МАТЕМАТИКА

УДК 517.977
MSC 34A38, 93B30

ЛОКАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Н. А. Бодунов, С. А. Колбина

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Мы рассматриваем задачу о локальной параметрической идентифицируемости гибридной системы, включающей непрерывную и дискретную по времени системы. Множеством наблюдений служит зависящий от непрерывного по времени параметра вектор-решение дискретной компоненты системы. Достаточные условия локальной параметрической идентифицируемости сформулированы с использованием введенного ранее понятия нормированной отделенности множества параметров от ядра специального функционала.

Приведен пример, в котором условие нормированной отделенности сводится к некоторому ранговому критерию. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: гибридная система, локальная параметрическая идентифицируемость, нормированная отделенность.

Гибридные системы представляют собой достаточно широкий класс динамических систем, включающих в себя одновременно непрерывные и дискретные по времени системы. Интерес к таким системам постоянно растет, и они находят все большее применение в различных приложениях [1, 2]. В известных работах по гибридным системам в основном изучались проблемы их анализа и синтеза, устойчивости и управления [2]. Что касается обратной задачи определения и уточнения модели по экспериментальным данным, т. е. проблемы идентификации, она привлекала меньшее внимание (см., например, [3]). В настоящей работе для одного класса гибридных систем изучается задача локальной параметрической идентифицируемости, т. е. возможности однозначного определения параметра системы по результатам наблюдений. Отметим работу [4], в которой использовался новый подход при изучении этой задачи для непрерывных динамических систем.

Рассмотрим модель, заданную на промежутке $[0,T]$ с разбиением $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, описываемую гибридной системой

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y_k, p(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \\ y_{k+1} = g(x(t_{k+1}), y_k), \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $p(t) \in R^l$, вектор-функции f, g непрерывны по совокупности своих переменных и непрерывно дифференцируемы по переменным x, y, p и x, y соответственно. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество допустимых непрерывных на $[0, T]$ параметр-функций.

Фиксируем начальные данные $x(0) = x_0$ и y_0 и обозначаем через $\{x(t,p), y_k(p)\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, решение системы (1). При этом считаем, что «стыковка» решения $x(t,p)$ в точках разбиения временного промежутка обеспечивает его непрерывность на всем $[0, T]$.

Для параметр-функции $p \in \mathcal{P}$ множеством наблюдений в рассматриваемой гибридной системе (1) служит совокупность векторов

$$Y(p) = \{y_1(p), \ldots, y_N(p)\}. \tag{2}$$

Основное предположение: для любой функции $p \in \mathcal{P}$ решение $\{x(t,p), y_k(p)\}$ единственно, и функция $x(t,p)$ определена на всем промежутке $[0, T]$.

Для любой функции $q(t)$, $t \in [a, b]$, мы используем норму

$$|q| = \sup_{t \in [a,b]} \|q(t)\|,$$

где $\|.\|$ — евклидова норма.

Определение 1. Пусть $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$. Будем говорить, что пара $\{p_1, p_2\}$ *различима по наблюдениям* (2), если существует $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, такое что $y_i(p_1) \neq y_i(p_2)$.

Определение 2. Система (1) называется *локально параметрически идентифицируемой* при $p_0 \in \mathcal{P}$ по наблюдениям $Y(p)$, если существует такое $\epsilon > 0$, что для всех $p \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих неравенству $0 < |p - p_0| < \epsilon$, пара $\{p, p_0\}$ различима.

Зафиксируем $p_0 \in \mathcal{P}$ и будем изучать задачу о локальной параметрической идентифицируемости системы (1) при p_0 по наблюдениям $Y(p)$.

Рассмотрим системы в вариациях

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, x(t, p_0), y_k(p_0), p_0\right) z, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{3}$$

Обозначим через $\Phi_k(t)$ фундаментальную матрицу системы (3), удовлетворяющую условию $\Phi_k(t_k) = E$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Введем функционалы

$$G_{k+1}(r) = \Phi_k(t_{k+1}) \left(G_k(r) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_k^{-1}(s) \frac{\partial f}{\partial p}\left(s, x(s, p_0), y_k(p_0), p_0\right) r(s) ds \right),$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$, $G_0(r) \equiv 0$, определенные на множестве разностей функций семейства $\mathcal{P}$, и обозначим через $\mathcal{K}$ ядро функционала

$$H(r) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(x(T, p_0), y_{N-1}(p_0)\right) G_N(r). \tag{4}$$

Определение 3. Семейство $\mathcal{P}$ *нормированно отделено* в p_0 от $\mathcal{K}$, если любая последовательность $p^{(m)} \in \mathcal{P}$, обладающая свойствами

$$|p^{(m)} - p_0| > 0 \quad \text{и} \quad |p^{(m)} - p_0| \to 0, \quad m \to \infty, \tag{5}$$

имеет такую подпоследовательность $p^{(m_n)}$, что последовательность

$$\rho^{(m_n)} = \frac{p^{(m_n)} - p_0}{|p^{(m_n)} - p_0|}$$

равномерно сходится при $n \to \infty$ на $[0, T]$ к функции, не принадлежащей $\mathcal{K}$.

Теорема. *Если семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено в p_0 от $\mathcal{K}$, имеет место локальная параметрическая идентифицируемость системы (1) при $p_0 \in \mathcal{P}$ по наблюдениям $Y(p)$.*

Доказательство. Если нет локальной параметрической идентифицируемости системы (1) при $p = p_0$, то существует такая последовательность $p^{(m)} \in \mathcal{P}$, что выполняются соотношения

$$\Delta_m(y_k) = y_k(p^{(m)}) - y_k(p_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots N, \tag{6}$$

$$|p^{(m)} - p_0| > 0 \quad \text{и} \quad |p^{(m)} - p_0| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Условие (5) выполнено. Поэтому выберем соответствующую подпоследовательность $p^{(m_n)}$ (считаем для простоты $m_n = m$) и пусть

$$\rho^{(m)} \to \rho \notin \mathcal{K}. \tag{7}$$

Для параметра $p^{(m)} = p_0 + \Delta_m(p)$ рассмотрим приращение

$$\Delta_m(y_{k+1}) = g(x(t_{k+1}, p^{(m)}), y_k) - g(x(t_{k+1}, p_0), y_k) =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t_{k+1}, p_0), y_k)\, \Delta x(t_{k+1}) + o(\|\Delta x(t_{k+1})\|), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\Delta x(t_{k+1}) = x(t_{k+1}, p^{(m)}) - x(t_{k+1}, p_0).$$

С учетом (6) имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t_{k+1}, p_0), y_k)\, \Delta x(t_{k+1}) + o(\|\Delta x(t_{k+1})\|) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{8}$$

В работе [4] показана справедливость равенства

$$\Delta x(t_1) = G_1(\Delta_m(p)) + U_1(\Delta_m(p)), \tag{9}$$

где

$$\frac{\|U_1(\Delta_m(p))\|}{|\Delta_m(p)|} \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta_m(p)| \to 0.$$

Далее, по аналогии с (9) (см. [4]), будем иметь

$$\Delta x(t_2) = x(t_2, p^{(m)}) - x(t_2, p_0) =$$
$$= x(t_1, p^{(m)}) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s, p^m), y_1, p^m) ds - x(t_1, p_o) - \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s, p_0), y_1, p_0) ds =$$
$$= G_2(\Delta_m(p)) + U_2(\Delta_m(p)),$$

где
$$\frac{\|U_2(\Delta_m(p))\|}{|\Delta_m(p)|} \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta_m(p)| \to 0.$$
Продолжая этот процесс, на N-м шаге получим
$$\Delta x(T) = x(T, p^{(m)}) - x(T, p_0) = G_N(\Delta_m(p)) + U_N(\Delta_m(p)), \tag{10}$$
где
$$\frac{\|U_N(\Delta_m(p))\|}{|\Delta_m(p)|} \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta_m(p)| \to 0.$$
С учетом (8) и (10) будем иметь
$$\frac{\partial g}{\partial x}\,(x(T, p_0), y_{N-1}(p_0))\, G_N(\Delta_m(p)) = o(|\Delta_m(p)|). \tag{11}$$
Разделим (11) на $|\Delta_m(p)|$, в результате получим
$$\frac{\partial g}{\partial x}\,(x(T, p_0), y_{N-1}(p_0))\, \frac{G_N(\Delta_m(p))}{|\Delta_m(p)|} = \frac{o(\Delta_m(p))}{|\Delta_m(p)|}$$
или, с учетом (4),
$$H(\rho^{(m)}) = \frac{o(\Delta_m(p))}{|\Delta_m(p)|}. \tag{12}$$
Так как функционал H непрерывен, из (7) следует
$$H(\rho^{(m)}) \to H(\rho) \neq 0, \quad m \to \infty,$$
что противоречит (12). Теорема доказана.

Отметим один случай, в котором использованное условие нормированной отделенности сводится к некоторому ранговому критерию (см. формулу (13) ниже). Пусть для простоты параметры $p(t)$ — скалярные функции.

Предположим, что в окрестности $p_0(t)$ семейство $\mathcal{P}$ допускает представление
$$p(t) = p_0(t) + c_1\pi_1(t) + \dots + c_l\pi_l(t), \quad t \in [0, T],$$
где $\pi_1(t), \dots, \pi_l(t)$ — фиксированные функции, а $c_1, \dots, c_l$ — числа.

Положим
$$|p - p_0| = \|c\| := \sqrt{c_1^2 + \dots + c_l^2}.$$

Тогда в определении функционалов $G_k(\{r\})$ величина r — скаляр, $\partial f/\partial p$ — n-вектор, а $\Phi_k(t_{k+1})$ и $\Phi_k^{-1}(s)$ — $n \times n$-матрицы.

Следовательно, $G_k(\{r\})$ — n-векторы.

Предположение. Векторы $G_N(\{\pi_1\}), \dots, G_N(\{\pi_l\})$ линейно независимы.

Рассмотрим теперь последовательность
$$p^{(m)} = p_0 + c_1^{(m)}\pi_1 + \dots + c_l^{(m)}\pi_l$$
с условием $\|c^{(m)}\| > 0$ и $\|c^{(m)}\| \to 0,\ m \to \infty$.

Векторы

$$\sigma_m = \frac{(c_1^{(m)}, \ldots, c_l^{(m)})}{\|c^{(m)}\|}$$

принадлежат единичной сфере пространства $\mathbb{R}^l$, поэтому последовательность σ_m имеет сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $\sigma_m \to \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$, $\|\sigma\| = 1$. Тогда будем иметь

$$\rho^{(m)} = \frac{c_1^{(m)}\pi_1 + \cdots + c_l^{(m)}\pi_l}{\|c^{(m)}\|} \to \pi := \sigma_1\pi_1 + \cdots + \sigma_l\pi_l, \quad m \to \infty,$$

и сходимость равномерная.

Так как $\sigma \neq 0$, вектор $G_N(\{\pi\}) = \sigma_1 G_N(\{\pi_1\}) + \cdots + \sigma_l G_N(\{\pi_l\})$ ненулевой.

Следовательно, если выполняется неравенство

$$\operatorname{rank}\frac{\partial g}{\partial x}\left(x(T, p_0), y_{N-1}(p_0)\right) \geq n, \tag{13}$$

получаем $\pi \notin \mathcal{K}$, что и требовалось.

Литература

1. *Morse A. S., Pantelides C. C., Sastry S. S., Schumacher J. M.* Introduction to the special issue on hybrid systems // Automatica. 1999. Vol. 35, issue 3. P. 347–348.

2. *Goebel R., Sanfelice R. G., Teel A. R.* Hybrid dynamical systems: Modeling, Stability and Robustness. Princeton University Press, 2012. 232 p.

3. *Roll J., Bemporad A., Ljung L.* Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming // Automatica. 2004. Vol. 40, issue 1. P. 37–50.

4. *Бодунов Н. А., Вольфсон Г. И.* Локальная идентифицируемость систем с переменным параметром // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». 2009. № 2. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/volfson.pdf (дата обращения: 23.11.2016).

Статья поступила в редакцию 26 июня 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Бодунов Николай Александрович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой; nick.bodunov@gmail.com

Колбина Светлана Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент; kafedravm1@gmail.com

LOCALLY PARAMETER IDENTIFIABILITY FOR ONE CLASS OF HYBRID SYSTEMS

Nikolay A. Bodunov, Svetlana A. Kolbina

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", ul. Professora Popova, 5, St. Petersburg, 197376, Russian Federation; nick.bodunov@gmail.com, kafedravm1@gmail.com

We consider the problem of local parameter identifiability for a hybrid system containing continuous and descrete in time systems. The set of observations is the vector-solution of the discrete component of the system. Sufficient conditions of local parameter identifiability are obtained in terms of the previously introduced condition of normed separability of the set of parameters from the kernel of a special functional.

We consider an example in which the condition of normed separability is reduced to a rank criterion. Refs 4.

Keywords: hybrid system, locally parameter identifiability, normed separability.

References

1. Morse A. S., Pantelides C. C., Sastry S. S., Schumacher J. M., “Introduction to the special issue on hybrid systems”, *Automatica* **35**(3), 347–348 (1999).

2. Goebel R., Sanfelice R. G., Teel A. R., *Hybrid dynamical systems: Modeling, Stability and Robustness* (Princeton University Press, 2012, 232 p.).

3. Roll J., Bemporad A., Ljung L., Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming, *Automatica* **40**(1), 37–50 (2004).

4. Bodunov N. A., Volfson G. I., “Conditions for local identifiability of systems with variable parameter”, *Differential Equations and Control Processes* (2) (2009). Available at: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/volfson.pdf (accessed 23.11.2016) [in Russian].

Для цитирования: Бодунов Н. А., Колбина С. А. Локальная параметрическая идентифицируемость одного класса гибридных систем // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 3–8. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.101

For citation: Bodunov N. A., Kolbina S. A. Locally parameter identifiability for one class of hybrid systems. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 3–8. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.101