УДК 534.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 34C55, 34D23

Частотный критерий глобальной устойчивости динамических систем с гистерезисным оператором Прандтля*

Г. А. Леонов, К. Д. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Леонов Г. А., Александров К. Д.* Частотный критерий глобальной устойчивости динамических систем с гистерезисным оператором Прандтля // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 105–110. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.111

В настоящей работе рассматриваются динамические системы с гистерезисным оператором Прандтля. Для рассмотренного класса динамических систем в работе сформулирован и доказан частотный критерий глобальной устойчивости. Для динамической системы второго порядка с оператором Прандтля продемонстрировано преимущество полученного критерия по сравнению с известным критерием Логеманна—Райена.

Ключевые слова: динамические системы, гистерезис, оператор Прандтля, оператор упор, частотные критерии устойчивости.

Введение. Хорошо известны классические результаты [1–3] о глобальной устойчивости и колебаниях системы второго порядка, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{\sigma} + \dot{\sigma} + k\varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^{t}, \xi_0\right](t) = 0 \qquad (k > 0) \tag{1}$$

с гистерезисными операторами «люфт» (рис. 1, *а*), «реле с гистерезисом» (рис. 1, *б*), «реле с гистерезисом и нечувствительностью» (рис. 1, *в*), которые были получены с помощью развития метода точечных отображений для систем второго порядка с гистерезисными нелинейностями.

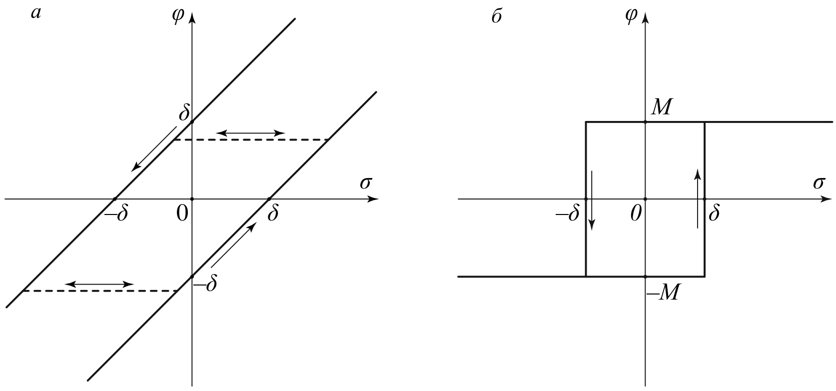
А. А. Андроновым и Н. Н. Баутиным [1] для системы (1) с гистерезисным оператором «люфт» найдено критическое значение параметра $k_0 = 3{,}04\ldots$, определяемое из соотношения

$$\ln k + \frac{2}{\sqrt{4k-1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{4k-1}\right) = 0 \qquad (0 < \operatorname{arctg} < \pi),$$

такое, что при $0 < k < k_0$ система (1) устойчива в целом, а при $k > k_0$ имеет единственное нетривиальное устойчивое периодическое решение (предельный цикл). При этом все точки стационарного множества системы (1) принадлежат области, ограниченной этой траекторией.

А. А. Фельдбаум [2] исследовал систему (1) с гистерезисным оператором «реле с гистерезисом и нечувствительностью» и нашел следующее необходимое и достаточное условие существования нетривиального периодического решения, траектория

*Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-21-00041).



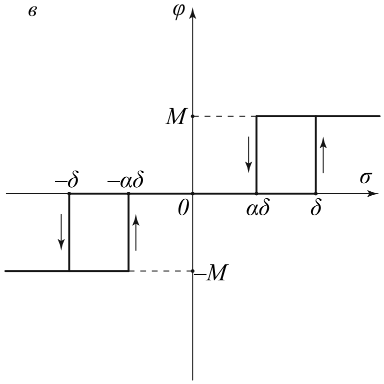


Рис. 1. Гистерезисные операторы: «люфт» (*а*); «реле с гистерезисом» (*б*); «реле с гистерезисом и нечувствительностью» (*в*).

которого «охватывает» стационарное множество:

$$\frac{2\delta}{kM} + \ln\left(1 - \frac{\delta(1+\alpha)}{kM}\right) > 0. \tag{2}$$

Под логарифмом в условии (2) понимается вещественный логарифм, т. е. в этом случае должно быть выполнено неравенство $kM > \delta(1+\alpha)$. В случае нарушения условия (2) система (1) будет устойчива в целом.

Н. А. Железцовым [3] было показано, что у системы (1) с гистерезисным оператором «реле с гистерезисом» существует предельный цикл для всех $k > 0$.

Таким образом, в каждой из систем, исследованных в работах [1–3], могут существовать предельные циклы. Что происходит в системе (1) с оператором Прандтля [4] (другие названия: оператор модели Прандтля, оператор упруго-пластического гистерезиса, оператор «упор» (stop) [5–8]), график которого изображен на рис. 2?

В настоящей статье получен частотный критерий глобальной устойчивости, из которого следует, что для системы (1) с оператором Прандтля при любых $k > 0$ имеет место глобальная устойчивость и, следовательно, отсутствуют предельные циклы.

Основные результаты. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = Az(t) + b\xi(t), \\ &\frac{d\sigma}{dt} = c^* z(t) + \rho\xi(t), \\ &\xi(t) = \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^{t}, \xi_0\right](t), \end{aligned} \tag{3}$$

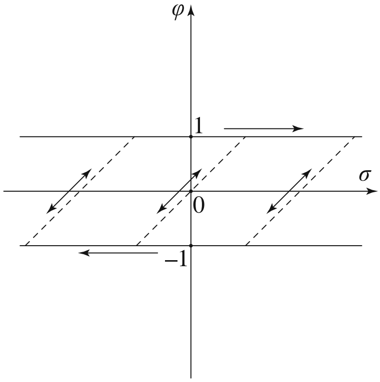


Рис. 2. Гистерезисный оператор Прандтля.

где A — вещественная $(n \times n)$-матрица, b, c — вещественные n-векторы, ρ — число и $\varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^{t}, \xi_0\right](t)$ — оператор Прандтля (рис. 2). Аналитическое определение оператора Прандтля и его механическая интерпретация даны в [5–8]. Введем в рассмотрение передаточную функцию

$$K(p) = c^* \left(A - pI\right)^{-1} b - \rho$$

системы (3), предполагая, что функция $c^* \left(A - pI\right)^{-1} b$ невырождена [9], т. е. ее знаменатель имеет степень n и не имеет общих корней с числителем.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\mathrm{Re} K(i\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^1, \tag{4}$$

и при $\rho = 0$

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^2 \mathrm{Re} K(i\omega) > 0. \tag{5}$$

Тогда для любого решения системы (3) *с* $z(0) = z_0$, $\sigma(0) = \sigma_0$, $\varphi\left[\sigma_0, \xi_0\right] = \xi_0$ *выполнены соотношения*

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = \mathrm{const}, \qquad \lim_{t \to +\infty} \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^{t}, \xi_0\right](t) = 0.$$

Доказательство. По частотной теореме (см. [10, 11]) из условий (4), (5) следует существование положительно определенной матрицы $H > 0$ и числа $\varepsilon > 0$ таких, что при любых $z \in \mathbb{R}^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^1$ выполнено соотношение

$$z^* H(Az + b\xi) + \xi(c^* z + \rho\xi) \leq -\varepsilon |z|^2. \tag{6}$$

Отсюда следует, что для функции

$$V(t) = z(t)^* H z(t) + \int_0^t \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^{s}, \xi_0\right](s) ds$$

справедливо неравенство

$$\dot{V}(t) \leq -\varepsilon |z(t)|^2. \tag{7}$$

Поскольку оператор Прандтля удовлетворяет условию положительности по Якубовичу [12], имеем соотношение

$$\int\limits_0^t \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^s, \xi_0\right](s)ds \geq C, \qquad \forall t \geq 0, \tag{8}$$

для некоторого числа C.

Из (7) и (8) получим

$$\int\limits_0^{+\infty} |z(t)|^2 dt < +\infty. \tag{9}$$

Из гурвицевости матрицы A и ограниченности $\varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^t, \xi_0\right](t)$ следует ограниченность $z(t)$ на $[0, +\infty)$. Но тогда ограничена и $\dot{z}(t)$, поэтому ограничена на $[0, +\infty)$ функция $\left(|z(t)|^2\right)^\bullet$. Отсюда и из (9) получим соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0. \tag{10}$$

Из (7), (8) и (10) следует существование предела функции

$$\int\limits_0^t \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^s, \xi_0\right](s)ds$$

при $t \to +\infty$. Отсюда и из графика на рис. 2 следует существование пределов

$$\lim_{t\to+\infty} \sigma(t), \qquad \lim_{t\to+\infty} \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^t, \xi_0\right](t) = 0.$$

■

Отметим, что продемонстрированный в теореме подход может быть распространен на более общие гистерезисные операторы, удовлетворяющие условию положительности.

Рассмотрим теперь уравнение (1), записанное в форме системы (3):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -z(t) - k\xi(t), \\ \frac{d\sigma}{dt} = z(t), &\qquad \xi(t) = \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^t, \xi_0\right](t). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\rho = 0$, $K(p) = k/(p+1)$ и выполняются условия (4), (5) при любом $k > 0$. Поэтому для системы (11) имеют место соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{\sigma}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = \text{const}, \qquad \lim_{t\to+\infty} \varphi\left[\sigma(\tau)|_{\tau=0}^t, \xi_0\right](t) = 0,$$

что и означает отсутствие в системе (1) предельных циклов.

Заметим, что широко известный критерий Логеманна—Райена [13–16], который получен для интегральных уравнений и весьма широкого класса гистерезисных операторов, для системы (1) с оператором Прандтля дает условие устойчивости $k < 0{,}5$.

Литература

1. *Андронов А. А., Баутин Н. Н.* Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования // Доклады АН СССР. 1945. Т. 46, № 7. С. 304–307.

2. *Фельдбаум А. А.* Простейшие релейные системы автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1949. № 10. С. 249–260.

3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. 2-е изд. Переработка и дополнение Н. А. Железцова. М.: Физматгиз, 1959. 914 с.

4. *Prandtl L.* Spannungsverteilung in plastischen körpern // First International Congress for Applied Mechanics. Delft, 1924. P. 43–54.

5. *Visintin A.* Differential Models of Hysteresis / eds F. John, J. E. Marsden, L. Sirovich. New York: Springer-Verlag, 1994. 411 p.

6. *Brokate M., Sprekels J.* Hysteresis and phase transitions. New York: Springer-Verlag, 1996. 358 p.

7. *Visintin A.* Mathematical models of hysteresis // The Science of Hysteresis. Vol. 1. Mathematical Modeling and Applications / eds G. Berotti, I. D. Mayergoyz. Elsevier: Academic Press, 2006. P. 1–114.

8. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.

9. *Leonov G. A., Burkin I. M., Shepelyavy A. I.* Frequency Methods in Oscillation Theory. Dordretch: Kluwer, 1996. 414 p.

10. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

11. *Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996.

12. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26, № 5. С. 753–763.

13. *Logemann H., Ryan E. P.* Systems with hysteresis in the feedback loop: existence, regularity and asymptotic behaviour of solutions // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2003. Vol. 9. P. 169–196.

14. *Logemann H., Ryan E. P., Shvartsman I.* A class of differential-delay systems with hysteresis: asymptotic behaviour of solutions // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2008. Vol. 69, N 1. P. 363–391.

15. *Logemann H., Ryan E. P.* Time-varying and adaptive integral control of infinite-dimensional regular linear systems with input nonlinearities // SAIM Journal on Control and Optimization. 2000. Vol. 38, N 4. P. 1120–1144.

16. *Logemann H., Mawby A. D.* Low-gain integral control of infinite-dimensional regular linear systems subject to input hysteresis // Advances in mathematical systems theory / eds F. Colonius, U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, F. Wirth. Boston, 2000. P. 255–293.

Статья поступила в редакцию 12 августа 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Леонов Геннадий Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН; g.leonov@spbu.ru
Александров Константин Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, Ph.D.; k.d.aleksandrov@spbu.ru

Frequency-domain criterion of global stability for dynamical systems with Prandtl hysteresis operator

G. A. Leonov, K. D. Aleksandrov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Leonov G. A., Aleksandrov K. D. Frequency-domain criterion of global stability for dynamical systems with Prandtl hysteresis operator. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 105–110. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.111

In the present work dynamical systems with Prandtl hysteresis operator are considered. For the class of dynamical systems the frequency-domain criterion is formulated and proved. For two-dimensional dynamical system the advantage of obtained criterion compared to well-known Logemann—Ryan criterion is demonstrated.

Keywords: dynamical systems, hysteresis, Prandtl hysteresis operator, stop operator, frequency-domain criteria of stability.

References

1. Andronov A. A., Bautin N. N., "On a degenerate case of the general problem of direct control", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **46**(7), 304–307 (1945) [in Russian].

2. Feldbaum A. A., "The simplest relay systems of automatic control", *Automation and remote control* **10**(4), 249–260 (1949) [in Russian].

3. Andronov A. A., Witt A. A., Khaikin S. E., *Theory of oscillations* (improved and extended by N. A. Zheleztsov, Fizmatgiz, Moscow, 1959, 914 p.) [in Russian].

4. Prandtl L., "Spannungsverteilung in plastischen körpern", *First International Congress for Applied Mechanics*, 43–54 (Delft, 1924).

5. Visintin A., *Differential Models of Hysteresis* (eds F. John, J. E. Marsden, L. Sirovich; Springer-Verlag, New York, 1994, 411 p.).

6. Brokate M., Sprekels J., *Hysteresis and phase transitions* (Springer-Verlag, New York, 1996, 358 p.).

7. Visintin A., "Mathematical models of hysteresis", *The Science of Hysteresis. Vol. 1. Mathematical Modeling and Applications*, 1–114 (eds G. Berotti, I. D. Mayergoyz; Academic Press, Elsevier, 2006).

8. Krasnoselskii M. A., Pokrovskii A. V., *Systems with hysteresis* (Springer, 1989).

9. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepelyavy A. I., *Frequency Methods in Oscillation Theory* (Kluwer, Dordretch, 1996, 414 p.).

10. Gelig A., Leonov G., Yakubovich V., *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities* (World Scientific, 2004).

11. Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B., *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications* (World Scientific, Singapore, 1996).

12. Yakubovich V. A., "The method of matrix inequalities in the theory of stability of non-linear controlled systems. III. Absolute stability of systems with hysteresis non-linearities", *Automation and Remote Control* **26**, 753–763 (1965) [in Russian].

13. Logemann H., Ryan E. P., "Systems with hysteresis in the feedback loop: existence, regularity and asymptotic behaviour of solutions", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **9**, 169–196 (2003).

14. Logemann H., Ryan E. P., Shvartsman I., "A class of differential-delay systems with hysteresis: asymptotic behaviour of solutions", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **69**(1), 363–391 (2008).

15. Logemann H., Ryan E. P., "Time-varying and adaptive integral control of infinite-dimensional regular linear systems with input nonlinearities", *SAIM Journal on Control and Optimization* **38**(4), 1120–1144 (2000).

16. Logemann H., Mawby A. D., "Low-gain integral control of infinite-dimensional regular linear systems subject to input hysteresis", *Advances in mathematical systems theory*, 255–293 (eds F. Colonius, U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, F. Wirth; Boston, 2000).

Author's information:

Leonov Gennady A. — g.leonov@spbu.ru
Aleksandrov Konstantin D. — k.d.aleksandrov@spbu.ru