УДК 517.5, 519.6 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1
MSC 68W10

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ КООРДИНАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В работе получены необходимые и достаточные условия неотрицательности непрерывно дифференцируемых координатных тригонометрических сплайнов второго порядка и установлены промежутки выпуклости и вогнутости этих сплайнов. Метод исследования состоит в определении вогнутости на промежутках, прилегающих к концам носителя рассматриваемого координатного сплайна, и в применении рассуждений, связанных с числом нулей решения соответствующей краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Библиогр. 16 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: неотрицательность, координатные сплайны, тригонометрические сплайны.

1. Введение. В работах [1–6] рассматривались разные варианты построения аппроксимаций. Среди них фигурировали полиномиальные сплайны (кусочно-полиномиальные функции) различной гладкости, а также неполиномиальные, а именно: тригонометрические и экспоненциальные сплайны; сплайны, определяемые тем или иным оператором (так называемые L-сплайны); сплайны, определяемые семейством линейных функционалов (G-сплайны); сплайны, получаемые минимизацией квадратичного функционала и т. п. (см., например, библиографию в монографиях [2–3]). Сплайны, которые получаются из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и генерирующей вектор-функции, рассматривались в ряде работ (см., например, [6–8]); подобные сплайны с минимальным носителем были названы *минимальными.* Определенный способ выбора упомянутой цепочки векторов позволил рассмотреть минимальные сплайны максимальной гладкости и установить единственность пространства таких сплайнов среди множества пространств минимальных сплайнов (определяемых произвольным выбором полной цепочки векторов при фиксированной сетке и фиксированной генерирующей вектор-функции). Оказалось, что такие пространства образуют цепочку вложенных пространств на последовательности вложенных сеток, а это, в свою очередь, позволило построить вэйвлетное разложение таких цепочек (см., например, [9]).

С другой стороны, минимальные сплайны предоставляют прекрасный аппарат аппроксимации (ибо они получаются из аппроксимационных соотношений). Аппроксимация сплайнами является линейной комбинацией координатных сплайнов, так что наблюдение за качеством аппроксимации и разработка путей ее улучшения значительно упрощаются в случае, когда координатные сплайны имеют определенный знак.

Координатный сплайн будем называть *положительным*, если он положителен во всех внутренних точках своего носителя.

---

*Работа частично выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-08847, № 16-31-60060 мол_а_дк).

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.102

Положительность координатных сплайнов важна для практического применения в задачах геометрического моделирования (см., например, [10–14]), и в задачах изогеометрического анализа (подробности см. в монографии [15]). Знакоопределенность координатных сплайнов важна в использующих эти сплайны методах для минимизации ошибок округления и для поддержания устойчивости вычислительного процесса.

Давно известно (см., например, [3]), что координатные сплайны, генерируемые вектор-функцией $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)$, положительны: это непрерывно дифференцируемые квадратичные сплайны; в этом случае никаких ограничений на сетку не налагается.

Тригонометрические сплайны, получаемые из аппроксимационных соотношений, обладают асимптотически оптимальной аппроксимацией (по N-поперечнику стандартных компактов). Вложенность пространств таких сплайнов, построенных на вложенных сетках, позволяет получать сплайн-всплесковое (вэйвлетное) разложение [8]. Вопросы, связанные с поведением тригонометрических сплайнов и с положительностью координатных тригонометрических сплайнов, рассматривались в [7], где анонсировалась положительность упомянутых сплайнов для сетки с шагом меньше π, и в работе [16], где их положительность доказана для сетки шага меньше $\pi/2$.

Цель данной работы — получить необходимые и достаточные условия положительности непрерывно дифференцируемых координатных тригонометрических сплайнов второго порядка. Метод исследования состоит в определении вогнутости на промежутках, прилегающих к концам носителя рассматриваемого координатного сплайна, а также в применении рассуждений, связанных с числом нулей решения соответствующей краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

2. Общая схема построений. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, а $\mathbb{R}^3$ — множество трехмерных векторов с компонентами из множества $\mathbb{R}^1$ всех вещественных чисел. На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ вещественной оси $\mathbb{R}^1$ введем сетку $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$\ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots,$$

$$\lim_{j\to-\infty} = \alpha, \quad \lim_{j\to+\infty} = \beta.$$

Введем множества $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j, x_{j+1})$ и $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_{j-1}, x_{j+2}]$. Пусть $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — множество трехмерных вектор-столбцов из $\mathbb{R}^3$; предположим, что квадратные матрицы третьего порядка $(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})$, составленные из вектор-столбцов $\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$, неособенные:

$$\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \neq 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию (столбец) $\varphi(t)$ с компонентами из пространства $C^2(\alpha, \beta)$ и с отличным от нуля вронскианом

$$\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t) \neq 0, \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M, обозначим через X.

Пусть функции $\omega_j \in X$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют тождествам

$$\mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k\omega_k(t) + \mathbf{a}_{k+1}\omega_{k+1}(t) \equiv \varphi(t), \qquad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \ \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$$\omega_j(t) \equiv 0, \qquad \forall t \in M \backslash S_j, \ \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, соотношения (2.2) можно рассмотреть как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду предположения (2.1) система (2.2) однозначно разрешима. Из (2.2) и (2.3) видно, что справедливо $\operatorname{supp}\omega_j \subset S_j$ и

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\Big)} \quad \text{при} \quad t \in (x_{j-1}, x_j), \tag{2.4}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}\Big)} \quad \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.5}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\Big)} \quad \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}). \tag{2.6}$$

Введем обозначения $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j), {\varphi'}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_j)$.

Как известно (см. [10]), если $\mathbf{a}_j = c_j\mathbf{b}_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, с произвольными ненулевыми константами c_j и векторами $\mathbf{b}_j$, определяемыми по формулам

$$\mathbf{b}_j \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi_j, \varphi_{j+1}, {\varphi'}_{j+1}){\varphi'}_j - \det({\varphi'}_j, \varphi_{j+1}, {\varphi'}_{j+1})\varphi_j, \tag{2.7}$$

то $\omega_j \in C^1(\alpha, \beta)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

3. Гладкие тригонометрические сплайны второго порядка. Пусть имеем $\varphi(t) = (1, \sin t, \cos t)^T$. В этом случае справедливо равенство $\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t) \equiv -1$.

Для отыскания векторов $\mathbf{a}_j$ найдем векторы $\mathbf{b}_j$ по формуле (2.7). Имеем

$$\det(\varphi_j, \varphi_{j+1}, {\varphi'}_{j+1}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sin x_j & \sin x_{j+1} & \cos x_{j+1} \\ \cos x_j & \cos x_{j+1} & -\sin x_{j+1} \end{pmatrix} = -2\sin^2 \frac{x_{j+1} - x_j}{2},$$

а кроме того,

$$\det({\varphi'}_j, \varphi_{j+1}, {\varphi'}_{j+1}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos x_j & \sin x_{j+1} & \cos x_{j+1} \\ -\sin x_j & \cos x_{j+1} & -\sin x_{j+1} \end{pmatrix} = \sin\,(x_{j+1} - x_j).$$

Итак, получаем

$$\mathbf{b}_j = -2\sin^2 \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x_j \\ -\sin x_j \end{pmatrix} - \sin\,(x_{j+1} - x_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x_j \\ \cos x_j \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие преобразования дают

$$\mathbf{b}_j = -2\sin \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \\ \sin \frac{x_{j+1} + x_j}{2} \\ \cos \frac{x_{j+1} + x_j}{2} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполнено условие (A):

$$x_{j+1} - x_j < \pi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Полагая $c_j = -\frac{1}{2}\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\Big)$, после подстановки $\mathbf{a}_j = c_j\mathbf{b}_j$ определяем векторы $\mathbf{a}_j$ в виде

$$\mathbf{a}_j = \left(\cos\frac{x_{j+1}-x_j}{2}, \sin\frac{x_{j+1}+x_j}{2}, \cos\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right)^T. \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в равенства (2.4)–(2.6) находим тригонометрический B_φ-сплайн $\omega_j^{\mathcal{T}}$ второго порядка с носителем $\operatorname{supp}\omega_j^{\mathcal{T}} = [x_{j-1}, x_{j+2}]$:

$$\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \sin^2\Big(\frac{t-x_{j-1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_j-x_{j-1}}{2}\Big) \quad \text{при} \quad t\in[x_{j-1}, x_j), \tag{3.2}$$

$$\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\sin\Big(\frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}-t\Big)\cos\frac{x_j-x_{j-1}}{2}+$$
$$+\sin\Big(t-\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\Big)\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}+\sin\frac{x_j+x_{j-1}-x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\Bigg]\times$$
$$\times\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\Big)\times\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\Big) \quad \text{при} \quad t\in[x_j, x_{j+1}), \tag{3.3}$$

$$\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \sin^2\Big(\frac{t-x_{j+2}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\Big) \quad \text{при} \quad t\in[x_{j+1}, x_{j+2}]. \tag{3.4}$$

4. Свойства тригонометрических сплайнов второго порядка. Из формул (3.2) и (3.4) видно, что при условии (A) на промежутках (x_{j-1}, x_j) и (x_{j+1}, x_{j+2}) функция $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ положительна.

Найдем первую и вторую производные функции $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg[-\cos\Big(\frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}-t\Big)\cos\frac{x_j-x_{j-1}}{2}+\cos\Big(t-\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\Big)\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\Bigg]\times$$
$$\times\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\Big), \tag{4.1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg[-\sin\Big(\frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}-t\Big)\cos\frac{x_j-x_{j-1}}{2}-\sin\Big(t-\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\Big)\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\Bigg]\times$$
$$\times\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\Big). \tag{4.2}$$

Отыскивая первую и вторую производные функции $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ на промежутках $(x_{j-1}, x_j]$ и $[x_{j+1}, x_{j+2})$, получим

$$\frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\sin\Big(t-x_{j-1}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_j-x_{j-1}}{2}\Big) > 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\cos\Big(t - x_{j-1}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_j - x_{j-1}}{2}\Big) \tag{4.4}$$

при $t \in (x_{j-1}, x_j]$ и

$$\frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\sin\Big(t - x_{j+2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}\Big) < 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\cos\Big(t - x_{j+2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}\Big) \tag{4.6}$$

при $t \in [x_{j+1}, x_{j+2})$.

Рассмотрим функцию $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$. Используя (4.3), (4.5) и учитывая непрывность производной функции $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$, придем к неравенствам

$$u(x_j) > 0, \qquad u(x_{j+1}) < 0. \tag{4.7}$$

Из соотношений (4.7) следует, что (ввиду аналитичности) функция $u(t)$ может иметь лишь нечетное количество нулей на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$. Легко видеть, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению $u'' + u = 0$, так что $u(t)$ имеет представление

$$u(t) = K\sin(t + \theta), \tag{4.8}$$

где K и θ определяются из граничных условий

$$u(x_j) = \frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(x_j), \qquad u(x_{j+1}) = \frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(x_{j+1})$$

с использованием формул (4.3) и (4.5) соответственно. Представление (4.8) показывает, что, для того чтобы на промежутке $[c, d]$ функция $u(t)$ имела менее трех нулей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $d - c < 2\pi$. Применяя это соображение к функции $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ на рассматриваемом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$, видим, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При условии* (A) *функция* $\frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ *(см. формулу (4.2)) на промежутке* $[x_j, x_{j+1}]$ *имеет один нуль.*

Следствие 1. *При условии* (A) *функция* $\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ *на промежутке* (x_j, x_{j+1}) *неположительна.*

Теорема 1. *1) Условие* (A) *необходимо и достаточно для того, чтобы все функции* $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ *были положительны* $\forall j \in \mathbb{Z}$.

2) При условии (A) *на промежутке* (x_j, x_{j+1}) *функция* $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ *положительна и выпукла. Если* $x_j - x_{j-1} \le \pi/2$, *то на промежутке* (x_{j-1}, x_j) *функция* $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ *положительна и вогнута, а если* $\pi/2 < x_j - x_{j-1} < \pi$, *то эта функция (оставаясь положительной) вогнута на промежутке* $(x_{j-1}, x_{j-1} + \pi/2)$ *и выпукла на промежутке* $(x_{j-1} + \pi/2, x_j)$. *Аналогичное утверждение относится к промежутку* (x_{j+1}, x_{j+2})*: если* $x_{j+2} - x_{j+1} \le \pi/2$, *то рассматриваемая функция положительна и вогнута на всем упомянутом промежутке, если же* $\pi/2 < x_{j+2} - x_{j+1} < \pi$, *то на промежутке* $(x_{j+1}, x_{j+2} - \pi/2)$ *эта функция (оставаясь положительной) выпукла, а на промежутке* $(x_{j+2} - \pi/2, x_{j+2})$ *она вогнута.*

Доказательство. Для доказательства необходимости, указанной в пункте 1), покажем, что в классе сеток, нарушающих условие (A), существует такая сетка, на которой хотя бы один координатный сплайн меняет знак.

Рассмотрим сетку, для всех сеточных интервалов которой выполняется условие (A), кроме одного, где это условие нарушено: сумма длин двух соседних интервалов больше 2π. Тогда найдется незнакоопределенная функция $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$. Действительно, пусть $x_{k+2} - x_k > 2\pi$, а все промежутки $[x_j, x_{j+1})$, $j \neq k$, удовлетворяют условию (A). Тогда функция $\omega_k^{\mathcal{T}}(t)$ меняет знак: на промежутке (x_{k+1}, x_{k+2}) она отрицательна, а на промежутке (x_{k-1}, x_k) положительна.

Достаточность, утверждаемая в пункте 1 теоремы, следует из формул (3.2)–(3.4), (4.1)–(4.8) и леммы 1; из этих же формул вытекают утверждения пункта 2. ∎

На рис. 1, 2 приведены графики двух вариантов рассматриваемого координатного тригонометрического сплайна на равномерных сетках вида $x_j = jh$, $h > 0$, для значений $h = 1$ и $h = 5$ соответственно. Эти графики иллюстрируют доказанный выше результат: при $h < \pi$ упомянутый сплайн положителен, а при $h > \pi$ он не положителен.

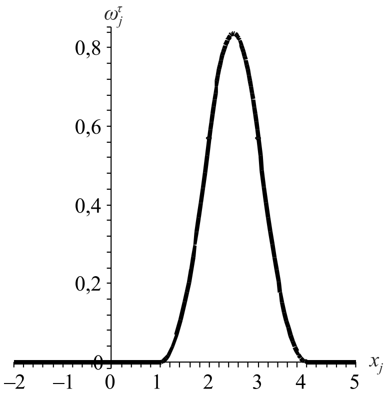

Рис. 1. Тригонометрический сплайн при $h = 1$.

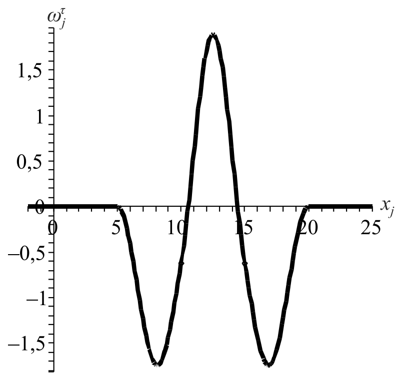

Рис. 2. Тригонометрический сплайн при $h = 5$.

Замечание. В работе [9] допущена погрешность, замеченная А. А. Макаровым: в качестве основного условия фигурирует условие (A), но приведенные там доказательства справедливы лишь при более жестком предположении:

$$x_{j+1} - x_j < \pi/2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Результаты данной работы устраняют эту погрешность и позволяют установить положительность тригонометрических сплайнов при выполнении условия (A).

Литература

1. *Bezier P. E.* Example of an Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System // Proc. Roy. Soc. London. 1971. Vol. A321. P. 207–218.

2. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974.

3. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.

4. *Piegl L., Tiller W.* Curve and Surface Constructions Using Rational B-splines // Comp. Aid. Des. 1987. Vol. 19. P. 485–498.

5. *Rogers D. F., Fog N. G.* Constrained B-spline Curve and Surface Fitting // CADJ. 1989. Vol. 21. P. 641–648.

6. *Демьянович Ю. К.* Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. 356 с.

7. *Бурова И. Г., Демьянович Ю. К.* О гладкости сплайнов // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, № 12. С. 40–43.
8. *Демьянович Ю. К.* Вложенные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение // Математические заметки. 2005. Т. 78, вып. 5. С. 658–675.
9. *Демьянович Ю. К.* Теория сплайн-всплесков. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 526 с.
10. *Pena J. M.* Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves // Computer Aided Geometric Design. 1997. Vol. 14, N 1. P. 5–11.
11. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
12. *Buchwald B., Muhlbach G.* Construction of B-splines for generalized spline spaces from local ECT-systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 159. P. 249–267.
13. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 416 с.
14. *Xu G., Wang G.-Z.* AHT Bezier Curves and NUAHT B-Spline Curves // Journal of Computer Science and Technology. 2007. Vol. 22, N 4. P. 597–607.
15. *Cottrell J. A., Hughes Th. J. R., Bazilevs Yu.* Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons. 2009. 360 p.
16. *Демьянович Ю. К., Лебединский Д. М., Лебединская Н. А.* Двусторонние оценки некоторых координатных сплайнов // Записки научн. семинаров ПОМИ. 2015. Т. 439. С. 74–92.

Статья поступила в редакцию 21 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Демьянович Юрий Казимирович — доктор физико-математических наук, профессор; y.demjanovich@spbu.ru

Макаров Антон Александрович — доктор физико-математических наук, доцент; a.a.makarov@spbu.ru

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF NONNEGATIVITY FOR COORDINATE TRIGONOMETRICAL SPLINES OF THE SECOND ORDER

Yuri K. Dem'yanovich, Anton A. Makarov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; y.demjanovich@spbu.ru, a.a.makarov@spbu.ru

There are many different ways to define coordinate splines. The splines, which are defined with approximation relations, have the best approximation properties as to order of N-width for the standard compact sets. The suitable choice of the approximation relations gives the maximal smoothness under the condition of minimal support for coordinate splines. On the other hand, the choice of different generating function gives opportunity to receive splines of different types (polynomial, exponential, trigonometrical ones and so on).

The paper is discussed the positivity of coordinate trigonometrical splines of the second order with maximal smoothness.

Let us consider the real grid $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$\ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$$

By definition we put $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}\,(x_j, x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_{j-1}, x_{j+2}]$, and consider three-component vectors: generating vector function $\varphi(t)$ and family of vectors $\mathbf{a}_j$, defined with formulas

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \sin t, \cos t)^T, \quad \mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi_j, \varphi_{j+1}, {\varphi'}_{j+1}){\varphi'}_j - \det({\varphi'}_j, \varphi_{j+1}, {\varphi'}_{j+1})\varphi_j,$$

where $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j), {\varphi'}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_j)$.

The coordinate trigonometric splines $\omega_j \in C^1$ are defined by approximation relations

$$\mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k\omega_k(t) + \mathbf{a}_{k+1}\omega_{k+1}(t) \equiv \varphi(t) \qquad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \ \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in M\backslash S_j, \ \ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Theorem. *The inequality $x_{j+1} - x_j < \pi \ \ \forall j \in \mathbb{Z}$ is necessary and sufficient condition for nonnegativity of the functions $\omega_j(t)$ $\forall j \in \mathbb{Z}$.*

Furthermore, the sufficient conditions of convexity on the intervals (x_{j-1}, x_j), (x_{j+1}, x_{j+2}) and concavity on the interval (x_j, x_{j+1}) have been obtained in the paper. Refs 16. Figs 2.

Keywords: nonnegativity, coordinate splines, trigonometrical splines.

References

1. Bezier P. E., “Example of an Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System”, *Proc. Roy. Soc.* **A321**, 207–218 (London, 1971).

2. Varga R. S., *Functional Analysis and Approximations in Numerical Analysis* (Kent State University, Kent, Ohio, 1971).

3. Zavjalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L., *Methods of Spline Functions* (Moscow, 1980) [in Russian].

4. Piegl L., Tiller W., “Curve and Surface Constructions Using Rational B-splines”, *Comp. Aid. Des.* **19**, 485–498 (1987).

5. Rogers D. F., Fog N. G., “Constrained B-spline Curve and Surface Fitting”, *CADJ* **21**, 641–648 (1989).

6. Dem’yanovich Yu. K., *Local Approximation on Manifold and Minimal Splines.* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 1994) [in Russian].

7. Burova I. G., Dem’yanovich Yu. K., “On smoothness of Splines”, *J. Mathematical Modeling* **16**(12), 40–43 (2004) [in Russian].

8. Dem’yanovich Yu. K., “Embedded Spaces of Trigonometrical Splines and Their Wavelet Expansion”, *Mathematical Notes* **78**, issue 5, 615–630 (2005).

9. Dem’yanovich Yu. K., *Theory of Spline-Wavelets* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2013, 526 p.) [in Russian].

10. Pena J. M., “Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves”, *Computer Aided Geometric Design* **14**(1), 5–11 (1997).

11. Rogers D. F., Adams J. A., *Mathematical Elements for Computer Graphics* (2nd ed., McGraw-Hill, Inc., New York, USA, 1990).

12. Buchwald B., Muhlbach G., “Construction of B-splines for generalized spline spaces from local ECT-systems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **159**, 249–267 (2003).

13. Kvasov B. I., *Methods of Iso-geometrical Spline Approximation* (Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 2006) [in Russian].

14. Xu G., Wang G.-Z., “AHT Bezier Curves and NUAHT B-Spline Curves”, *Journal of Computer Science and Technology* **22**(4), 597–607 (2007).

15. Cottrell J. A., Hughes Th. J. R., Bazilevs Yu., *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA* (John Wiley & Sons, 2009, 360 p.).

16. Dem’yanovich Yu. K., Lebedinskii D. M., Lebedinskaja N. A., “Two-Sides Estimates of Some Coordinate Splines”, *J. of Math. Sci.* **216**, issue 6, 770–782 (2016).

Для цитирования: Демьянович Ю. К., Макаров А. А. Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 9–16.
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.102

For citation: Dem’yanovich Yu. K., Makarov A. A. Necessary and sufficient conditions of nonnegativity for coordinate trigonometrical splines of the second order. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 9–16. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.102