УДК 517.929 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1
MSC 62L20, 60G48

# НАХОЖДЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

*Т. П. Красулина*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В данной статье с помощью метода стохастической аппроксимации находится неподвижная точка функции, значения которой наблюдаются с некоторой аддитивной помехой. Предполагается, что выполняются условия теоремы М. Б. Невельсона и Р. Э. Хасьминского для нахождения корня функции регрессии. Кроме того, предполагается, что для исследуемой функции справедливо одно из следующих предположений: псевдосжатие, ослабленное сжатие, полусжатие, квазисжатие, обобщенное сжатие. В статье с помощью методики, основанной на применении супермартингалов, доказано, что имеет место сходимость с вероятностью 1 модифицированной процедуры Роббинса—Монро к неподвижной точке функции. Полученный результат является менее ограничительным, чем результат С. В. Комарова. Библиогр. 4 назв.

*Ключевые слова*: стохастическая аппроксимация, неподвижная точка функции, псевдосжатие функции.

**1. Введение.** Изучение процессов, в основе которых лежит метод стохастической аппроксимации, началось сравнительно давно и продолжается по сей день (см. [1, 2]). В настоящее время процессы стохастической аппроксимации и их модификации широко используются в задачах оценивания, идентификации, обучения и различных задачах адаптации. Кроме того, эти процессы находят применение в задачах нахождения неподвижных точек различных отображений, интерес к которым значительно возрос в последнее время. С успехом применяются такие алгоритмы и для решения медико-биологических задач.

В силу своей рекуррентности и достаточно простого вида эти процессы не требуют большого объема вычислений и рабочей памяти, удобны для практической реализации на ЭВМ.

В данной работе приводятся новые условия применения алгоритмов стохастической аппроксимации в задачах нахождения неподвижных точек функций. Эти условия являются менее ограничительными, чем в статье [3], посвященной той же задаче.

**2. Постановка задачи.** Для нахождения неподвижной точки $p$ кусочно-непрерывной функции $T(x)$, значения которой могут наблюдаться с некоторой аддитивной помехой $z(x)$, предлагается следующая процедура:

$$x_{n+1} = x_n + a_n(T(x_n - 0) - x_n + z_n(x_n)), \tag{1}$$

где $x_1$ — начальная случайная величина, $a_n \geqslant 0$. Вероятностное пространство $(\Omega, U, P)$ для определения величины $z(w, x)$, $w \in \Omega$, вводится обычным для стохастической аппроксимации образом (см., например, [4, с. 108–110]).

**3. Основные результаты.** Имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть выполняются условия:*

*1)* $|T(x)| \leqslant A|x| + B$, *где* $A$, $B$ — *некоторые числа,* $A > 0$, $B > 0$*;*

*2)* $\inf |x - T(x)| > 0$, *для некоторого* $\varepsilon$, *удовлетворяющего условиям* $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < |x - p| < \varepsilon^{-1}$*;*



 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.104

*3)* $E(z_n^2(x_n)|x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *с вероятностью 1;*
*4)* $E(z^2(x_n)|x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \sigma^2 < \infty$ *с вероятностью 1;*
*5)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$*;*
*6) справедливы неравенства*

$$(T(x) - T(y))^2 \leqslant (x - y)^2 + ((x - T(x)) - (y - T(y)))^2, \tag{2}$$

$$(T(x) - p)^2 \leqslant (x - p)^2 + (T(x) - x)^2, \tag{3}$$

*где* $T(p) = p$, $p$ *— неподвижная точка функции* $T(x)$*,*

$$|T(x) - T(y)| \leqslant \max\{|x - y|, |x - T(x)|, |y - T(y)|, |x - T(y)|, |y - T(x)|\}.$$

*Тогда с вероятностью 1 процесс (1) сходится к точке* $p$*.*

Доказательство. Справедливость условий этой теоремы следует из [4, гл. 4, теорема 1.1], если взять в качестве $R(x)$ функцию $(T(x) - x)$, для которой неподвижная точка функции $T(x)$ будет корнем.

Остается проверить условие $(x - p)R(x) \leqslant 0$.

Из формулы (2) в условии 6 данной теоремы следует соотношение

$$(T(x) - T(y))^2 \leqslant 2(x - y)^2 - 2(x - y)(T(x) - T(y)) + (T(x) - T(y))^2,$$

равносильное неравенству

$$(x - y)((x - y) - (T(x) - T(y)) \geq 0.$$

Положив в этом неравенстве $y = p$, приходим к соотношению

$$(x - p)R(x) \leqslant 0.$$

Аналогично к этому соотношению приходим, если рассмотрим неравенство (3) в условии 6 теоремы.

Теперь рассмотрим условие

$$(T(x) - T(y))^2 \leqslant \max\left\{(x - y)^2, (x - T(x))^2, (x - T(y))^2, (y - T(x))^2, (y - T(y))^2\right\}.$$

Если в качестве $y$ взять неподвижную точку $p$, получим соотношение

$$(T(x) - p)^2 \leqslant \max\{(x - p)^2, (x - T(x))^2\} \leqslant (x - p)^2 + (x - T(x))^2,$$

из которого следует неравенство

$$(x - p)R(x) \leqslant 0.$$

Теорема доказана.

В статье [3] предполагалась непрерывность функции $T(x)$, что является более ограничительным условием, чем в данной работе.

Примерами разрывных функций, удовлетворяющих условиям теоремы, являются функции $T(x) = 0,5x$ при $x \leqslant 1$ и $T(x) = x + 1$ при $x > 1$.

## Литература

1. *Граничин О. Н., Поляк Б. Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003. 291 с.

2. *Kushner H. J., Yin G. G.* Stochastic Approximation Algorithms and Applications. New York: Springer-Verlag, 2002. 416 p.

3. *Комаров С. В.* О нахождении неподвижных точек случайных отображений методом стохастической аппроксимации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 108–110.

4. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.


Статья поступила в редакцию 23 марта 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторе

*Красулина Татьяна Павловна* — кандидат физико-математических наук, доцент; agelig@yandex.ru

## FINDING FIXED POINTS OF FUNCTIONS BY STOCHASTIC APPROXIMATION METHOD

*Tatiana P. Krasulina*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; agelig@yandex.ru

In this paper, a stochastic approximation method is used to find a fixed point of a function observed with an additive error. The result is obtained under the assumptions of Gladyshev's theorem on root finding problem. It is also assumed that the function is either a pseudo-contraction, or relaxed contraction, or hemi-contraction, or quasi-contraction, or generalized contraction. By using techniques based on supermartingales, it is shown that a modified Robbins—Monro process converges to the fixed point with probability one. The established theorem is less restrictive than a prior result by S. V. Komarov since this theorem imposes no special requirements to the studied function. Refs 4.

*Keywords*: stochastic approximation, fixed point of function, pseudocontraction of function.


## References

1. Granichin O. N., Polyak B. T., *Randomized Algorithms of an Estimation and Optimization Under Almost Arbitrary Noises* (Nauka, Moscow, 2003) [in Russian].

2. Kushner H. J., Yin G. G., *Stochastic Approximation Algorithms and Applications* (Springer, New York, 2002).

3. Komarov S. V., “On finding fixed points of random mappings by the stochastic approximation method”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **25**(1), 1992.

4. Nevelson M. B., Hasminskii R. Z. *Stochastic Approximation and Recursive Estimation* In Ser. *Translations of Mathematical Monographs* (Amer. Math. Soc., **47**, 1976).


**Для цитирования:** Красулина Т. П. Нахождение неподвижных точек функций методом стохастической аппроксимации // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 22–24. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.104

**For citation:** Krasulina T. P. Finding fixed points of functions by stochastic approximation method. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 22–24. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.104