УДК 519.2
MSC 60F15

Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ В УЗКОМ СМЫСЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. А. Егоров

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

В своей недавней работе, опубликованной в Вестнике СПбГУ, серия 1, В. В. Петров нашел новые достаточные условия для усиленного закона больших чисел для стационарных в широком смысле последовательностей случайных величин. Эти условия выражены в терминах вторых моментов. В данной работе с помощью эргодической теоремы решается аналогичная задача для последовательностей стационарных в узком смысле последовательностей. При отсутствии вторых моментов для формулировки условий используются вторые моменты усеченных случайных величин. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: закон больших чисел, стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, эргодическая теорема, усеченная случайная величина, дисперсия, условное математическое ожидание.

В своей недавней работе [1] В. В. Петров получил следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — стационарная в широком смысле последовательность случайных величин, $EX_n = b, \rho_{i,j}$ — коэффициент корреляции между случайными величинами X_i и X_j, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Если выполняется условие*

$$\sum_{m<i<j\le n} \rho_{i,j} \le C(n-m)^{2r-1} \tag{1}$$

при некотором $r \ge 1$ и при всех $n > m$, где C — постоянная, то с вероятностью единица справедливо соотношение

$$\frac{S_n - nb}{n^r} \to 0. \tag{2}$$

При $r = 1$ это соотношение превращается в усиленный закон больших чисел (у. з. б. ч.) в форме $S_n/n \to b$ п. н.

В теореме 1 у. з. б. ч. выводится из условий, накладываемых только на ковариационную функцию последовательности $X_n, n = 1, 2, \ldots$. Целью этой статьи является исследование у. з. б. ч. при выполнении условий такого же типа для стационарных в узком смысле последовательностей случайных величин. Сначала отметим, что для таких последовательностей соотношение (2) при $r > 1$, $E|X_1| < \infty$ выполняется в силу эргодической теоремы.

Чтобы проанализировать вопрос о том, насколько усиление условия стационарности для случайных величин с конечными дисперсиями позволяет снизить ограничения на ковариации, достаточно сравнить приведенные ниже ограничения (4) и (5).

В дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что в соотношениях (1) $DX = 1$.

Приведем в качестве замечания к теореме 1 условие (1), непосредственно переписанное в терминах ковариационной функции.

Замечание 1. Положим $k(j) = \rho_{i,i+j}, i = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots$. В силу стационарности рассматриваемой последовательности двойную сумму в (1) можно записать в виде одинарной суммы

$$\sum_{m<i<j\le n} \rho_{ij} = \sum_{m=1}^{n-1} (n-m)k(m).$$

Таким образом, условие (1) можно переписать в виде

$$\sum_{m=1}^{n-1} (n-m)k(m) < Cn^{2r-1}. \tag{3}$$

При $r = 1$ оно превращается в неравенство

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{1-m}{n}\right) k(m) < C. \tag{4}$$

Будем говорить, что для стационарной в широком смысле последовательности $X_1, X_2, \ldots$ справедлив среднеквадратический закон больших чисел (ср. кв. з. б. ч.), если для нее при $r = 1$ справедливо соотношение (2), в котором вместо сходимости с вероятностью единица используется среднеквадратическая сходимость.

Приведем для сравнения условия для ср. кв. з. б. ч. (см. [2]).

Теорема 2. *Для справедливости ср. кв. з. б. ч. для стационарной в широком смысле последовательности $X_1, X_2, \ldots$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} k(m) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{5}$$

Оказывается, что для стационарных в узком смысле последовательностей случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ условие (5) при существовании дисперсий также необходимо и достаточно для у. з. б. ч.

Теорема 3. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, имеющих конечные дисперсии. Тогда для справедливости у. з. б. ч. необходимо и достаточно выполнение условия (5).*

Доказательство. Из условий теоремы 3 вытекает эргодическая теорема ([2, 3]), согласно которой для некоторой случайной величины Y, имеющей $EY = EX_n = b$, с вероятностью единица выполняется соотношение

$$\frac{S_n}{n} \to Y.$$

С другой стороны, из теоремы 2 следует, что при выполнении условия (5) справедливо $S_n/n \to b$ в среднем квадратичном при $n \to \infty$. Пределы «в среднем квадратичном» и «с вероятностью единица» (если они существуют) одной и той же последовательности случайных величин должны совпадать, поэтому $Y = b$. Достаточность условия (5) доказана.

Из стационарности в широком смысле последовательности $X_1, X_2, \ldots$ следует (см. [2]) существование случайной величины Y, имеющей конечную дисперсию, для которой выполняется $S_n/n \to Y$ в среднем квадратичном. С другой стороны, если для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ справедлив у. з. б. ч., т. е. $S_n/n \to b$ п. н., то $Y = b$, поскольку пределы «в среднем квадратичном» и «с вероятностью единица» одной и той же последовательности случайных величин должны совпадать. Необходимость в теореме 3 непосредственно следует из теоремы 2.

Если величины $X_1, X_2, \ldots$ не обладают вторыми моментами, условия для у. з. б. ч. можно выразить с помощью ковариационных функций их усечений.

Для изложения дальнейших результатов потребуются некоторые более полные сведения из эргодической теории (см. [2, 3]).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, для которой $E|X_1| < \infty$. Ее (или равнораспределенную с ней последовательность) можно задать на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) таким образом, что на Ω можно построить такое сохраняющее меру F-измеримое преобразование T, что с вероятностью единица будет выполняться равенство $X_n = X_n(\omega) = X_1(T^{(n-1)}\omega)$. Пусть G обозначает σ-алгебру множеств из F, инвариантных при преобразовании T. Преобразование T называется *эргодическим* или *метрически транзитивным*, если σ-алгебра G вырождена. Одна из формулировок эргодической теоремы состоит в том, что с вероятностью единица имеет место равенство

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m = E(X_1|G). \tag{6}$$

Таким образом, у. з. б. ч. справедлив, если выполняется $E(X_1|G) = EX_1$, в частности, для эргодических процессов.

Для любого $a \geq 0$ положим $X_m^a = X_m I_{[-a,a]}(X_m)$, $m = 1, 2, \ldots$, где I_A — индикатор множества A.

Теорема 4. *1) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P), $E|X_1| < \infty$. Пусть для некоторой последовательности постоянных a, сходящейся к бесконечности, выполнено условие*

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1^a, X_m^a) = 0, \tag{7}$$

где $\operatorname{cov}(X_1^a, X_m^a) = E(X_1^a - EX_1^a)(X_m^a - EX_m^a)$ — ковариация усеченных случайных величин X_1^a и X_m^a. Тогда для последовательности X_n справедлив у. з. б. ч., т. е. с вероятностью единица выполняется

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} X_m = E(X_1).$$

2) Пусть $X_n = X_n(\omega) = X_1(T^{(n-1)}\omega)$, $\omega \in \Omega$, $E|X_1| < \infty$ и преобразование T эргодично. Тогда для любого $a \geq 0$ справедливо соотношение (7).

Доказательство. 1) При выполнении условий теоремы 4 справедлива эргодическая теорема, т. е. выполнено соотношение (6).

В силу (7) и теоремы 3 с вероятностью единица выполняется

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} X_m^a = E(X_1^a|G) = EX_1^a.$$

Из непрерывности интеграла следует

$$E|E(X_1|G) - EX_1^a| = E|E(X_1|G) - E(X_1^a|G)| \leq E|E((X_1 - X_1^a)|G)| \leq$$
$$\leq E(|X_1 - X_1^a||G) = E|X_1 - X_1^a| \to 0 \quad (a \to \infty). \quad (8)$$

В соответствии с условиями теоремы 4 выберем $a = a_k \to \infty$. Тогда будем иметь $EX_1^a \to EX_1$, что вместе с (8) влечет равенство $E(X_1|G) = E(X_1) = b$. С учетом (6) последнее соотношение доказывает теорему 4.

2) Пусть сохраняющее меру P преобразование T таково, что выполняется $X_n = X_n(\omega) = X_1(T^{(n-1)}\omega)$ и преобразование эргодично. Необходимое и достаточное условие эргодичности может быть сформулировано в удобном для нас виде (см. [2, 3])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{cov}(I_A(\omega), I_B(T^m\omega)). \quad (9)$$

Используя линейность скалярного произведения, соотношение (9) легко перенести с индикаторов на ступенчатые случайные величины вида $Z(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(\omega)$, где $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ — некоторое разбиение множества Ω, $a_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, для ступенчатых функций будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{cov}(Z(\omega), U(T^m\omega)) = 0.$$

По непрерывности скалярного произведения в гильбертовом пространстве H случайных величин с конечными дисперсиями это соотношение переносится на случайные величины из H, поэтому оно справедливо для величин $Z(\omega) = U(\omega) = X_1^a(\omega)$.

Замечание 2. Для стационарных последовательностей случайных величин с конечным математическим ожиданием у. з. б. ч. и эргодичность близкие, но различные свойства. Приведем пример неэргодической стационарной последовательности, для которой справедлив у. з. б. ч.

Пусть последовательность X_n образует стационарную цепь Маркова X с пространством состояний $\{0, 1, -1\}$, начальным стационарным распределением

$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

и матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Множество $A = \{\omega : X_n(\omega) = 0, n = 1, 2, \ldots\}$ является инвариантным и $P(A) = 1/2$. Марковская цепь X с равной вероятностью является цепью, тождественно равной нулю, и эргодической цепью с нулевым математическим ожиданием, начальным распределением $\pi_1 = (1/2, 1/2)$ и матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для последовательности X_n справедлив у. з. б. ч.

Литература

1. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел для стационарной последовательности // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 641–643.

2. *Ламперти Дж.* Случайные процессы / пер. с англ. Киев: Вища школа, 1983. 223 с.

3. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация / пер. с англ. М.: Мир, 1969. 238 с.

Статья поступила в редакцию 26 августа 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

С в е д е н и я   о б   а в т о р е

Егоров Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор; 44eva@rambler.ru

ON THE LAW OF LARGE NUMBERS FOR STATIONARY IN THE NARROW SENSE SEQUENCES

Vladimir A. Egorov

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", ul. Professora Popova, 5, St. Petersburg, 197376, Russian Federation; 44eva@rambler.ru

In his recent work published in Vestnik SPbSU, Ser. 1, V. V. Petrov found new sufficient conditions for the strong law of large numbers for the stationary in the broad sense sequences of random variables. These conditions are expressed in the terms of the second moments. In my work with the aid of the ergodic theorem analogous problems are solved for the sequences of stationary in the narrow sense random variables. In the absence the second moments for the formulation of conditions are used the second moments of the truncated random variables. At the end of the article is given an example to the stationary sequence of random variables, which is not ergodic, but for which is valid the strong law of large numbers. Refs 3.

Keywords: law of large numbers, the stationary in the narrow sense sequence of random variables, the ergodic theorem, truncated random variable, dispersion, conditional mathematical expectation.

References

1. Petrov V. V., On the strong law of large numbers for the stationary sequence, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3(61)**, issue 4, 641–643 (2016) [in Russian].

2. Lamperti J., *Stochastic processes* (Springer-Verlag, New York, 1977).

3. Byillingsley P., *Ergodic theory and information* (John Willey, Inc., New York, 1965).

Для цитирования: Егоров В. А. Об усиленном законе больших чисел для стационарных в узком смысле последовательностей // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 17–21. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.103

For citation: Egorov V. A. On the law of large numbers for stationary in the narrow sense sequences. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 17–21. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.103