УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 37J60, 70F25

К вопросу о векторной записи вариационных дифференциальных принципов механики

Ш. Х. Солтаханов[1], *Т. С. Шугайло*[2], *М. П. Юшков*[2]

[1] Чеченский государственный университет,
Российская Федерация, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Солтаханов Ш. Х., Шугайло Т. С., Юшков М. П.* К вопросу о векторной записи вариационных дифференциальных принципов механики // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 147–153. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.116

В работе вводится вариация некоторого вектора $\delta\mathbf{x}$, которая может интепретироваться либо как возможное перемещение системы, либо как вариация скорости системы, либо как вариация ускорения системы. С помощью этого вектора из скалярных характерных уравнений движения получается единая форма записи всех вариационных дифференциальных принципов механики. Обратно, из этой формы записи получаются исходные уравнения движения, что позволяет полученные ранее скалярные произведения рассматривать именно как принципы механики. По этой же логической схеме строится дифференциальный принцип, исходя из векторного уравнения несвободного движения механической системы. В этой форме записи предлагается сохранять нулевое скалярное произведение реакции идеальных связей на вектор $\delta\mathbf{x}$. Это позволяет из полученной записи получать и уравнения, содержащие обобщенные реакции связей.

Ключевые слова: неголономная механика, линейные неголономные связи второго порядка, уравнения Лагранжа второго рода с множителями, уравнения Маджи, обобщенные уравнения Лагранжа второго рода с множителями, обобщенные уравнения Маджи.

1. Введение. Движение механической системы в криволинейных координатах $q = (q^1, \ldots, q^s)$ может быть описано уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,,\\ T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\sigma\tau}\dot q^\sigma \dot q^\tau + M\mathrm{g}_{\alpha\sigma}\dot q^\sigma + \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{00}\,,\\ \sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \quad \alpha = \overline{0,s}\,, \quad q^0 = t\,,\ \dot q^0 = 1\,.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь M — масса всей системы.

Введем дифференцируемое многообразие всех возможных положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени t, и зафиксируем точку, соответствующую этому времени. Тогда в касательном пространстве к введенному многообразию, проведенному в выбранной точке, можно [1] ввести понятия основного и взаимного базисов $\{\mathbf{e}_\sigma\}$, $\{\mathbf{e}^\tau\}$, $\sigma,\tau = \overline{1,s}$, при этом метрический тензор $(\mathrm{g}_{\sigma\tau})$ задается коэффициентами положительно определенной квадратичной формы

$T^{(2)}$. Теперь скалярные уравнения (1.1) можно записать в виде векторного уравнения [2]

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y}\,,$$
$$\mathbf{Y} = Q_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,, \quad \mathbf{W} = W_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,, \quad W_\sigma = \frac{1}{M}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\right), \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{1.2}$$

Пусть на движение системы наложены линейные неголономные связи второго порядка

$$f_2^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv a_{2,\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a_{2,0}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad l = s-k\,. \tag{1.3}$$

В таком виде после дифференцирования по времени могут быть представлены неголономные связи первого порядка

$$f_1^\varkappa(t,q,\dot q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{1.4}$$

и после двойного дифференцирования — голономные связи

$$f_0^\varkappa(t,q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{1.5}$$

Тогда вместо уравнения (1.2) получим уравнение несвободного движения

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) можно назвать вторым законом Ньютона при несвободном движении.

Представление всех уравнений связей в виде (1.3) требуется для выделения в их законах обобщенных ускорений $\ddot q^{\,\sigma}$, от которых зависит интересующая нас сила реакции связей $\mathbf{R}$. В настоящее время существует единственный пример [3], в котором осуществляется неголономная линейная связь второго порядка.

Для векторного представления реакции $\mathbf{R}$ идеальных связей (1.3) введем векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = a_{2,\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\mathbf{e}^\tau \equiv \frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot q^{\,\sigma}}\,\mathbf{e}^\tau \equiv \boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{1.7}$$

Отметим, что в случае неголономных связей (1.4) они равны векторам

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot q^\sigma}\,\mathbf{e}^\tau \equiv \boldsymbol{\nabla}' f_1^\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

а при голономных связях (1.5) превращаются в классические операторы Гамильтона

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\tau \equiv \boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Обобщенные операторы $\boldsymbol{\nabla}' f_1^\varkappa$ и $\boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa$ были введены Н. Н. По́ляховым [4]. Система векторов (1.7) позволяет переписать уравнения связей (1.3) в виде скалярных произведений

$$\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \chi^\varkappa(t,q,\dot q)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{1.8}$$

где функции $\chi^\varkappa(t,q,\dot q)$ являются известными функциями своих аргументов.

Векторы (1.7) выделяют в касательном пространстве подпространство $\mathbb{R}^K$ с базисом $\{\varepsilon^{l+1},\,\ldots,\,\varepsilon^s\}$, ортогонально к нему строится подпространство $\mathbb{R}_L$ с базисом $\{\varepsilon_1,\,\ldots,\,\varepsilon_l\}$. В результате любой вектор в касательном пространстве можно представить в виде двух ортогональных составляющих, например, для ускорения имеем

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^K + \mathbf{W}_L\,, \quad \mathbf{W}^K = W_{l+\varkappa}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,, \quad \mathbf{W}_L = W^\lambda \varepsilon_\lambda\,, \quad \mathbf{W}^K\cdot\mathbf{W}_L = 0\,,$$

причем составляющая $\mathbf{W}^K$ согласно выражениям (1.8) полностью задается уравнениями связей (1.3). Так как и закон несвободного движения (1.6) представляется двумя выражениями

$$M\mathbf{W}^K = \mathbf{Y}^K + \mathbf{R}^K, \quad M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L + \mathbf{R}_L, \tag{1.9}$$

то при наложении на движение системы связей, как следует из закона Ньютона (1.9), составляющая реакции $\mathbf{R}^K$ представляется в виде

$$\mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,, \tag{1.10}$$

а сами уравнения связей (1.3) выполняются при любом векторе $\mathbf{R}_L$. Если

$$\mathbf{R}_L \equiv 0\,, \tag{1.11}$$

то связи называются идеальными, а если (1.11) не выполняется, то закон формирования вектора $\mathbf{R}_L$ должен быть задан из дополнительных характеристик связей (1.3), отражающих их физическую реализацию.

2. Возможные перемещения, скорости и ускорения механической системы. Введем вектор

$$\delta\mathbf{x} = \delta x^\sigma\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{2.1}$$

где $\delta x^\sigma = \delta q^\sigma$ при связях (1.5), $\delta x^\sigma = \delta'\dot{q}^\sigma$ при связях (1.4) и $\delta x^\sigma = \delta''\ddot{q}^\sigma$ при связях (1.3). Обозначение δ' указывает на то, что при составлении такого частного дифференциала варьируются лишь обобщенные скорости $\dot{q}^\sigma$, а переменные t, q^σ считаются фиксированными параметрами. Соответственно, при составлении δ'' варьируются только обобщенные ускорения $\ddot{q}^\sigma$, а переменные $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma$ считаются зафиксированными величинами.

В силу задания связей (1.3)–(1.5) вариации δx^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, подчинены условиям

$$\frac{\partial f_i^\varkappa}{\partial x^\sigma}\,\delta x^\sigma = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad i = 0,1,2. \tag{2.2}$$

Перейдем от переменных $x = (x^1, \ldots, x^s)$ к переменным $x_* = (x_*^1, \ldots, x_*^s)$ по формулам

$$\begin{aligned} x_*^\lambda &= f_i^\lambda(x)\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,, \\ x_*^{l+\varkappa} &= f_i^\varkappa(x)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad i = 0,1,2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где в записи аргументов функций опущена зависимость от фиксированных t, или t, q^σ, или $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma$. Отметим, что функции $f_i^\lambda(x)$ выбираются исследователем при составлении формул (2.3), а переменные $x_*^{l+\varkappa} = 0$, $\varkappa = \overline{1,k}$, из-за выполнения уравнений связей. Теперь вариации δx_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, оказываются независимыми, а $\delta x_*^{l+\varkappa}$ равны 0, $\varkappa = \overline{1,k}$, что, в свою очередь, дает условия (2.2) на вариации δx^σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Формулам (2.3) соответствует разбиение касательного пространства на прямую сумму двух подпространств $\mathbb{R}^K$ и $\mathbb{R}_L$. Теперь вектор вариации $\delta\mathbf{x}$ имеет вид

$$\delta\mathbf{x} = \delta x_*^\lambda\,\mathbf{e}_\lambda \tag{2.4}$$

и принадлежит подпространству $\mathbb{R}_L$.

Преобразованию (2.3) соответствует обратное преобразование

$$x^\sigma = x^\sigma(x_*)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

из которого получаем следующую связь между вариациями:

$$\delta x^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x_*^\lambda}\,\delta x_*^\lambda\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{2.5}$$

3. Получение дифференциальных вариационных принципов. Напишем наиболее распространенные формы дифференциальных уравнений движения при наложении соответствующих связей в виде уравнений Лагранжа второго рода, уравнений Маджи и обобщенных уравнений Маджи ($l = s - k$):

$$\begin{aligned} MW_\lambda^* &= Q_\lambda^*\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,;\\ \big(MW_\sigma - Q_\sigma\big)\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial x_*^\lambda} &= 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,;\\ \big(MW_\sigma - Q_\sigma\big)\,\frac{\partial \ddot q^{\,\sigma}}{\partial x_*^\lambda} &= 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

или в форме уравнений Лагранжа первого рода (уравнений Лагранжа второго рода с множителями)

$$MW_\sigma - Q_\sigma - \Lambda_\varkappa\,\frac{\partial f_i^\varkappa}{\partial x^\sigma} = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad i = 0, 1, 2. \tag{3.2}$$

Умножая уравнения (3.1) на δx_*^λ и складывая, получаем

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y}\big)\cdot\delta\mathbf{x} = 0\,. \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) можно получить и из уравнений (3.2). Для этого умножим условия (2.2) на $\Lambda_\varkappa$ и сложим. Тогда получим

$$\Lambda_\varkappa\,\frac{\partial f_i^\varkappa}{\partial x^\sigma}\,\delta x^\sigma = 0\,, \quad i = 0, 1, 2. \tag{3.4}$$

Если теперь умножить уравнения (3.2) на δx^σ, сложить и учесть нулевую сумму (3.4), то действительно получим запись (3.3).

Обратимся теперь к обратному утверждению: если запись (3.3) принять за исходную, то из нее получим уравнения движения. После доказательства этого выражение (3.3) можно будет принять за вариационный дифференциальный принцип механики.

Итак, имеем (3.3). Если $\delta\mathbf{x}$ представить в виде (2.4), то при голономных связях (1.5) из-за независимости вариаций δx_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, получим первую группу уравнений в (3.1), то есть уравнения Лагранжа второго рода. Если же неголономные связи представлены в виде (1.4), (1.3), то, учитывая представление вектора вариации $\delta\mathbf{x}$ в виде (2.1), в котором можно воспользоваться формулой (2.5), получим вторые группы уравнений в (3.1), то есть уравнения Маджи и обобщенные уравнения Маджи.

Несколько сложнее из утверждения (3.3) получить уравнения (3.2). Пользуясь представлением (2.1), перепишем скалярное произведение (3.3) в виде s слагаемых.

Будем считать, что первые l вариаций δx^σ являются независимыми, а остальные k вариаций могут быть выражены через них из условий (2.2). Подберем значения $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, таким образом, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях $\delta x^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, обратились в нули, в свою очередь, коэффициенты при независимых вариациях обращаются в нули из-за их независимости. Таким образом, получаем выполнение уравнений (3.2).

4. Расширенная векторная форма записи дифференциальных вариационных принципов. При выводе дифференциальных вариационных принципов основным являлась двусторонняя связь между законами Ньютона и записью принципа: из двух наиболее характерных форм записи дифференциальных уравнений, отражающих справедливость второго закона Ньютона при наличии соответствующих связей, была получена векторная запись принципа, а затем, наоборот, из этого нулевого скалярного произведения, теперь уже постулируемого, выводили как следствие две исходные формы уравнений несвободного движения механической системы.

Получим по этой же логической схеме дифференциальные вариационные принципы непосредственно из векторного уравнения несвободного движения механической системы

$$M\mathbf{W} - \mathbf{Y} - \mathbf{R}^K - \mathbf{R}_L = 0\,. \tag{4.1}$$

Здесь при идеальных связях выполняется (1.11), а вектор $\mathbf{R}^K$ имеет вид (1.10).

Умножая векторное уравнение (4.1) на вариации вектора $\mathbf{x}$, получаем

$$(M\mathbf{W} - \mathbf{Y} - \mathbf{R}^K - \mathbf{R}_L)\cdot\delta\mathbf{x} = 0\,. \tag{4.2}$$

Если теперь исходно считать справедливой запись (4.2), то из нее из-за произвольности вектора $\delta\mathbf{x}$ получаем уравнение движения (4.1). Поэтому нулевое скалярное произведение (4.2) является в зависимости от выбора вектора $\delta\mathbf{x}$ дифференциальным вариационным принципом Даламбера—Лагранжа, Суслова—Журдена или Гаусса.

В случае неидеальных связей обычно вектор $\mathbf{R}_L$ относят к активной силе $\mathbf{Y}$, если же связи идеальны, то выполняется условие (1.11). Из-за ортогональности $\mathbf{R}^K$ к $\delta\mathbf{x}$ теперь принцип (4.2) запишется в привычной форме (3.3).

Обратим особое внимание на удобство использования формы записи дифференциальных вариационных принципов в виде (4.2). Здесь сохраняется нулевое скалярное произведение

$$\mathbf{R}^K\cdot\delta\mathbf{x} = 0\,,$$

которое часто требуется использовать при решении практических задач. В виде примера этого утверждения запишем принцип возможных перемещений, справедливый в случае равновесия системы ($\mathbf{W} = 0$) при наличии идеальных голономных связей:

$$(\mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \nabla f_0^\varkappa)\cdot\delta\mathbf{y} = 0\,. \tag{4.3}$$

Этот принцип является необходимым и достаточным условием равновесия системы. Принцип возможных перемещений (4.3) является основой для создания аналитической статики.

Обсудим еще следующее обстоятельство. Ранее при выводе принципов учитывались либо зависимости между контравариантными компонентами δx^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, задаваемыми наложенными связями, либо независимые вариации δx_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, $l = s - k$.

В связи с этим из принципов при использовании вариаций δx_*^λ удавалось вывести лишь собственно уравнения движения и представлялось, что из них не могут быть получены вторые группы уравнений Лагранжа второго рода, уравнений Маджи и обобщенных уравнений Маджи:

$$\begin{aligned} MW_{l+\varkappa}^* - Q_{l+\varkappa}^* - \Lambda_\varkappa = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,\\ (MW_\sigma - Q_\sigma)\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial x_*^{l+\varkappa}} - \Lambda_\varkappa = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,\\ (MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \ddot q^{\,\sigma}}{\partial x_*^{l+\varkappa}} - \Lambda_\varkappa = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Вернемся к векторному уравнению движения (4.1). По принципу освобождаемости его можно рассматривать как движение свободной механической системы под действием сил $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}^K$, $\mathbf{R}_L$. Но если система свободна, то все вариации δx_*^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, независимы, поэтому из равенства нулю коэффициентов при $\delta x_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, получаем интересующие нас уравнения (4.4), содержащие множители Лагранжа (обобщенные реакции идеальных связей). Знание этих величин позволяет выяснить, в частности, возможность освобождения механической системы от наложенных на ее движение голономных связей.

Авторы приносят благодарность Е. Р. Маликову за участие в обсуждении изложенной тематики.

Литература

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

2. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.

3. *Kitzka F.* An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics // ZAMM. 1986. Vol. 66, № 7. P. 312–314.

4. *Поляхов Н. Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. Вып. 3, № 13. С. 106–116.

Статья поступила в редакцию 13 августа 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Солтаханов Шервани Хусаинович — проф.; soltakhanov@yandex.ru
Шугайло Тимофей Сергеевич — студент; shugaylotis@gmail.com
Юшков Михаил Петрович — проф.; yushkovmp@mail.ru

On vector form of differential variational principles of mechanics

Sh. Kh. Soltakhanov[1], *T. S. Shugaylo*[2], *M. P. Yushkov*[2]

[1] Chechen State University, ul. Sheripova, 32, Grozny, 364024, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Soltakhanov Sh. Kh., Shugaylo T. S., Yushkov M. P. On vector form of differential variational principles of mechanics. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 147–153. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.116

The paper introduces the variation of a vector $\delta\mathbf{x}$, which can be interpreteed either as a virtual displacement of a system, the variation of the velocity of a system or the variation of the acceleration of a system. This vector is used to put forward, from scalar representative motion equations, a uniform notation of all differential variational principles of mechanics. Conversely, this notation involves all original motion equations, which enables one to consider the previously obtained scalar products as principles of mechanics. The same approach leads us to a differential principle on the basis of the vector equation of constrained motion of a mechanical system. In this form, it is proposed to retain the nonzero scalar product of ideal constraints by the vector $\delta\mathbf{x}$. This enables one from this notation to derive equations involving generalized constrained forces.

Keywords: nonholonomic mechanics, linear nonholonomic second-order constraints, the Lagrange second-order equations with multipliers, the Maggi equations, the generalized Lagrange second-order equations with multipliers, the generalized Maggi equations.

References

1. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T., *Contemporary geometry* (Nauka Publ., Moscow, 1979, 760 p.) [in Russian].

2. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yuschkov M. P., *Nonholonomic mechanics. Theory and applications* (Nauka Publ., Moscow, 2009, 344 p.) [in Russian].

3. Kitzka F., “An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics”, *ZAMM* **66**(7), 312–314 (1986).

4. Polyakhov N. N., “On the differential principles of mechanics obtained from the equations of motion of nonholonomic systems”, *Vestnik of Leningrad University*, (13), issue 3, 106–116 (1974) [in Russian].

Author’s information:

Soltakhanov Shervani Kh. — soltakhanov@yandex.ru
Shugaylo Timofei S. — shugaylotis@gmail.com
Yushkov Mikhail P. — yushkovmp@mail.ru

ХРОНИКА

22 ноября 2017 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН был заслушан доклад доктора физ.-мат. наук, профессора М. П. Юшкова и студентки В. И. Петровой (СПбГУ) на тему «Динамика нагруженной платформы Стюарта».

Краткое содержание доклада:

Составлены дифференциальные уравнения движения нагруженной платформы Стюарта. Решены прямая и обратная задачи динамики. Показана неустойчивость простейшего движения системы в виде вертикальных колебаний платформы. На примере элементарной физической модели объясняются причины возникновения неустойчивости. Для достижения устойчивой работы стенда вводятся обратные связи. Приводятся результаты численных расчетов.