УДК 517.952 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 35G20

Многомерное неавтономное уравнение, содержащее произведение степеней частных производных

И. В. Рахмелевич

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Российская Федерация, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Для цитирования: *Рахмелевич И. В.* Многомерное неавтономное уравнение, содержащее произведение степеней частных производных // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 119–130. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.113

Рассмотрен класс многомерных дифференциальных уравнений, содержащих произведение степеней частных производных любого порядка. Получены решения с аддитивным, мультипликативным и комбинированным разделениями переменных. Получено семейство псевдополиномиальных решений, выражающихся через полиномы от независимых переменных с произвольными коэффициентами и функции, являющиеся решениями некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены решения типа бегущей волны и автомодельные решения, а также семейства решений, имеющие вид суммы или произведения решений типа бегущей волны и автомодельных решений. Далее, получены решения, представленные в виде функций более сложных аргументов, которые выражаются через линейные комбинации и произведения исходных независимых переменных. Для всех полученных решений сформулированы условия их существования, которым должна удовлетворять правая часть уравнения и его параметры.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, метод разделения переменных, степенная нелинейность, решение типа бегущей волны, автомодельное решение, псевдополиномиальное решение.

1. Введение. Важнейшим направлением современной математической физики является исследование многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение их точных решений [1–9]. В частности, в известных справочниках [1, 2] представлены решения некоторых уравнений первого и второго порядков, содержащих произведения производных. В работе [7] изучались решения специального вида — псевдополиномиальные решения для двумерного уравнения, которое содержит произведение частных производных любого порядка. Настоящая работа посвящена исследованию класса многомерных уравнений, левая часть которых также содержит произведение степеней частных производных любого порядка. В качестве основного метода используется метод разделения переменных [1–3], который является одним из наиболее эффективных методов решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных.

2. Постановка задачи. Простейшие решения. Рассмотрим класс уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $u(x_1, \ldots, x_N)$:

$$\prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial^{m_n} u}{\partial x_n^{m_n}} \right)^{\beta_n} = g(u) f(x_1, \ldots, x_N), \tag{1}$$

где $g(u), f(x_1,\dots,x_N)$ — некоторые заданные функции, β_n — вещественные параметры. Уравнения вида (1) встречаются, например, в нелинейной теории фильтрации и при описании движений нелинейной вязко-пластической среды [1, с. 85]. Также к классу уравнений (1) в определенной области значений параметров относится уравнение со степенными нелинейностями, описывающее оптимальную коррекцию случайных возмущений [1, с. 261].

Следующая теорема определяет простейшие решения уравнения (1), получаемые методом разделения переменных.

Теорема 1. *1. Пусть выполнены условия*

$$g(u) = g_0 \exp(\gamma u), \quad f(x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i). \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x_1,\dots,x_N) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i), \tag{3}$$

где $U_i(x_i)$ при всех $i = 1,\dots,N$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ)

$$U_i^{(m_i)}(x_i) \exp\left(-\frac{\gamma U_i(x_i)}{\beta_i}\right) = \lambda_i \left[f_i(x_i)\right]^{1/\beta_i}, \tag{4}$$

причем постоянные λ_i удовлетворяют условию

$$\prod_{i=1}^{N} \lambda_i^{\beta_i} = g_0. \tag{5}$$

2. Пусть выполнены условия

$$g(u) = g_0 u^\gamma, \quad f(x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i). \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{N} U_i(x_i), \tag{7}$$

где $U_i(x_i)$ при всех $i = 1,\dots,N$ удовлетворяют ОДУ

$$U_i^{(m_i)}(x_i) \left[U_i(x_i)\right]^{(\beta_\Sigma-\gamma)/\beta_i-1} = \lambda_i \left[f_i(x_i)\right]^{1/\beta_i}, \quad \beta_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \beta_i, \tag{8}$$

постоянные λ_i удовлетворяют условию (5).

Доказательство. 1. Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям (2). Решение уравнения (1) ищем в виде (3). Подставив это выражение в (1), в результате элементарных преобразований получаем

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i}}{f_i(x_i) \exp\left(\gamma U_i(x_i)\right)} = g_0. \tag{9}$$

Так как левая часть уравнения (9) представляет собой произведение сомножителей, зависящих от разных переменных, а правая часть постоянна, то функции $U_i(x_i)$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i}}{f_i(x_i)\exp\left(\gamma U_i(x_i)\right)} = \lambda_i^{\beta_i}, \tag{10}$$

где λ_i — некоторые постоянные, удовлетворяющие условию (5). Из (10) непосредственно следует уравнение (4) для функции $U_i(x_i)$.

2. Пусть теперь правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям (6). Подставляя решение в виде (7) в уравнение (1), находим

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i}\left[U_i(x_i)\right]^{\beta_\Sigma-\gamma-\beta_i}}{f_i(x_i)} = g_0. \tag{11}$$

Разделяя переменные в уравнении (11) аналогично первой части доказательства, получаем уравнение (8) для функции $U_i(x_i)$ и условие (5) для постоянных λ_i. Теорема доказана.

Далее представим множество значений $I = \{1, \ldots, N\}$ индекса, нумерующего независимые переменные, в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k $(k = 1, \ldots, K)$. Тогда множество независимых переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ может быть разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_i\}_{i\in I_k}$; N_k — число элементов в каждом из подмножеств I_k, X_k. Также здесь и далее всюду будем обозначать $\Xi = \{1, \ldots, K\}$ — множество значений индекса k.

Следующая теорема определяет решения уравнения (1) с комбинированным разделением переменных.

Теорема 2. *Пусть функции в правой части уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$g(u) = g_0, \quad f(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i). \tag{12}$$

Тогда уравнение (1) имеет решения следующего вида:

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{k=1}^{K} \prod_{i\in I_k} U_i(x_i), \tag{13}$$

где функции $U_i(x_i)$ при всех $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют уравнению

$$U_i^{(m_i)}(x_i)\left[U_i(x_i)\right]^{\beta_{\Sigma k}/\beta_i-1} = \lambda_i\left[f_i(x_i)\right]^{1/\beta_i}, \quad \beta_{\Sigma k} = \sum_{j\in I_k}\beta_j, \tag{14}$$

постоянные λ_i удовлетворяют условию (5).

Доказательство. При любом выбранном способе разбиения множества I на подмножества I_k левую часть уравнения (1) можно представить так:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial^{m_n}u}{\partial x_n^{m_n}}\right)^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{K}\prod_{n\in I_k}\left(\frac{\partial^{m_n}u}{\partial x_n^{m_n}}\right)^{\beta_n}. \tag{15}$$

Для решения в виде (13) частные производные запишутся как

$$\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}} = \frac{U_i^{(m_i)}(x_i)}{U_i(x_i)} \prod_{n\in I_k} U_n(x_n). \tag{16}$$

Подставляя (13) в уравнение (1) и используя (15) и (16), преобразуем уравнение (1) к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \prod_{i\in I_k} \frac{\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i} [U_i(x_i)]^{\beta_{\Sigma k}-\beta_i}}{f_i(x_i)} = g_0, \tag{17}$$

где $\beta_{\Sigma k}$ определяется второй формулой (14). Разделяя переменные в уравнении (17) аналогично теореме 1, получаем уравнение (14) для функций $U_i(x_i)$ и соотношение (5) для постоянных λ_i. Теорема доказана.

3. Псевдополиномиальные решения.

Определение. *Псевдополиномиальными* будем называть решения, выражающиеся через полиномы от независимых переменных и функции, которые либо определяются как решения некоторых ОДУ, либо являются произвольными.

Данное определение было сформулировано в работе [7] при анализе решений двумерного уравнения, содержащего произведения частных производных. Теорема, приведенная ниже, определяет семейство псевдополиномиальных решений для уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть функции в правой части уравнения (1) удовлетворяют условиям (12). Тогда уравнение (1) имеет семейство решений вида*

$$u(x_1,\dots,x_N) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i) \prod_{n=1,n\neq i}^{N} P_{ni}(x_n), \tag{18}$$

где $P_{ni}(x_n)$ — полином степени q_{ni} с произвольными коэффициентами, причем для всех n,i $(n\neq i)$ должны быть выполнены условия

$$m_n > q_{ni}, \tag{19}$$

а функции $U_i(x_i)$ при всех $i \in I$ являются решениями ОДУ

$$U_i^{(m_i)}(x_i) = \lambda_i \left[f_i(x_i)\right]^{1/\beta_i} \prod_{n=1,n\neq i}^{N} \left[P_{in}(x_i)\right]^{-\beta_n/\beta_i}. \tag{20}$$

Доказательство. Запишем выражение для производных, входящих в уравнение (1), от функции, определяемой выражением (18):

$$\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}} = U_i^{(m_i)}(x_i) \prod_{n=1,n\neq i}^{N} P_{ni}(x_n) + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} U_j(x_j) \frac{d^{m_i} P_{ij}(x_i)}{dx_i^{m_i}} \prod_{n=1,n\neq j,i}^{N} P_{nj}(x_n). \tag{21}$$

В силу условия (19) имеем $\frac{d^{m_i} P_{ij}(x_i)}{dx_i^{m_i}} = 0$, поэтому второе слагаемое в правой части (21) равно 0 и, следовательно, можем записать

$$\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}} = U_i^{(m_i)}(x_i) \prod_{n=1,n\neq i}^{N} P_{ni}(x_n). \tag{22}$$

Учитывая соотношение (22), преобразуем левую часть уравнения (1):

$$\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right)^{\beta_i}=\prod_{i=1}^{N}\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i}\cdot\prod_{i,n=1,n\neq i}^{N}\left[P_{ni}(x_n)\right]^{\beta_i}. \tag{23}$$

Переставляя индексы i, n во втором сомножителе в правой части (23), имеем

$$\prod_{i,n=1,n\neq i}^{N}\left[P_{ni}(x_n)\right]^{\beta_i}=\prod_{i,n=1,n\neq i}^{N}\left[P_{in}(x_i)\right]^{\beta_n}. \tag{24}$$

Используя соотношения (23), (24) и учитывая (12), уравнение (1) преобразуем к виду

$$\prod_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{f_i(x_i)}\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i}\prod_{n=1,n\neq i}^{N}\left[P_{in}(x_i)\right]^{\beta_n}\right\}=g_0. \tag{25}$$

Сомножители в фигурных скобках в левой части уравнения (25) зависят от разных переменных x_i. Поэтому, разделяя переменные в (25), получаем

$$\frac{1}{f_i(x_i)}\left[U_i^{(m_i)}(x_i)\right]^{\beta_i}\prod_{n=1,n\neq i}^{N}\left[P_{in}(x_i)\right]^{\beta_n}=\lambda_i^{\beta_i}, \tag{26}$$

причем постоянные λ_i должны удовлетворять условию (5).

Из (26) непосредственно следует, что функции $U_i(x_i)$ должны удовлетворять уравнению (20). Теорема доказана.

4. Решения типа бегущей волны, автомодельные решения и их обобщения. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию*

$$f(x_1,\dots,x_N)=\varphi(z),\quad z=\sum_{j=1}^{N}c_jx_j, \tag{27}$$

где c_j — некоторые постоянные. Тогда уравнение (1) имеет решение вида $u=U(z)$, причем функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ

$$\prod_{i=1}^{N}\left[U^{(m_i)}(z)\right]^{\beta_i}=C_0g(U)\varphi(z),\quad C_0=\prod_{i=1}^{N}c_i^{-m_i\beta_i}. \tag{28}$$

Доказательство. Подставим функцию $u=U(z)$ в уравнение (1). Учитывая выражение (27) для z, находим $\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}=c_i^{m_i}U^{(m_i)}(z)$. Подставляя данное выражение для производных в (1), после элементарных преобразований получаем уравнение (28) для $U(z)$. Теорема доказана.

Теорема, приведенная ниже, обобщает решение типа бегущей волны на случай, когда правая часть уравнения (1) зависит от нескольких линейных комбинаций независимых переменных.

Теорема 5. *1. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_N)$ в правой части (1) удовлетворяет условию*

$$f(x_1,\dots,x_N)=\prod_{k=1}^{K}\varphi_k(z_k),\quad z_k=\sum_{j\in I_k}^{N}c_jx_j, \tag{29}$$

а функция $g(u)$ — первому из условий (2). Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x_1,\dots,x_N)=\sum_{k=1}^{K}U_k(z_k), \tag{30}$$

где функции $U_k(z_k)$ являются решениями ОДУ

$$\exp\left(-\gamma U_k(z_k)\right)\prod_{i\in I_k}\left[U_k^{(m_i)}(z_k)\right]^{\beta_i}=\lambda_k\varphi_k(z_k), \tag{31}$$

а постоянные λ_k должны удовлетворять условию

$$\prod_{k=1}^{K}\lambda_k=g_0C_0. \tag{32}$$

2. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_N)$ в правой части (1) удовлетворяет условию (29), а функция $g(u)$ — первому из условий (6). Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x_1,\dots,x_N)=\prod_{k=1}^{K}U_k(z_k), \tag{33}$$

где функции $U_k(z_k)$ являются решениями ОДУ

$$\left[U_k(z_k)\right]^{\beta_\Sigma-\gamma-\beta_{\Sigma k}}\prod_{i\in I_k}\left[U_k^{(m_i)}(z_k)\right]^{\beta_i}=\lambda_k\varphi_k(z_k), \tag{34}$$

а постоянные λ_k должны удовлетворять условию (32). Величины β_Σ, $\beta_{\Sigma k}$ определяются формулами (8) и (14).

Доказательство. Доказательство проводится полностью аналогично доказательству теоремы 4. Решения в виде (30) и (33) подставляются в уравнение (1), и к полученному уравнению применяется процедура разделения переменных, откуда получаются уравнения (31), (34), а также условие (32) для констант разделения переменных.

Теорема 6. *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_N)$ в правой части (1) имеет вид*

$$f(x_1,\dots,x_N)=\psi(y)\prod_{i=1}^{N}x_i^{\alpha_i},\quad y=\prod_{i=1}^{N}x_i, \tag{35}$$

где $\psi(y)$ — некоторая произвольно заданная функция, а параметры β_i,α_i,m_i при всех $i\in I$ удовлетворяют условию

$$\alpha_i+m_i\beta_i=\lambda, \tag{36}$$

λ — некоторая вещественная постоянная. Тогда уравнение (1) имеет автомодельное решение вида $u = U(y)$, причем функция $U(y)$ удовлетворяет ОДУ

$$\prod_{i=1}^{N} \left[U^{(m_i)}(y)\right]^{\beta_i} = g(U)\psi(y)y^{\lambda-p}, \quad p = \sum_{i=1}^{N} m_i\beta_i. \tag{37}$$

Доказательство. Выражение для производных, входящих в левую часть (1), можно записать так:

$$\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}} = \left(\frac{y}{x_i}\right)^{m_i} U^{(m_i)}(y), \tag{38}$$

где y определяется второй формулой (35). С учетом (38) и (35), преобразуем уравнение (1) к виду

$$y^p \prod_{i=1}^{N} \left[U^{(m_i)}(y)\right]^{\beta_i} \prod_{i=1}^{N} x_i^{-\alpha_i - m_i\beta_i} = g(U)\psi(y). \tag{39}$$

Уравнение (39) может быть сведено к ОДУ относительно функции $U(y)$ только в том случае, если обе его части зависят только от переменной y. В свою очередь, это возможно только при выполнении условия (36). Предполагая, что это условие выполнено, из (39) с учетом второй формулы (35) получаем уравнение (37). Теорема доказана.

Теорема, следующая далее, обобщает автомодельное решение на случай, когда правая часть уравнения (1) включает функции от произведений некоторых подмножеств независимых переменных.

Теорема 7. *1. Пусть функция $g(u)$ определяется первой из формул (2), а функция $f(x_1, \ldots, x_N)$ в правой части (1) имеет вид*

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \prod_{k=1}^{K} \psi_k(y_k), \quad y_k = \prod_{i \in I_k} x_i, \tag{40}$$

где $\psi_k(y_k)$ — некоторые произвольно заданные функции. Также предполагается, что для каждого $k \in \Xi$ и при всех $i \in I_k$ параметры β_i, α_i, m_i удовлетворяют условию

$$\alpha_i + m_i\beta_i = \lambda_k, \tag{41}$$

где λ_k — некоторые вещественные постоянные. Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{k=1}^{K} U_k(y_k), \tag{42}$$

причем для всех $k \in \Xi$ функции $U_k(y_k)$ являются решениями ОДУ

$$\exp\left(-\gamma U_k(y_k)\right) \prod_{i \in I_k} \left[U_k^{(m_i)}(y_k)\right]^{\beta_i} = b_k \psi_k(y_k) y_k^{\lambda_k - p_k}. \tag{43}$$

2. Пусть функция $g(u)$ определяется первой из формул (6), а функция $f(x_1, \ldots, x_N)$ — формулой (40). Пусть также для каждого $k \in \Xi$ и при всех $i \in I_k$

параметры β_i, α_i, m_i удовлетворяют условию (41). Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x_1, \dots, x_N) = \prod_{k=1}^{K} U_k(y_k), \tag{44}$$

причем для всех $k \in \Xi$ функции $U_k(y_k)$ являются решениями ОДУ

$$[U_k(z_k)]^{\beta_\Sigma - \gamma - \beta_{\Sigma k}} \prod_{i \in I_k} \left[U_k^{(m_i)}(y_k)\right]^{\beta_i} = b_k \psi_k(y_k) y_k^{\lambda_k - p_k}, \tag{45}$$

В уравнениях (43), (45) постоянные b_k удовлетворяют условию

$$\prod_{k=1}^{K} b_k = g_0, \tag{46}$$

а также используются величины

$$p_k = \sum_{i \in I_k} m_i \beta_i. \tag{46a}$$

Доказательство. 1. Выражение для производных от функции, определяемой выражением (42), входящих в левую часть (1), можно записать так:

$$\left(\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}}\right)_{i \in I_k} = \left(\frac{y_k}{x_i}\right)^{m_i} U^{(m_i)}(y_k). \tag{47}$$

Используя соотношение (47) и учитывая условие (40), преобразуем уравнение (1) к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{y_k^{p_k} \exp\left(-\gamma U_k(y_k)\right)}{\psi_k(y_k)} \prod_{i \in I_k} \left\{ \left[U_k^{(m_i)}(y_k)\right]^{\beta_i} x_i^{-\alpha_i - m_i \beta_i} \right\} \right\} = g_0. \tag{48}$$

Каждый из K сомножителей в больших фигурных скобках в левой части (48) зависит только от подмножества переменных X_k, откуда следует

$$\frac{y_k^{p_k} \exp\left(-\gamma U_k(y_k)\right)}{\psi_k(y_k)} \prod_{i \in I_k} \left\{ \left[U_k^{(m_i)}(y_k)\right]^{\beta_i} x_i^{-\alpha_i - m_i \beta_i} \right\} = b_k, \tag{49}$$

где b_k — некоторые постоянные, удовлетворяющие условию (46). Далее, поскольку параметры уравнения удовлетворяют условиям (41), выполняется равенство $\prod\limits_{i \in I_k} x_i^{-\alpha_i - m_i \beta_i} = y_k^{-\lambda_k}$. Подставляя данное выражение в (49), получаем после элементарных преобразований уравнение (43) для функции $U_k(y_k)$.

2. Вторая часть теоремы доказывается путем аналогичных рассуждений для решения вида (44) и применения процедуры разделения переменных с учетом условий (41), в результате чего получается уравнение (45). Теорема доказана.

5. Решения в виде функций более сложных аргументов. Данный раздел посвящен решениям уравнения (1) в виде функций от некоторых полиномов специального вида, содержащих линейные комбинации или произведения независимых переменных на некоторых подмножествах.

Теорема 8. *Пусть функция $g(u)$ является произвольной, а функция $f(x_1, \ldots, x_N)$ имеет вид*

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \Phi(\zeta) \prod_{k=1}^{K} z_k^{\alpha_k}, \quad \zeta = \prod_{k=1}^{K} z_k, \quad z_k = \sum_{j \in I_k} c_j x_j. \tag{50}$$

Здесь $\Phi(\zeta)$ — некоторая заданная функция, а параметры α_k при всех $k \in \Xi$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_k + p_k = \lambda, \tag{51}$$

где λ — вещественная постоянная, p_k определяются выражением (46a). Тогда уравнение (1) имеет решение вида $u = U(\zeta)$, причем функция $U(\zeta)$ является решением уравнения

$$\prod_{i=1}^{N} \left[U^{(m_i)}(\zeta)\right]^{\beta_i} = C_0 g(U) \Phi(\zeta) \zeta^{\lambda - p}, \tag{52}$$

где C_0 определяется второй формулой (28), а p — второй формулой (37).

Доказательство. Для функции $u = U(\zeta)$ производные, входящие в левую часть уравнения (1), можно записать так:

$$\left(\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}}\right)_{i \in I_k} = c_i^{m_i} \left(\frac{\zeta}{z_k}\right)^{m_i} U^{(m_i)}(\zeta). \tag{53}$$

Используя (53) и (50), уравнение (1) преобразуем к виду

$$\zeta^p \prod_{i=1}^{N} \left[U^{(m_i)}(\zeta)\right]^{\beta_i} = C_0 g(U) \Phi(\zeta) \prod_{k=1}^{K} z_k^{\alpha_k + p_k}. \tag{54}$$

Из условия (51) и второй формулы (50) следует равенство

$$\prod_{k=1}^{K} z_k^{\alpha_k + p_k} = \zeta^{\lambda}. \tag{55}$$

Из (54) и (55) следует уравнение (52) для функции $U(\zeta)$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть функция $g(u)$ является произвольной, а функция $f(x_1, \ldots, x_N)$ имеет вид*

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \Psi(\eta) \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}, \quad \eta = \sum_{k=1}^{K} d_k y_k, \quad y_k = \prod_{i \in I_k} x_i, \tag{56}$$

где $\Psi(\eta)$ — некоторая заданная функция, d_k — заданные коэффициенты. Предполагается, что для всех $i \in I_k$ параметры α_i удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \alpha_i = 0 \quad \text{при} \quad k \in \Xi_1, \\ \alpha_i = p_k - m_i \beta_i \quad \text{при} \quad k \in \Xi_2. \end{gathered} \tag{57}$$

Здесь $\Xi_1 \subseteq \Xi$, $\Xi_2 \subseteq \Xi$ — подмножества значений k, такие что $N_k = 1$ при всех $k \in \Xi_1$; $N_k > 1$ при всех $k \in \Xi_2$. Тогда уравнение (1) имеет решение вида $u = U(\eta)$, причем функция $U(\eta)$ является решением уравнения

$$\prod_{i=1}^{N} \left[U^{(m_i)}(\eta)\right]^{\beta_i} = D_0 g(U) \Psi(\eta), \tag{58}$$

где D_0 определяется выражением

$$D_0 = \prod_{k=1}^{K} d_k^{-p_k}. \tag{58a}$$

Доказательство. Запишем выражения для производных функции $u = U(\eta)$, входящих в левую часть (1):

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}}\right)_{i\in I_k} = d_k^{m_i} U^{(m_i)}(\eta) \quad \text{при} \quad k \in \Xi_1, \\ \left(\frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}}\right)_{i\in I_k} = d_k^{m_i} U^{(m_i)}(\eta) \left(\frac{y_k}{x_i}\right)^{m_i} \quad \text{при} \quad k \in \Xi_2.\end{gathered} \tag{59}$$

Используя выражения (59), преобразуем уравнение (1) к виду

$$\prod_{i=1}^{N} \left[U^{(m_i)}(\eta)\right]^{\beta_i} \cdot \prod_{k\in\Xi_2} \prod_{i\in I_k} x_i^{p_k - m_i\beta_i} \cdot \prod_{k=1}^{K} \prod_{i\in I_k} d_k^{m_i\beta_i} = g(U)\Psi(\eta) \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}. \tag{60}$$

Из (58a) и (46a) получаем равенство $\prod\limits_{k=1}^{K} \prod\limits_{i\in I_k} d_k^{m_i\beta_i} = 1/D_0$. Тогда, учитывая условия (57), из (60) непосредственно следует уравнение (58) для функции $U(\eta)$. Теорема доказана.

6. Заключение. Таким образом, в данной работе исследован класс многомерных уравнений в частных производных вида (1). В результате получены решения с аддитивным, мультипликативным и комбинированным разделениями переменных. Получено семейство псевдополиномиальных решений, которые выражаются через полиномы от независимых переменных с произвольными коэффициентами и функции, являющиеся решениями некоторых ОДУ. Найдены решения типа бегущей волны, автомодельные решения и их обобщения, а также решения, представленные в виде функций более сложных аргументов. Для всех полученных решений сформулированы условия их существования, которым должна удовлетворять правая часть уравнения и его параметры. Полученные результаты могут быть обобщены для уравнений с более сложными дифференциальными операторами.

Литература

1. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002.

2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.

3. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 5. С. 606–611.

4. *Рахмелевич И. В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2015. № 1. С. 12–19.

5. *Рахмелевич И. В.* О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2015. № 3. С. 18–25.

6. *Рахмелевич И. В.* О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных // Известия вузов. Математика. 2016. №4. С. 57–67.

7. *Рахмелевич И. В.* О псевдополиномиальных решениях двумерного уравнения, содержащего произведение частных производных // Научные ведомости Белгородского университета. Математика. Физика. 2017. Вып. 47, №13. С. 45–50.

8. *Miller J. (Jr.), Rubel L. A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. Vol. 26. P. 1901–1913.

9. *Zhdanov R. Z.* Separation of variables in the non-linear wave equation // Journal of Physics A. 1994. Vol. 27. P. L291–L297.

Статья поступила в редакцию 22 августа 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Рахмелевич Игорь Владимирович — канд. техн. наук, доц.; igor-kitpd@yandex.ru

Multi-dimensional non-autonomous equation contaning the production of powers of partial derivatives

I. V. Rakhmelevich

Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russian Federation

For citation: Rakhmelevich I. V. Multi-dimensional non-autonomous equation contaning the production of powers of partial derivatives. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 119–130. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.113

We consider a class of multidimensional partial differential equations, containing the production of powers of partial derivatives of arbitrary order. As a result, solutions with additive, multiplicative and combined separation of variables are received. The family of pseudo-polynomial solutions which are expressed through the polynomials on independent variables with arbitrary coefficients is received, as well as functions which are the solutions of some ordinary differential equations. The solutions of travelling wave type and self-similar solutions are founded. Also the families of solutions which have a form of the sum or the production of the solutions of travelling wave type and self-similar solutions are received. Furthermore, the solutions representing as the functions of more complicated arguments which are expressed through the linear combinations and the productions of initial independent variables are received. The conditions of existence have been formulated for all received solutions, and the right side of equation and its parameters must satisfy these conditions.

Keywords: partial differential equation, method of separation of variables, power-law non-linearity, solution of travelling wave type, self-similar solution, pseudo-polynomial solution.

References

1. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., "Handbook on non-linear equations in mathematical physics: exact solutions" (FizMatLit Publ., Moscow, 2002) [in Russian].

2. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiaux A., "Handbook of First Order Partial Differential Equations" (Taylor and Francis, London, 2002).

3. Polyanin A. D., Zhurov A. I., "Generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics", *Doklady RAN — Doklady Mathematics* **382**(5), 606–611 (2002) [in Russian].

4. Rakhmelevich I. V., "On two-dimensional hyperbolic equations with power-law non-linearity on the derivatives", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* (1), 12–19 (2015) [in Russian].

5. Rakhmelevich I. V., "On some new solutions of multi-dimensional partial differential equation of the first order with power-law non-linearities", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* (3), 18–25 (2015) [in Russian].

6. Rakhmelevich I. V., "Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives", *Russian Mathematics* **60**(4), 47–55 (2016).

7. Rakhmelevich I. V., "On the pseudo-polynomial solutions of two-dimensional equation containing the production of partial derivatives", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo universiteta. Matematika. Fizika* **47**(13), 45–50 (2017) [in Russian].

8. Miller J. (Jr.), Rubel L. A., "Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions", *Journal of Physics A* **26**, 1901–1913 (1993).

9. Zhdanov R. Z., "Separation of variables in the non-linear wave equation", *Journal of Physics A* **27**, L291–L297 (1994).

Author's information:

Rakhmelevich Igor V. — igor-kitpd@yandex.ru