемент a_{ij}, который удовлетворяет условию

$$a_{ij} \geq \Delta^{-2} p_i q_j^{-1}. \tag{7}$$

Рассмотрим строку k матрицы $\boldsymbol{A}$, чтобы убедиться в справедливости $a_{kj} \leq \Delta^{-2} p_k q_j^{-1}$ для всех j в этой строке. Если $a_{kj} = \mathbb{0}$, то это неравенство, очевидно, выполняется. При условии $a_{kj} > \mathbb{0}$ имеем $(a_{kj}q_j)^{-1} p_k \geq (a_{k1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{kn}q_n)^{-1} p_k = \Delta^2$, из чего следует, что неравенство также выполняется. Так как $\Delta^2 = (a_{ks}q_s)^{-1} p_k$, то в строке k есть элементы, которые превращают неравенство (7) в равенство, но нет ни одного элемента, для которого (7) становится строгим неравенством.

Предположим теперь, что (7) не выполняется для некоторых i и j. Учитывая, что $p_i > \mathbb{0}$, можно записать $a_{ij} < \Delta^{-2} p_i q_j^{-1} \leq (a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n) q_j^{-1}$, откуда получаем

$a_{ij}q_j < a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n$. В этом случае уменьшение $a_{ij}q_j$ путем понижения значения a_{ij} вплоть до $\mathbb{0}$ не влияет на величину $a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n$ и, следовательно, на значение $\Delta^2 \geq (a_{i1}q_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}q_n)^{-1}p_i$.

Проверим, что все элементы a_{ij}, которые не удовлетворяют неравенству (7), можно обнулить, оставляя без изменений множество регулярных решений задачи (4).

Рассмотрим систему (6). Записав первое неравенство системы в скалярной форме, получим, что для каждого i выполняется $a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n \geq \Delta^{-1}p_i$.

Учитывая регулярность векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{q}$, умножая обе части второго неравенства системы на регулярный вектор $\boldsymbol{q}^-$ слева, можно привести это неравенство к эквивалентному неравенству $\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{x} \leq \Delta$. В скалярной форме получаем $q_1^{-1}x_1 \oplus \cdots \oplus q_n^{-1}x_n \leq \Delta$.

Предположим, что в матрице $\boldsymbol{A}$ имеется элемент, скажем a_{ij}, удовлетворяющий условию $a_{ij} < \Delta^{-2}p_iq_j^{-1}$ и тем самым нарушающий неравенство (7). Тогда будем иметь $a_{ij}x_j < \Delta^{-2}p_iq_j^{-1}x_j \leq \Delta^{-2}(q_1^{-1}x_1 \oplus \cdots \oplus q_n^{-1}x_n)p_i \leq \Delta^{-1}p_i \leq a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n$. В этом случае слагаемое $a_{ij}x_j$ не вносит никакого вклада в значение суммы $a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n$. Следовательно, можно положить $a_{ij} = \mathbb{0}$, не изменяя множество решений системы.

Осталось понять, что обнуление элементов a_{ij}, которые не удовлетворяют неравенству (7), равносильно замене матрицы $\boldsymbol{A}$ на $\widehat{\boldsymbol{A}}$. □

Заметим, что ненулевые элементы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}$ отвечают условию $\widehat{a}_{ij} \geq \Delta^{-2}p_iq_j^{-1}$. Тогда для элементов матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^- = (\widehat{a}_{ij}^-)$ справедливо соотношение $\widehat{a}_{ij}^- \leq \Delta^2q_ip_j^{-1}$. В матричной форме можем записать неравенство $\widehat{\boldsymbol{A}}^- \leq \Delta^2\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^-$, которое будет использовано ниже.

6. Полное решение задачи. В этом разделе будет представлено полное решение задачи (4) в виде семейства решений, которое задается множеством матриц, полученных из разреженной матрицы задачи, продолжая процесс обнуления ее элементов.

Начнем с того, что расширим решение $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{q}$, полученное в лемме 3, до некоторого множества с помощью следующего утверждения.

Лемма 5. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по строкам разреженная матрица задачи (4), где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — регулярные векторы, и $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^-\boldsymbol{p})^{1/2}$. Тогда минимум в задаче (4) равен Δ и достигается на любом векторе $\boldsymbol{x}$, который удовлетворяет условию*

$$\Delta^{-1}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}. \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что определяемое неравенством (8) множество не пусто. Действительно, из того, что матрица $\boldsymbol{A}$ является разреженной, следует неравенство $\boldsymbol{A}^- \leq \Delta^2\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^-$, после умножения которого на $\Delta^{-1}\boldsymbol{p}$ справа получаем $\Delta^{-1}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{p} \leq \Delta\boldsymbol{q}$.

Покажем, что все векторы $\boldsymbol{x}$, которые удовлетворяют двойному неравенству (8), являются решениями системы (6). В силу того, что правое неравенство в (8) совпадает со вторым в системе (6), достаточно проверить выполнение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}$.

Так как матрица $\boldsymbol{A}$ регулярна по строкам, то $\boldsymbol{I} \leq \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$. Умножив левое неравенство из (8) на $\boldsymbol{A}$ слева, получаем $\Delta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \Delta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, откуда следует требуемое неравенство системы (6). □

Теперь сформулируем лемму, которая обеспечивает полное решение задачи (4).

Лемма 6. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ — *регулярная по строкам разреженная матрица задачи* (4), *где* $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{q}$ — *регулярные векторы, и* $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. *Обозначим через* $\mathcal{A}$ *множество матриц, полученных из* $\boldsymbol{A}$ *посредством сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных.*

Тогда минимум в задаче (4) *равен* Δ, *а все регулярные решения* $\boldsymbol{x}$ *образуют семейство решений, каждое из которых определяется условием*

$$\Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}. \tag{9}$$

Доказательство. Как было показано выше, все решения задачи (4) задаются системой (6). Следовательно, для доказательства леммы требуется проверить, что каждому решению системы (6) соответствует некоторая матрица $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$ и наоборот.

Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ является решением системы (6). Рассмотрим векторное неравенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}$ и исследуем каждое из соответствующих скалярных неравенств, чтобы определить максимальное слагаемое в левой части. Несложно видеть, что найдется матрица $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$ с ненулевыми элементами в каждой строке, которые соответствуют этим максимальным слагаемым.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{x}$ — решение неравенства (9) для некоторой матрицы $\boldsymbol{A}_1$. Так как матрица $\boldsymbol{A}_1$ регулярна по строкам и $\boldsymbol{A}_1 \leq \boldsymbol{A}$, то выполняется $\boldsymbol{I} \leq \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{-} \leq \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^{-}$. Умножая левую часть неравенства (9) на $\boldsymbol{A}$ слева, получаем $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}$. Из этого следует, что $\boldsymbol{x}$ является решением системы (6), а значит и задачи (4). $\square$

Отметим, что различные множества решений из семейства, описанного в лемме 6, могут иметь пересекающиеся подмножества.

Для получения решения в параметрическом виде докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ — *регулярная по строкам разреженная матрица задачи* (4), *где* $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{q}$ — *регулярные векторы, и* $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. *Обозначим через* $\mathcal{A}$ *множество матриц, полученных из* $\boldsymbol{A}$ *посредством сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных, а через* $\boldsymbol{B}$ — *матрицу, столбцами которой являются векторы* $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p}$ *для всех матриц* $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$.

Тогда минимум в задаче (4) *равен* Δ, *а все регулярные решения* $\boldsymbol{x}$ *имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \leq \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{A}$ содержит k матриц. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ возьмем матрицу $\boldsymbol{A}_i \in \mathcal{A}$ и определим левую часть $\boldsymbol{b}_i = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_i^{-}\boldsymbol{p}$ неравенства (9). Учитывая, что правая часть неравенства всегда равна $\Delta\boldsymbol{q}$, семейство решений описывается следующим набором двойных неравенств:

$$\boldsymbol{b}_1 \leq \boldsymbol{x}_1 \leq \Delta\boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{b}_k \leq \boldsymbol{x}_k \leq \Delta\boldsymbol{q}.$$

Рассмотрим произвольные векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, для которых соответствующие двойные неравенства выполняются. По следствию 1 множество решений задачи (4) замкнуто относительно операции взятия выпуклой линейной комбинации. Следовательно, если $u_1 \oplus \cdots \oplus u_k = \mathbb{1}$, то вектор $u_1\boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus u_k\boldsymbol{x}_k$ также является решением.

Покажем, что общее решение задачи можно записать в виде

$$u_1\boldsymbol{b}_1 \oplus \cdots \oplus u_k\boldsymbol{b}_k \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}, \qquad u_1 \oplus \cdots \oplus u_k = \mathbb{1}. \tag{11}$$

Если вектор $\boldsymbol{x}$ — решение задачи (4), то он принадлежит семейству решений, определяемому нижней границей $\boldsymbol{b}_i = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_i^{-}\boldsymbol{p}$, которая задается некоторой матрицей $\boldsymbol{A}_i \in \mathcal{A}$. Чтобы представить вектор $\boldsymbol{x}$ в форме (11), положим коэффициент u_i равным $\mathbb{1}$, а все остальные коэффициенты обнулим.

Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет системе (11). Тогда существует такой индекс i, для которого выполняются соотношения $u_i = \mathbb{1}$ и $\Delta^{-1}\boldsymbol{A}_i^{-}\boldsymbol{p} = u_i\boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}$, откуда следует, что $\boldsymbol{x}$ принадлежит семейству решений, образованному матрицей $\boldsymbol{A}_i$.

Построим матрицу $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$, используя векторы $\boldsymbol{b}_i$ в качестве столбцов, и введем вектор $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_k)^T$. Теперь двойное неравенство и равенство системы (11) можно записать в векторной форме как $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}$ и $\mathbf{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}$. С помощью вектора $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$ запишем двойное неравенство в эквивалентной форме в виде системы, состоящей из равенства $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ и неравенства $\boldsymbol{v} \leq \Delta\boldsymbol{q}$. Объединение этой системы с условием $\mathbf{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}$ приводит к решению (10). ☐

В качестве следствия полученного результата представим решение задачи (2), которая является частным случаем задачи (4).

Следствие 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по строкам разреженная матрица задачи (2), где $\boldsymbol{p}$ — регулярный вектор, и $\Delta = ((\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A})^{-})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество матриц, полученных из $\boldsymbol{A}$ посредством сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных, а через $\boldsymbol{B}$ — матрицу, столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p}$ для всех матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$.*

Тогда минимум в задаче (4) равен Δ, а все регулярные решения $\boldsymbol{x}$ имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \leq \Delta(\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A})^{-}, \qquad \mathbf{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}.$$

7. Процедуры построения полного решения. Перебор всевозможных матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$ для построения подмножеств семейства решений задачи в соответствии с результатом сформулированной теоремы может представлять определенные трудности. Кроме того, некоторые семейства решений могут содержаться в других семействах и поэтому при записи общего решения могут быть отброшены. Ниже описываются процедуры, позволяющие во многих случаях сократить число подмножеств, которые необходимо учесть при построении общего решения.

Рассмотрим следующую процедуру построения нижних границ в неравенстве (9) для семейства решений, которая заключается в последовательном выборе по одному ненулевому элементу в строках разреженной матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}$.

Предположим, что в матрице $\widehat{\boldsymbol{A}}$ зафиксированы элементы в некоторых строках, в результате чего получена матрица $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{a}_{ij})$. Пусть выбран ненулевой элемент в одной из оставшихся строк, например элемент $\widetilde{a}_{rj}$ в строке r и столбце j, значение которого фиксируется, а остальные элементы в этой строке замещаются нулями.

Всякий вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$, который является решением задачи (4), удовлетворяет системе (6), в частности, ее первому неравенству в форме $\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}$. Скалярное неравенство для строки r, где все элементы кроме $\widetilde{a}_{rj}$ равны $\mathbb{0}$, записывается в виде $\widetilde{a}_{rj}x_j \geq \Delta^{-1}p_r$, что эквивалентно неравенству $x_j \geq \Delta^{-1}\widetilde{a}_{rj}^{-1}p_r$.

В столбце j возьмем элемент $\widetilde{a}_{sj}$, который расположен в одной из еще не рассмотренных строк s. При выполнении условия $\widetilde{a}_{sj}p_s^{-1} \geq \widetilde{a}_{rj}p_r^{-1}$, которое эквивалентно условию $\widetilde{a}_{sj} \geq \widetilde{a}_{rj}p_r^{-1}p_s$, имеем $\widetilde{a}_{sj}x_j \geq \widetilde{a}_{rj}p_r^{-1}p_s\Delta^{-1}\widetilde{a}_{rj}^{-1}p_r \geq \Delta^{-1}p_s$. Тогда неравенство $a_{s1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{sn}x_n \geq \Delta^{-1}p_s$ в системе (6) выполняется вне зависимости от значений x_l для всех $l \neq j$. В этом случае дальнейшее исследование ненулевых элементов

$\widetilde{a}_{sl}$ в строке s не может дать новых решений. Эти элементы можно заменить нулями, не нарушая неравенство, что уменьшает число альтернатив, которые требуется рассмотреть.

Заметим, что для проверки условия $\widetilde{a}_{sj}p_s^{-1} \geq \widetilde{a}_{rj}p_r^{-1}$ удобно предварительно умножить каждую строку i матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}$ на элемент p_i^{-1}, а затем исследовать элементы полученной матрицы, которую обозначим через $\widehat{\boldsymbol{A}}' = (\widehat{a}'_{ij})$.

Если в какой-то строке матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}'$ преобладают элементы, являющиеся минимальными ненулевыми элементами в своих столбцах, то, вероятно, стоит начать перебор с подобной строки. Это позволит поочередно фиксировать такие элементы и не рассматривать строки, содержащие остальные ненулевые элементы соответствующих столбцов, а при отсутствии в таком столбце нулевых элементов сразу получать одну из границ.

Отсюда видно, что выбор строки в матрице может сыграть существенную роль для уменьшения количества рассматриваемых подмножеств семейства решений.

Некоторые нижние границы подмножеств, полученные с помощью процедуры построения полного семейства решений, могут быть несущественными в том смысле, что их удаление не повлияет на полученное множество решений. Нетрудно видеть, например, что если для каких-то двух границ $\boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{b}_j$ выполняется неравенство $\boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{b}_j$, то граница $\boldsymbol{b}_j$ может быть удалена из списка без потери решений.

Сформулируем критерий для отбрасывания несущественных границ.

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{B}$ — матрица, столбцы которой определяют нижние границы для некоторого набора подмножеств семейства решений* (9)*, а $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$, — еще одна граница. Тогда граница $\boldsymbol{b}_1$ является несущественной, если выполняется неравенство*

$$\mathbf{1}^T(\boldsymbol{b}_1^-\boldsymbol{B})^- \geq \mathbb{1}. \tag{12}$$

Доказательство. Подмножество с новой нижней границей $\boldsymbol{b}_1$ уже принадлежит семейству решений и может не учитываться, если найдется выпуклая комбинация нижних границ подмножеств семейства, которая не меньше, чем $\boldsymbol{b}_1$. Учитывая, что имеющиеся нижние границы подмножеств образуют столбцы матрицы $\boldsymbol{B}$, это условие эквивалентно выполнению неравенства $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{b}_1$ для некоторого вектора $\boldsymbol{u}$ такого, что $\mathbf{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}$.

Решение неравенства относительно $\boldsymbol{u}$ с помощью леммы 1 дает $\boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{b}_1^-\boldsymbol{B})^-$. Для выполнения условия $\mathbf{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна координата вектора $(\boldsymbol{b}_1^-\boldsymbol{B})^-$ была не меньше $\mathbb{1}$. Это условие записывается в виде неравенства $\mathbf{1}^T(\boldsymbol{b}_1^-\boldsymbol{B})^- \geq \mathbb{1}$, которое является условием отбрасывания границы $\boldsymbol{b}_1$. □

8. Численный пример. Рассмотрим задачу (4), которая формулируется для полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ при $n = 3$. Предположим, что имеются матрица $\boldsymbol{A}$ и векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -1 & -7 & -3 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$, которые решают задачу. Сначала по формуле (5) определим минимум Δ, для чего последовательно вычислим

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^- \boldsymbol{p} = 4, \qquad \Delta = 2.$$

Для нахождения разреженной матрицы задачи построим пороговую матрицу

$$\Delta^{-2}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^- = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -1 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Заменяя нулем $\mathbb{0} = -\infty$ те элементы матрицы $\boldsymbol{A}$, которые строго меньше элементов матрицы $\Delta^{-2}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^-$, формируем матрицу $\widehat{\boldsymbol{A}}$, а умножая каждую строку $\widehat{\boldsymbol{A}}$ на соответствующий элемент вектора $\boldsymbol{p}^-$, находим матрицу $\widehat{\boldsymbol{A}}'$. В результате получим

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -1 & \mathbb{0} & -3 \\ -2 & 1 & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{A}}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -5 & \mathbb{0} & -7 \\ -5 & -2 & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Применим процедуру построения полного решения. Заметим, что в матрице $\widehat{\boldsymbol{A}}'$ во второй и в третьей строках все ненулевые элементы являются наименьшими ненулевыми элементами в своих столбцах. В силу этого следует начать с выбора соответствующих элементов в матрице $\widehat{\boldsymbol{A}}$, что позволит сократить перебор разреженных матриц. Для определенности начнем со второй строки.

Сначала зафиксируем элемент $\widehat{a}_{21}$. Учитывая, что в матрице $\widehat{\boldsymbol{A}}'$ элемент $\widehat{a}'_{21}$ не превосходит элементов $\widehat{a}'_{11}$ и $\widehat{a}'_{31}$, можно сохранить без изменений соответствующие элементы $\widehat{a}_{11}$ и $\widehat{a}_{31}$ матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}$, а остальные элементы этой матрицы заменить нулями.

В результате получаем матрицу $\boldsymbol{A}_1$, нижнюю границу $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{p}$, а также матрицу границ $\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{b}_1)$ в виде

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -1 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -2 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Теперь зафиксируем элемент $\widehat{a}_{23}$ во второй строке матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}$. В силу того, что для элементов матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}'$ выполняется условие $\widehat{a}'_{23} \leq \widehat{a}'_{13}$, в матрице $\widehat{\boldsymbol{A}}$ можно оставить элемент $\widehat{a}_{13}$, а все другие элементы первой строки заменить нулями.

В оставшейся третьей строке следует по очереди фиксировать каждый ее ненулевой элемент. Получим следующие матрицы и соответствующие им нижние границы:

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & 2 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & -3 \\ -2 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_2^-\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ \mathbb{0} \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & 2 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & -3 \\ \mathbb{0} & 1 & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_3 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_3^-\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выясним, являются ли полученные границы существенными. Проверка условия (12) приводит к следующим результатам:

$$\boldsymbol{1}^T(\boldsymbol{b}_2^-\boldsymbol{B}_1)^- = 0 = \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{1}^T(\boldsymbol{b}_3^-\boldsymbol{B}_1)^- = \mathbb{0} < \mathbb{1}.$$

Для границы $\boldsymbol{b}_2$ условие оказывается выполненным, а потому ее можно не учитывать. Заметим, что непосредственная проверка выполнения неравенства $\boldsymbol{b}_1 \leq \boldsymbol{b}_2$ подтверждает этот результат. Однако для границы $\boldsymbol{b}_3$ условие не выполняется и ее следует добавить к имеющейся границе $\boldsymbol{b}_1$. Окончательно получим матрицу границ $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3)$.

Общее решение (10) задачи (4) записывается в форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 0 \\ \mathbb{0} & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{1}^T \boldsymbol{u} = \mathbb{1}.$$

Представление решения в виде (9) дает два подмножества решений:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 \leq 4, \qquad x_3 \leq 5;$$
$$x_1 \leq 3, \qquad 0 \leq x_2 \leq 4, \qquad x_3 = 5.$$

В заключение авторы благодарят рецензентов за ряд важных замечаний и предложений, которые были учтены при подготовке окончательного текста статьи.

Литература

1. *Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity. In: Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.

2. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

3. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications. In Ser.: Advances in Imaging and Electron Physics / ed. by P. W. Hawkes. San Diego: Academic Press, 1994. Vol. 90. P. 1–121. https://doi.org/10.1016/S1076-5670(08)70083-1

4. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations over Them. In Ser.: Mathematics and Its Applications. Springer, 2003. Vol. 556. 241 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

5. *Heidergott B, Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. In: Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.

6. *Gondran M., Minoux M.* Graphs, Dioids and Semirings. In Ser.: Operations Research / Computer Science Interfaces. New York: Springer, 2008. Vol. 41. 383 p. https://doi.org/10.1007/978-0-387-75450-5

7. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

8. *Glazek K.* A Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Sciences. Springer, 2002. 392 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9964-1

9. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра положительных матриц // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 1967. Bd. 3, N 1. S. 39–72.

10. *Cuninghame-Green R. A.* Projections in minimax algebra // Math. Program. 1976. Vol. 10. P. 111–123. https://doi.org/10.1007/BF01580656

11. *Zimmermann K.* Some optimization problems with extremal operations // Mathematical Programming at Oberwolfach II. Vol. 22 of Mathematical Programming Studies / ed. by B. Korte, K. Ritter. Berlin: Springer, 1984. P. 237–251. https://doi.org/10.1007/BFb0121020

12. *Cechlárová K., Cuninghame-Green R. A.* Soluble approximation of linear systems in max-plus algebra // Kybernetika. 2003. Vol. 39, N 2. P. 137–141.

13. *Butkovič P., Tam K. P.* On some properties of the image set of a max-linear mapping // Tropical and Idempotent Mathematics. Vol. 495 of Contemporary Mathematics / ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence: AMS, 2009. P. 115–126. https://doi.org/10.1090/conm/495/09694

14. *Кривулин Н. К.* О решении линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 5: Сб. науч. статей / под ред. М. К. Чиркова. СПб.: ВВМ, 2004. С. 105–113.

15. *Krivulin N.* A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Trans. Math. 2012. Vol. 11, N 7. P. 605–614.

16. *Krivulin N.* Solution of linear equations and inequalities in idempotent vector spaces // Int. J. Appl. Math. Inform. 2013. Vol. 7, N 1. P. 14–23.

17. *Krivulin N., Zimmermann K.* Direct solutions to tropical optimization problems with nonlinear objective functions and boundary constraints // Mathematical Methods and Optimization Techniques in Engineering / ed. by D. Biolek, and H. Walter, I. Utu, C. von Lucken. WSEAS Press, 2013. P. 86–91.

18. *Krivulin N.* Algebraic solution of tropical optimization problems via matrix sparsification with application to scheduling // J. Log. Algebr. Methods Program. 2017. Vol. 89. P. 150–170. https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2017.03.004

19. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

20. *Krivulin N. K., Sorokin V. N.* Solution of a tropical optimization problem with linear constraints // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2015. Vol. 48, N 4. P. 224–232. https://doi.org/10.3103/S1063454115040081

Статья поступила в редакцию 7 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Кривулин Николай Кимович — д-р физ.-мат. наук, доц.; nkk@math.spbu.ru
Сорокин Владимир Николаевич — SovanSB@gmail.com

On solution of a multidimensional tropical optimization problem using matrix sparsification

N. K. Krivulin, V. N. Sorokin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivulin N. K., Sorokin V. N. On solution of a multidimensional tropical optimization problem using matrix sparsification. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 91–104. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.110

In this work a complete solution for a problem of minimizing a function defined on vectors with elements from a tropical (idempotent) semifield is proposed. The tropical optimization problem under consideration arises, for instance, when one needs to find the best, in the sense of Chebyshev metric, approximate solution for tropical vector equations, and occurs in various applications, including scheduling, location and decision-making problems. To solve the problem, first, the minimum value of the objective function is obtained, a characterization of the solution set in the form of a system of inequalities is proposed, and one of the solutions is presented. Next, by using a sparsification of the matrix in the problem, an extended set of solutions, and then a complete solution in the form of a family of subsets are derived. Procedures are described that allow reducing the number of subsets, which one needs to examine when constructing the complete solution. It is shown how the complete solution can be represented in parametric way in a compact vector form. The solution obtained extends known results, which are usually confined to the derivation of one solution and do not allow to find the entire solution set. To illustrate the main results of the work numerical examples are given for the solution of a problem in the set of three-dimensional vectors.

Keywords: idempotent semifield, tropical optimization, Chebyshyov approximation, complete solution, matrix sparsification.

References

1. Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P., *Synchronization and Linearity.* In: *Wiley Series in Probability and Statistics* (Wiley, Chichester, 1993, 514 p.).

2. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N., *Idempotent Analysis and Its Applications to Optimal Control Theory* (Nauka, Moscow, 1994, 144 p.) [in Russian].

3. Cuninghame-Green R. A., *Minimax algebra and applications*. In Ser. *Advances in Imaging and Electron Physics* **90**, 1–121 (ed. by P. W. Hawkes, Academic Press, San Diego, 1994). https://doi.org/10.1016/S1076-5670(08)70083-1

4. Golan J. S., *Semirings and Affine Equations over Them*. In Ser. *Mathematics and Its Applications* **556** (Springer, 2003, 241 p.). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

5. Heidergott B, Olsder G. J., van der Woude J., *Max Plus at Work*. In: *Princeton Series in Applied Mathematics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 2006, 226 p.).

6. Gondran M., Minoux M., *Graphs, Dioids and Semirings*. In Ser. *Operations Research / Computer Science Interfaces* **41** (Springer, New York, 2008, 383 p.). https://doi.org/10.1007/978-0-387-75450-5

7. Krivulin N. K., *Methods of Idempotent Algebra for Problems in Modeling and Analysis of Complex Systems* (Saint Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2009, 256 p.) [in Russian].

8. Glazek K., *A Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Sciences* (Springer, 2002, 392 p.). https://doi.org/10.1007/978-94-015-9964-1

9. Vorob'ev N. N., "The extremal algebra of positive matrices", *Elektron. Informationsverarb. Kybernet* **3**(1), 39–72 (1967) [in Russian].

10. Cuninghame-Green R. A., "Projections in minimax algebra", *Math. Program* **10**, 111–123 (1976). https://doi.org/10.1007/BF01580656

11. Zimmermann K., "Some optimization problems with extremal operations", *Mathematical Programming at Oberwolfach II. Vol. 22 of Mathematical Programming Studies*, 237–251 (eds B. Korte, K. Ritter; Berlin, Springer, 1984). https://doi.org/10.1007/BFb0121020

12. Cechlárová K., Cuninghame-Green R. A., "Soluble approximation of linear systems in max-plus algebra", *Kybernetika* **39**(2), 137–141 (2003).

13. Butkovič P., Tam K. P., "On some properties of the image set of a max-linear mapping", *Tropical and Idempotent Mathematics. Vol. 495 of Contemporary Mathematics*, 115–126 (ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence, AMS, 2009). https://doi.org/10.1090/conm/495/09694

14. Krivulin N. K., "On solution of linear vector equations in idempotent algebra", *Mathematical Models. Theory and Applications*, Issue 5, 105–113 (ed. by M. K. Chirkov. St. Petersburg, VVM, 2004) [in Russian].

15. Krivulin N., "A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance", *WSEAS Trans. Math.* **11**(7), 605–614 (2012).

16. Krivulin N., "Solution of linear equations and inequalities in idempotent vector spaces", *Int. J. Appl. Math. Inform.* **7**(1), 14–23 (2013).

17. Krivulin N., Zimmermann K., "Direct solutions to tropical optimization problems with nonlinear objective functions and boundary constraints", *Mathematical Methods and Optimization Techniques in Engineering*, 86–91 (ed. by D. Biolek, and H. Walter, I. Utu, C. von Lucken; WSEAS Press, 2013).

18. Krivulin N., "Algebraic solution of tropical optimization problems via matrix sparsification with application to scheduling", *J. Log. Algebr. Methods Program* **89**, 150–170 (2017). https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2017.03.004

19. Krivulin N., "Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems", *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

20. Krivulin N. K., Sorokin V. N., "Solution of a tropical optimization problem with linear constraints", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **48**(4), 224–232 (2015). https://doi.org/10.3103/S1063454115040081

Author's information:

Krivulin Nikolai K. — nkk@math.spbu.ru
Sorokin Vladimir N. — SovanSB@gmail.com