

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И СТРУКТУРЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОШИБОК*

Г. А. Леонов^{1,2}, Б. Р. Андриевский^{1,2,3}, Р. Н. Мокаев^{1,2}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт Проблем Машинovedения Российской Академии Наук (ИПМаш РАН),

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, В. О., Большой пр., 61

³ Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики,

Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Для систем лоренцевского типа со сжатием объемов получены аналитические критерии глобальной устойчивости и неустойчивости их стационарных множеств.

Описаны и проанализированы компьютерные эксперименты для исследования качественного поведения траекторий систем лоренцевского типа, интерпретация которых без дополнительной проверки, ориентированной на аналитические результаты, может приводить к неверным заключениям. Библиогр. 41 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: структуры компьютерных ошибок, устойчивость, система лоренцевского типа, диссипативность, функция Ляпунова, система Чена, система Лу.

1. Введение. После открытия в 1963 г. Э. Лоренцем [1] странного аттрактора возникло новое научное направление анализа хаотических процессов в конечномерных динамических системах [2–7]. Эти исследования можно разделить на две части. Первая часть представляет собой разработку аналитических методов исследования [8–13], вторая — создание численных методов и проведение компьютерных экспериментов [14–19].

В течение нескольких десятилетий предпринимались попытки синтеза аналитических подходов и компьютерных экспериментов для понимания природы аттракторов лоренцевского типа. Для нас важно заметить, что в некоторых работах (см., например, [20, 21]) высказывались предположения о том, что хаотический аттрактор системы Лоренца — это следствие компьютерного хаоса, т. е. он порожден ошибками, возникающими при применении численных методов и проведении компьютерных экспериментов. В дальнейшем были предприняты попытки компьютерного доказательства (computer assisted proof) существования хаотического аттрактора в системе Лоренца [22–24].

В настоящей статье нам удалось получить аналитический критерий глобальной устойчивости и неустойчивости стационарных множеств в системах лоренцевского типа. В пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости этих множеств имеют общую границу. Нами проведены компьютерные эксперименты в окрестности этой границы, которые иллюстрируют наличие компьютерного хаоса. Мы называем объекты, получающиеся в фазовом пространстве (циклы и инвариантные множества лоренцевского типа), *структурами компьютерных ошибок* (computer

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-8580.2016.1).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

error structures). Эти структуры появляются при тех значениях параметров, для которых наш аналитический критерий заведомо дает стремление почти всех траекторий к бесконечности.

2. Аналитический критерий. Рассмотрим одну из систем лоренцевского типа [25, 26]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - dy - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{1}$$

где σ, b — положительные числа, d — некоторое число и $r > d$. В частных случаях для системы Лоренца имеем $d = 1$ [1], для системы Чена — $r = -\sigma - d$ [27], для системы Лу — $r = 0$ [28] и для системы Тигана — $d = 0$ [29]. Хорошо известно, что для системы Лоренца оператор сдвига по траекториям сжимает объемы (так как $\sigma + b + 1 > 0$). Также хорошо известно, что система Лоренца диссипативна по Левинсону: существует число $R = R(\sigma, b, r)$ такое, что для любого решения системы (1) выполнено неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) \leq R.$$

Сохраняется ли это свойство для системы (1) при выполнении неравенства $\sigma + b + d > 0$?

Актуальность этого вопроса следует из того факта, что широко известные системы Лу и Чена [30–33] имеют вид (1) с $d < 0$.

В настоящей статье получен отрицательный ответ на этот вопрос. Более того, доказанная ниже теорема дает точную границу областей глобальной устойчивости и глобальной неустойчивости в пространстве параметров $\{b = 2\sigma = -2d\}$. Во второй части работы именно в окрестности этой границы получены структуры компьютерных ошибок.

Теорема 1. *Если $2\sigma > b$, $\sigma + d < 0$, то почти любое решение системы (1) стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Если $2\sigma < b$, $\sigma + d > 0$, то любое решение системы (1) стремится при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменой

$$\eta := \sigma(y - x), \quad \xi := z - \frac{x^2}{b}$$

приведем систему (1) к форме

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= -(\sigma + d)\eta + \sigma\xi x + \sigma(r - d)x - \frac{\sigma}{b}x^2, \\ \dot{\xi} &= -b\xi - \frac{2\sigma - b}{b\sigma}x\eta.\end{aligned}$$

Далее заменой

$$t := \sqrt{\sigma(r - d)}t, \quad x := \frac{x}{\sqrt{b(r - d)}}, \quad \vartheta := \frac{\eta}{\sqrt{b\sigma}(r - d)}, \quad u := \frac{\xi}{r - d}$$

эту систему приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -\lambda\vartheta - xu + x - x^3, \\ \dot{u} &= -\alpha u - \beta x\vartheta, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\lambda = \frac{\sigma + d}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad \beta = \frac{2\sigma - b}{\sigma}.$$

Легко показать, что состояния равновесия системы (2) имеют вид

$$S_0 = (0, 0, 0), \quad S_{1,2} = (\pm 1, 0, 0). \quad (3)$$

Матрица Якоби правой части системы (2) выглядит следующим образом:

$$J(x, \vartheta, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3x^2 - u + 1 & -\lambda & -x \\ -\beta\vartheta & -\beta x & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Далее воспользуемся стандартным подходом современной теории устойчивости [34] и некоторыми идеями теории стабилизации [35–39]. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x, \vartheta, u) = \vartheta^2 - \frac{u^2}{\beta} - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Производная \dot{V} вдоль решений системы (2) имеет вид

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t), u(t)) = 2 \left(-\lambda\vartheta(t)^2 + \frac{\alpha}{\beta}u(t)^2 \right). \quad (5)$$

Пусть выполнены условия первой части теоремы: $2\sigma > b$, $\sigma + d < 0$. Тогда будем иметь $\lambda < 0$, $\beta > 0$ и

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t), u(t)) = 2 \left(-\lambda\vartheta(t)^2 + \frac{\alpha}{\beta}u(t)^2 \right) > \varepsilon (\vartheta(t)^2 + u(t)^2). \quad (6)$$

Предположим, что решение $(x(t), \vartheta(t), u(t))$ ограничено на $[0, +\infty)$. Тогда из (2) следует, что $\dot{\vartheta}$, \dot{u} ограничены. Из (4) следует неравенство

$$V(x(t), \vartheta(t), u(t)) > V(x(0), \vartheta(0), u(0)) + \varepsilon \int_0^t (\vartheta(\tau)^2 + u(\tau)^2) d\tau. \quad (7)$$

Так как $V(x(t), \vartheta(t), u(t))$ ограничено, то будем иметь

$$\int_0^{+\infty} (\vartheta(\tau)^2 + u(\tau)^2) d\tau < +\infty. \quad (8)$$

Тогда по лемме Барбалата [40] из ограниченности $\dot{\vartheta}$, \dot{u} и (5) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\vartheta(t)^2 + u(t)^2) = 0.$$

Отсюда следует, что $\vartheta(t) \rightarrow 0$, $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Первые два уравнения системы (2) можно переписать в виде

$$\ddot{x} - x + x^3 = f(t), \quad (9)$$

где $f(t) = -\lambda\vartheta(t) - x(t)u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как функция $x(t)$ ограничена, существует последовательность моментов времени $\{t_k\}$ такая, что $x(t_k) \rightarrow C$ при $k \rightarrow +\infty$. Поскольку $\dot{x}(t) = \vartheta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то для любого ρ можно выбрать такое T_1 , что $|\dot{x}(t)| < \rho$ при $t > T_1$. Предположим, что $(C, 0)$ не является состоянием равновесия системы (6) при $f = 0$. Поскольку $f(t) \rightarrow 0$, то для любого малого δ можно выбрать такой момент времени T_2 , что $|f(t)| < \delta$ при $t > T_2$. По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра решение системы (6) при $f = 0$ с начальными данными $x(0) = C$, $\dot{x}(0) = 0$ на некотором интервале времени $[0, T_3]$ будет близко к решению системы (6) при $|f(t)| < \delta$.

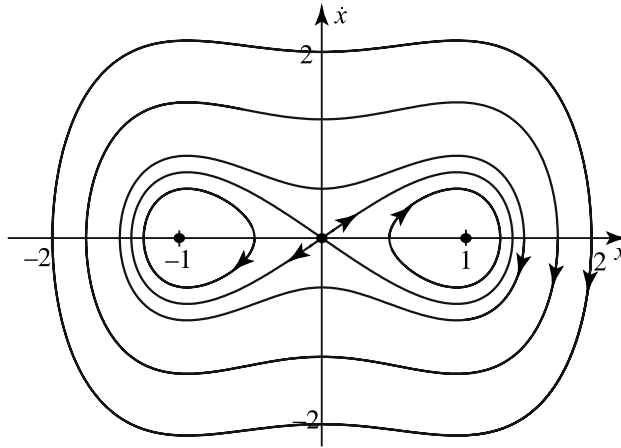


Рис. 1. График решений уравнения $\ddot{x} - x + x^3 = 0$.

График решений уравнения (6) при $f = 0$ в плоскости (x, \dot{x}) изображен на рис. 1. Как видно из рисунка, для решения с начальными данными $x(0) = C$, $\dot{x}(0) = 0$, где $(C, 0)$ не является состоянием равновесия системы (6), можно выбрать такое ρ , что начиная с некоторого момента времени $T_4 < T_3$ будем иметь $|\dot{x}(t)| > \rho$ для любого $t > T_4$, что противоречит утверждению $\dot{x}(t) = \vartheta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Значит, C — одно из состояний равновесия и либо $x = 0$, либо $x = -1$, либо $x = 1$.

Таким образом, предполагая ограниченность произвольного решения $(x(t), \vartheta(t), u(t))$ системы (2) при $t \rightarrow +\infty$, мы получили, что оно попадает в сколь угодно малую окрестность одного из состояний равновесия S_0, S_1, S_2 и существует момент времени $T > 0$ такой, что при $t \geq T$ это решение принадлежит достаточно малой окрестности одного из состояний равновесия.

При любом λ состояние равновесия S_0 является седлом, так как матрица Якоби (4) в точке S_0 имеет следующие собственные числа:

$$-\alpha < 0, \quad \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} > 0, \quad \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} < 0.$$

Воспользуемся критерием Рауса—Гурвица и покажем, что при $\lambda < 0$, $\beta > 0$ состояния равновесия $S_{1,2}$ являются неустойчивыми. Коэффициенты характеристического многочлена $p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$ матрицы Якоби в состояниях равновесия

$S_{1,2}$ имеют вид

$$a_1 = \alpha + \lambda, \quad a_2 = \alpha\lambda - \beta + 2, \quad a_3 = 2\alpha.$$

Согласно критерию Рауса—Гурвица, состояния равновесия $S_{1,2}$ устойчивы тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ и $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Покажем, что $a_1 a_2 - a_3 < 0$ при $\sigma + d < 0$, $2\sigma > b$. Запишем правую часть неравенства в терминах σ , r , b и d :

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= \frac{\sigma + d + b}{\sqrt{\sigma(r-d)}} \frac{b(r+\sigma)}{\sigma(r-d)} - \frac{2b}{\sqrt{\sigma(r-d)}} = \frac{b(br + rd - \sigma r + b\sigma + \sigma^2 + 3\sigma d)}{(\sigma(r-d))^{3/2}} = \\ &= \frac{b(r(b+d-\sigma) + b\sigma + bd - bd + 2\sigma d + \sigma^2 + \sigma d)}{(\sigma(r-d))^{3/2}} = \\ &= \frac{b(r(b+d-\sigma) + (\sigma+b)(\sigma+d) + d(2\sigma-b))}{(\sigma(r-d))^{3/2}} < 0. \end{aligned}$$

Так как r , σ , b положительные, имеем $r > d$, а из предположения, что $\sigma + d < 0$, $2\sigma > b$ следует $d < -\sigma < 0$ и

$$\left. \begin{array}{l} \sigma + d < 0 \Leftrightarrow 2\sigma + d < \sigma, \\ 2\sigma > b \quad \Leftrightarrow 2\sigma + d > b + d \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma > b + d.$$

Таким образом, все состояния равновесия S_0 , S_1 , S_2 системы (2) являются неустойчивыми. В случае если при некоторых параметрах состояния равновесия $S_{1,2}$, также как и S_0 , являются седлами, то в окрестности этих состояний равновесия к ним могут притягиваться только траектории, лежащие на соответствующих устойчивых многообразиях размерности 1 или 2. Получаем противоречие с исходным предположением об ограниченности произвольного решения системы (2). Отметим, что лебегова n -мерная мера множества точек, которые стремятся к состояниям равновесия S_0 , S_1 , S_2 равна 0. Так как из (7) следует, что $V(x(t), \vartheta(t), u(t)) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, почти любое решение системы (2) (и системы (1)) стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть выполнены условия второй части теоремы: $2\sigma < b$, $\sigma + d > 0$. Тогда имеем $\lambda > 0$, $\beta < 0$. Воспользуемся здесь принципом инвариантности Ла-Салля.

Принцип Ла-Салля [41]. Пусть Ω — компактное множество, обладающее следующим свойством: любое решение системы (2) с началом в Ω остается для всех будущих моментов времени в Ω . Пусть существует скалярная, непрерывно-дифференцируемая в Ω функция $V(x)$, такая что $\dot{V}(x) \leq 0$ в Ω . Пусть $E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$ и M — наибольшее инвариантное множество из E . Тогда любое решение, начинающееся в Ω , стремится к M при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим, что в доказательстве этого принципа компактность множества Ω используется для того, чтобы показать ограниченность снизу функции $V(x)$ на Ω . В нашем случае можно показать, что выполняется неравенство

$$V(x, \vartheta, u) = \vartheta^2 + \frac{u^2}{(-\beta)} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

для любых $(x, \vartheta, u) \in \mathbb{R}^3$. Поэтому в качестве множества Ω можно рассматривать \mathbb{R}^3 . Так как $\dot{V} \leq 0$ на всем \mathbb{R}^3 , то V — невозрастающая функция, и $V(x(t), \vartheta(t), u(t))$ сходится к некоторому C при $t \rightarrow +\infty$. Так как V — непрерывная функция, то

$V(x, \vartheta, u) = C$ на ω -предельном множестве L^+ любого решения $(x(t), \vartheta(t), u(t))$ системы (2). Поскольку множество L^+ инвариантное, на нем выполнено $\dot{V}(x, \vartheta, u) = 0$. Значит, $L^+ \subset M$ и все решения системы (2) стремятся к M при $t \rightarrow +\infty$.

Из равенства

$$\dot{V}(x, \vartheta, u) = 2 \left(-\lambda \vartheta^2 + \frac{\alpha}{\beta} u^2 \right) = 0$$

следует $\vartheta = 0, u = 0$. Тогда из (2) следует $x = 0, \pm 1$. Таким образом, множество M состоит из состояний равновесия S_0, S_1, S_2 системы (2) и любое решение системы (2) (и системы (1)) стремится при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому состоянию равновесия. \square

Дополним этот аналитический результат следующим компьютерным экспериментом, рассмотрев параметры системы (1), для которых $\epsilon := \sigma + d > 0, \epsilon \in (0, 1]$ и $b < 2\sigma$. Для рассматриваемых параметров исследуем зависимость поведения траекторий в фазовом пространстве системы (1) при фиксированном ϵ и изменяемом b . В плоскости (ϵ, b) численно построим границу, отделяющую область, для которой траектории системы стремятся к некоторым устойчивым инвариантным множествам (стационарным точкам, предельным циклам, хаотическим аттракторам), от области, для которой почти все траектории уходят на бесконечность.

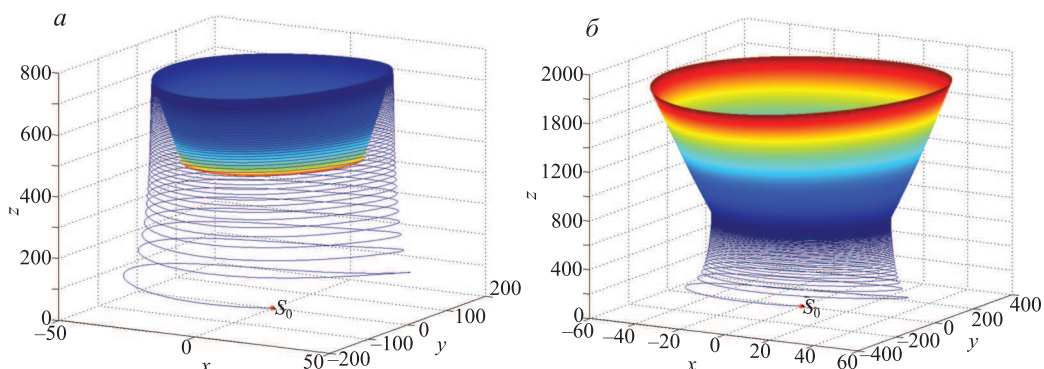


Рис. 2. Поведение траекторий системы (1) на интервале времени $[0, 400]$ при фиксированных $r = -\sigma - d = -\epsilon, \sigma = 36, \epsilon = 0.2$ и различных b : $b = 0.75$ — стремление траектории системы (1) к предельному циклу (а); $b = 0.8$ — раскрутка траектории системы (1) на бесконечность (б).

Для численного интегрирования системы (1) используем стандартную процедуру ode45 математического пакета MATLAB 7.12.0.635 (R2011a). Параметры процедуры, задающие погрешность, таковы: $RelTol = 10^{-8}, AbsTol = 10^{-8}$.

Численная процедура выглядит следующим образом: на полуинтервале $(0, 1]$ выберем разбиение с шагом 0.1 и для каждого фиксированного значения параметра $\epsilon \in (0, 1]$ будем изменять значение параметра b , начиная с 0, с шагом 0.1. Для отслеживания качественного изменения поведения траекторий будем визуализировать траектории средствами пакета MATLAB, сопоставив отрезку времени интегрирования шкалу цветов (например, от синего цвета до красного) и покрасив соответствующую траекторию согласно этой шкале (см. рис. 2). Если в рамках эксперимента внешние края задаваемого проинтегрированной траекторией геометрического объекта будут красными, можно диагностировать, что траектория раскручивается. В качестве тестовых траекторий будем рассматривать две траектории: первая — с начальными

данными, выбранными в окрестности седла S_0 системы (1) на неустойчивом одномерном многообразии (чтобы исследовать поведение траекторий вблизи состояний равновесия), и вторая — с начальными данными, выбранными достаточно далеко от стационарных точек (чтобы исследовать поведение траекторий «на бесконечности»). В качестве таких начальных данных мы рассматривали точки вида $x_0 = y_0 = R$, $z_0 = bR^2$, где $R = 1000$.

Определив при фиксированном ϵ некоторое значение параметра b^* , при котором поведение траекторий качественно меняется, далее мы рассматривали окрестность $[b^* - \delta, b^* + \delta]$, где $\delta < 0.1$ с меньшим разбиением и исследовали ее описанным образом. Повторяя эту процедуру несколько раз, мы таким образом уточняли граничное значение b . В нашем эксперименте итоговый минимальный шаг разбиения по b был равен 0.05.

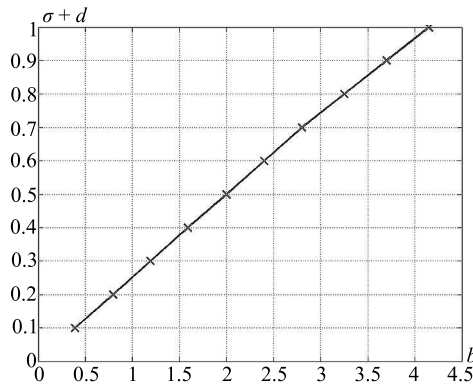


Рис. 3. Граница $\sigma + d = \frac{1}{K}b$, $K \approx 4$, разделяющая области с различным поведением траекторий системы (1).

В результате описанного численного эксперимента оказалось, что для системы (1) при фиксированном значении параметра $\sigma = 36$ и при $r = -\sigma - d = -\epsilon$ в плоскости параметров (ϵ, b) искомая граница, разделяющая параметры на два множества, соответствующие разному поведению траекторий, приблизительно задается линейным уравнением $\epsilon = \sigma + d = \frac{1}{K}b$, где $K \approx 4$ (рис. 3).

3. Структуры компьютерных ошибок (computer error structures). Из доказанной выше теоремы вытекает следующий интересный факт. В пространстве параметров системы (1) с помощью теоремы обнаружена граница, разделяющая две области с различным поведением траекторий: $2\sigma = b$, $\sigma + d = 0$. Следовало ожидать, что в малой окрестности этой границы компьютерные эксперименты будут давать результаты, противоречащие утверждениям теоремы 1. Однако действительность превзошла все наши ожидания! Опишем здесь эти эксперименты.

В рамках первого компьютерного эксперимента выберем начальную точку в окрестности седла S_0 системы (1) на неустойчивом одномерном многообразии и численно проинтегрируем соответствующую сепаратрису. Для значений параметров $r = 0$, $\sigma = 35$, $d = -35$, $b = 2\sigma = 70$, лежащих на границе, разделяющей две области с различным поведением траекторий, рассматриваемая сепаратриса задает гомоклиническую траекторию. Для значений параметров $r = 0$, $\sigma = 35$, $d = -35 - \epsilon$, $b = 70 - \epsilon$, лежащих вблизи границы, численный эксперимент может быть интерпре-

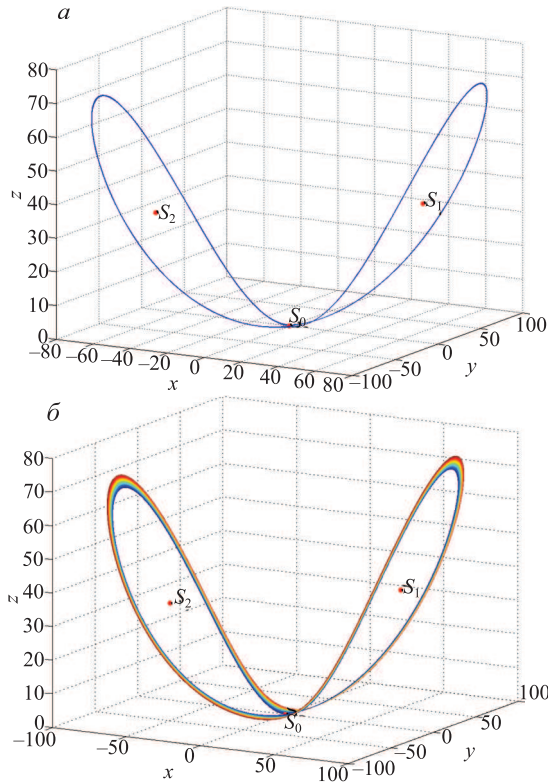


Рис. 4. Эксперимент 1: система (1) при $r = 0$, $\sigma = 35$, $d = -35 - \varepsilon$, $b = 70 - \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-4}$: «предельный цикл», $t \in [0, 200]$ (а); раскрутка сепаратрисы, $t \in [0, 2000]$ (б).

тирован следующим образом: сепаратриса, выпущенная из седла S_0 , притягивается к предельному циклу. Здесь ε — малое положительное число. Для $\varepsilon = 10^{-4}$, интегрируя сепаратрису с начальными условиями $x_0 = 0.00447$, $y_0 = 0.00894$, $z_0 = 0$ (эти условия с большой точностью принадлежат неустойчивому многообразию седла) на интервале времени $[0, 200]$, получаем стремление этой сепаратрисы к предельному циклу, который изображен на рис. 4, а. Период цикла примерно равен 0.4788, а невязка между начальной и конечной точками цикла примерно равна 0.0018. В рамках этого эксперимента мы ожидали, что повышение точности численного интегрирования (и соответствующее уменьшение адаптивного шага в процедуре ode45) приведет к исчезновению цикла и стремлению почти всех траекторий к бесконечности. Численная проверка для значений $RelTol = AbsTol = \{10^{-10}, 10^{-12}\}$ показала, что этого не происходит.

Как видно, результат численного эксперимента, интерпретированный таким образом, противоречит теореме 1. Проведем дополнительную проверку данного результата. Для этого, во-первых, визуализируем сепаратрису, полученную с помощью численного интегрирования системы (1), не одним цветом, а сопоставим отрезку времени интегрирования шкалу цветов (например, от синего цвета до красного) и покрасим сепаратрису согласно этой шкале. Во-вторых, для численной проверки поведения сепаратрисы проинтегрируем ее на большем интервале времени. Результаты этого экс-

перимента для интервала времени, увеличенного в 10 раз, изображены на рис. 4, б. Как видно, для выбранных параметров в фазовом пространстве системы (1) на самом деле происходит медленная раскрутка сепаратрисы. Однако в экспериментах с недостаточно большими интервалами времени, проводящимися в отрыве от аналитических результатов теоремы 1, этот эффект не диагностируется и создается впечатление, что в фазовом пространстве существует периодическая траектория.

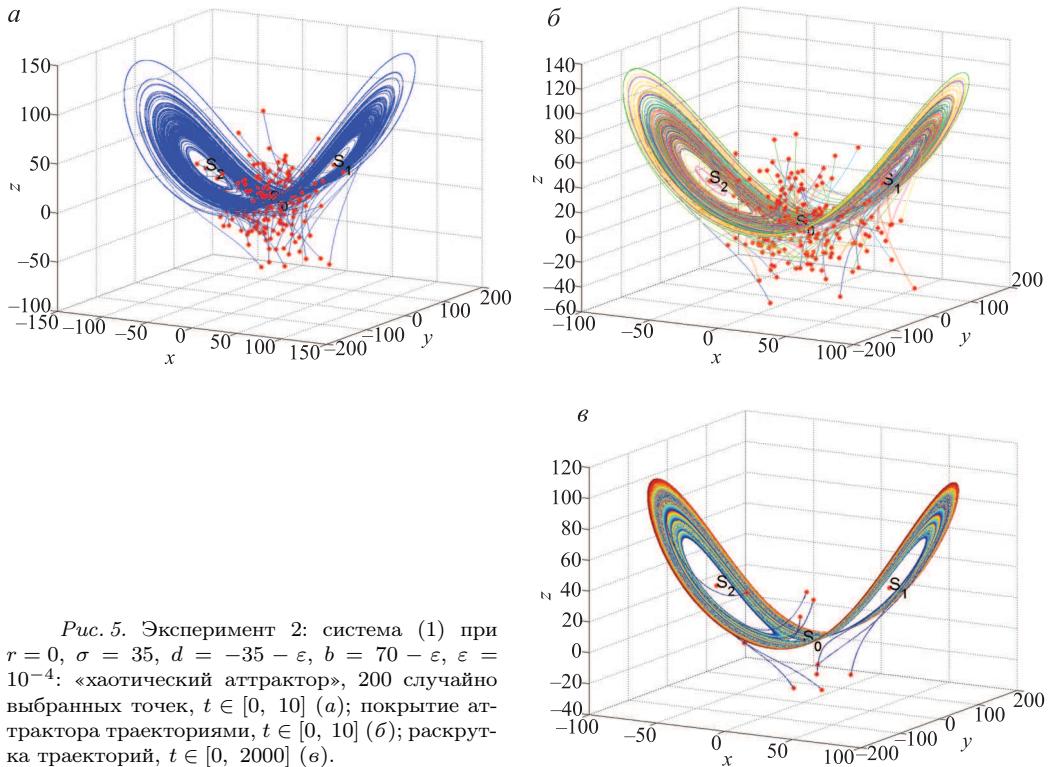


Рис. 5. Эксперимент 2: система (1) при $r = 0$, $\sigma = 35$, $d = -35 - \varepsilon$, $b = 70 - \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-4}$: «хаотический аттрактор», 200 случайно выбранных точек, $t \in [0, 10]$ (а); покрытие аттрактора траекториями, $t \in [0, 10]$ (б); раскрутка траекторий, $t \in [0, 2000]$ (в).

Опишем теперь компьютерный эксперимент, который дает «хаотический аттрактор». В фазовом пространстве системы (1) с параметрами $r = 0$, $\sigma = 35$, $d = -35 - \varepsilon$, $b = 70 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$, выберем случайным образом 200 начальных точек в широкой области ($25 * \text{randn}(3,1)$) и для каждой точки численно проинтегрируем траекторию на интервале времени $[0, 10]$. Параметры процедуры интегрирования выберем такими же, как и в прошлом эксперименте. В результате получим следующую картину: ни одна из траекторий не уходит на бесконечность (как следует из теоремы 1), а все они стремятся к некоторому аттрактору, напоминающему аттрактор Лоренца [1]. Так же как и в предыдущем эксперименте, результат сходимости траекторий весьма устойчив и не меняется при увеличении точности численной процедуры.

Для проверки этого результата опять воспользуемся покраской траекторий. Если полученный в эксперименте аттрактор действительно существует и является хаотическим, то раскрашенные разным цветом траектории после притяжения на аттрактор перемешаются и аттрактор будет иметь смешанный цвет. В противном случае тра-

ектории будут ложиться на аттрактор слоями, а сам аттрактор будет полосатым. В результате эксперимента мы получаем именно второй случай, означающий, что аттрактор не хаотический. Кроме того, если каждую траекторию проинтегрировать на большем интервале времени и покрасить согласно цветовой шкале, аналогичной предыдущему эксперименту, опять можно показать, что все траектории медленно раскручиваются. Значит, полученное в фазовом пространстве траекторное множество не является аттрактором.

4. Заключение. В данной статье для систем лоренцевского типа со сжатием объемов получены аналитические критерии глобальной устойчивости и неустойчивости их стационарных множеств.

Здесь описаны и проанализированы компьютерные эксперименты для исследования качественного поведения траекторий систем лоренцевского типа, интерпретация которых без дополнительной проверки, ориентированной на аналитические результаты, может приводить к неверным заключениям. Это обстоятельство проблематизирует использование только компьютерного моделирования в отрыве от аналитических подходов.

Литература

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20, N 2. P. 130–141.
2. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Communications in mathematical physics. 1971. Vol. 20, N 3. P. 167–192.
3. Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. In Ser. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1982.
4. Broer H. W., Dumortier F., Van Strien S. J. et al. Structures in dynamics: finite dimensional deterministic studies. Elsevier. 1991. Vol. 2.
5. Sprott J. C. Strange attractors: creating patterns in chaos. Citeseer. 1993.
6. Neimark J. I., Landa P. S. Stochastic and chaotic oscillations. Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 77.
7. Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press, 2012.
8. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V. et al. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 1. World Scientific, 1998.
9. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V. et al. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 2. World Scientific, 2001.
10. Boichenko V. A., Leonov G. A., Reitmann V. Dimension Theory for Ordinary Differential Equations. Stuttgart: Teubner, 2005.
11. Leonov G. A. Strange attractors and classical stability theory. St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 2008.
12. Elhadj Z., Sprott J. C. 2-D quadratic maps and 3-D ODE systems: A Rigorous Approach. World Scientific, 2010. Vol. 73.
13. Wiggins S. Global bifurcations and chaos: analytical methods. Springer Science & Business Media, 2013. Vol. 73.
14. Shimada I., Nagashima T. A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems // Progress of Theoretical Physics. 1979. Vol. 61, N 6. P. 1605–1616.
15. Doedel E. AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations. California Institute of Technology, 1986.
16. Parker T. S., Chua L. O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer-Verlag, 1989.
17. Allgower E. L., Georg K. Numerical continuation methods: an introduction. New York: Springer-Verlag, 1990.
18. Dellnitz M., Junge O. Set oriented numerical methods for dynamical systems. In Ser. Handbook of Dynamical Systems. Elsevier Science, 2002. Vol. 2. P. 221–264.
19. Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems / Eds B. Krauskopf, H. M. Osinga, J. Galan-Vioque. Dordrecht. The Netherlands: Springer, 2007.

20. *Ou Yang S., Wu Y., Lin Y. et al.* The discontinuity problem and “chaos” of Lorenz’s model // *Kybernetes*. 1998. Vol. 27, N 6/7. P. 621–635.
21. *Ou Yang S., Lin Y.* Problems with Lorenz’s Modeling and the Algorithm of Chaos Doctrine // *Frontiers In The Study Of Chaotic Dynamical Systems With Open Problems*. World Scientific, 2011. Vol. 16. P. 1–29.
22. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999. Vol. 328, N 12. P. 1197–1202.
23. *Viana M.* What’s new on Lorenz strange attractors? // *The Mathematical Intelligencer*. 2000. Vol. 22, N 3. P. 6–19.
24. *Stewart I.* Mathematics: The Lorenz attractor exists // *Nature*. 2000. Vol. 406, N 6799. P. 948–949.
25. *Leonov G. A.* Shilnikov chaos in Lorenz-like systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2013. Vol. 23, N 03. art. num. 1350058.
26. *Leonov G. A.* Asymptotic integration method for the Lorenz-like system // *Doklady Mathematics*. 2015. Vol. 462, N 5. P. 1–7.
27. *Chen G., Ueta T.* Yet another chaotic attractor // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9, N 7. P. 1465–1466.
28. *Lu J., Chen G.* A new chaotic attractor coined // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12. P. 1789–1812.
29. *Tigan G., Opriş D.* Analysis of a 3D chaotic system // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. Vol. 36, N 5. P. 1315–1319.
30. *Barboza R., Chen G.* On the global boundedness of the Chen system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21, N 11. P. 3373–3385.
31. *Zhang F., Liao X., Zhang G.* On the global boundedness of the Lü system // *Applied Mathematics and Computation*. 2016. Vol. 284. P. 332–339.
32. *Zhang F., Mu C., Li X.* On the boundness of some solutions of the Lü system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012. Vol. 22, N 01. P. 1250015.
33. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems // *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 256. P. 334–343.
34. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. Singapore: World Scientific, 2004.
35. *Leonov G. A., Shumafov M. M.* Stabilization of Linear Systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2012.
36. *Zubov N. E., Vorob’eva E. A., Mikrin E. A. et al.* Synthesis of stabilizing spacecraft control based on generalized Ackermann’s formula // *Journ. of Computer and Systems Sciences International*. 2011. Vol. 50. P. 93–103.
37. *Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh. et al.* Synthesis of controls for a spacecraft that optimize the pole placement of the close-loop control system // *Journ. of Computer and Systems Sciences International*. 2012. Vol. 51. P. 431–444.
38. *Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh. et al.* The use of the exact pole placement algorithm for the control of spacecraft motion // *Journ. of Computer and Systems Sciences International*. 2013. Vol. 52. P. 129–144.
39. *Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh. et al.* Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion // *Journ. of Computer and Systems Sciences International*. 2013. Vol. 52. P. 279–292.
40. *Popov V. M.* Hyperstability of control systems. Springer Verlag, 1973.
41. *LaSalle J. P.* Some extensions of Liapunov’s second method // *IRE Transactions on circuit theory*. 1960. Vol. 7, N 4. P. 520–527.

Статья поступила в редакцию 14 июня 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Леонов Геннадий Алексеевич — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой; leonov@math.spbu.ru

Андриевский Борис Ростиславич — ведущий научный сотрудник, профессор; boris.andrievsky@gmail.com

Мокаев Руслан Назирович — аспирант, младший научный сотрудник; mokaev.ruslan@gmail.com

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF LORENZ-LIKE SYSTEMS. ANALYTICAL RESULTS AND COMPUTER ERROR STRUCTURES

Gennadiy A. Leonov^{1,2}, Boris R. Andrievskiy^{1,2,3}, Ruslan N. Mokaev^{1,2}

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; leonov@math.spbu.ru, mokaev.ruslan@gmail.com

² Institute of Problems of Mechanical Engineering, V. O., Bolshoy pr., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; leonov@math.spbu.ru, mokaev.ruslan@gmail.com, boris.andrievsky@gmail.com

³ St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Kronverkskiy pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation; boris.andrievsky@gmail.com

For the Lorenz-like systems with volume contraction an analytical criteria for global stability and instability of stationary sets were obtained.

Numerical experiments for the study of qualitative behavior of Lorenz-like systems trajectories were described and analyzed. It is shown that their interpretation without further verification, oriented on the analytical results, can lead to incorrect conclusions. Refs 41. Figs 5.

Keywords: computer error structures, stability, Lorenz-like system, dissipativeness, Lyapunov function, Chen system, Lu system.

References

1. Lorenz E. N., “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmos. Sci.* **20**(2), 130–141 (1963).
2. Ruelle D., Takens F., “On the nature of turbulence”, *Communications in mathematical physics* **20**(3), 167–192(1971).
3. Sparrow C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* In Ser. *Applied Mathematical Sciences* (Springer, New York, 1982).
4. Broer H. W., Dumortier F., Van Strien S. J. et al., *Structures in dynamics: finite dimensional deterministic studies* (Elsevier, 1991, **2**).
5. Sprott J. C., *Strange attractors: creating patterns in chaos* (Citeseer, 1993).
6. Neimark J. I., Landa P. S., *Stochastic and chaotic oscillations* (Springer Science & Business Media, 2012, **77**).
7. Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L., *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* (Academic press, 2012).
8. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V. et al., *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 1* (World Scientific, 1998).
9. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V. et al., *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 2* (World Scientific, 2001).
10. Boichenko V. A., Leonov G. A., Reitmann V., *Dimension Theory for Ordinary Differential Equations* (Stuttgart, Teubner, 2005).
11. Leonov G. A., *Strange attractors and classical stability theory* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2008).
12. Elhadj Z., Sprott J. C., *2-D quadratic maps and 3-D ODE systems: A Rigorous Approach* (World Scientific, 2010, **73**).
13. Wiggins S., *Global bifurcations and chaos: analytical methods* (Springer Science & Business Media, 2013, **73**).
14. Shimada I., Nagashima T., “A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems”, *Progress of Theoretical Physics* **61**(6), 1605–1616 (1979).
15. Doedel E., *AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations* (California Institute of Technology, 1986).
16. Parker T. S., Chua L. O., *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer-Verlag, 1989).
17. Allgower E. L., Georg K., *Numerical continuation methods: an introduction* (Springer-Verlag, New York, 1990).
18. Dellnitz M., Junge O., *Set oriented numerical methods for dynamical systems* In Ser. *Handbook of Dynamical Systems*, 221–264 (Elsevier Science, 2002, **2**).
19. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems* (Eds B. Krauskopf, H. M. Osinga, J. Galan-Vioque, Dordrecht, The Netherlands, Springer, 2007).
20. Ou Yang S., Wu Y., Lin Y. et al., “The discontinuity problem and “chaos” of Lorenz’s model”, *Kybernetes* **27**(6–7), 621–635 (1998).
21. Ou Yang S., Lin Yi., “Problems with Lorenz’s Modeling and the Algorithm of Chaos Doctrine”, *Frontiers In The Study Of Chaotic Dynamical Systems With Open Problems. World Scientific* **16**, 1–29 (2011).

22. Tucker W., “The Lorenz attractor exists”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics* **328**(12), 1197–1202 (1999).
23. Viana M., “What’s new on Lorenz strange attractors?”, *The Mathematical Intelligencer* **22**(3), 6–19 (2000).
24. Stewart I., “Mathematics: The Lorenz attractor exists”, *Nature* **406**(6799), 948–949 (2000).
25. Leonov G. A., “Shilnikov chaos in Lorenz – like systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **23**(03), art. num. 1350058 (2013).
26. Leonov G. A., “Asymptotic integration method for the Lorenz – like system” **462**(5), 1–7 (2015).
27. Chen G., Ueta T., “Yet another chaotic attractor”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**(7), 1465–1466 (1999).
28. Lu J., Chen G., “A new chaotic attractor coined”, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12**, 1789–1812 (2002).
29. Tigan G., Opreș D., “Analysis of a 3D chaotic system”, *Chaos, Solitons & Fractals* **36**(5), 1315–1319 (2008).
30. Barboza R., Chen G., “On the global boundedness of the Chen system”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **21**(11), 3373–3385 (2011).
31. Zhang F., Liao X., Zhang G., “On the global boundedness of the Lüsystem”, *Applied Mathematics and Computation* **284**, 332–339 (2016).
32. Zhang F., Mu C., Li X., “On the boundness of some solutions of the Lü system”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **22**(01), 1250015 (2012).
33. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., “On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems”, *Applied Mathematics and Computation* **256**, 334–343 (2015).
34. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh., *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities* (World Scientific, Singapore, 2004).
35. Leonov G. A., Shumafov M. M., *Stabilization of Linear Systems* (Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2012).
36. Zubov N. E., Vorob’eva E. A., Mikrin E. A. et al., “Synthesis of stabilizing spacecraft control based on generalized Ackermann’s formula”, *Journ. of Computer and Systems Sciences International* **50**, 93–103 (2011).
37. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh. et al., “Synthesis of controls for a spacecraft that optimize the pole placement of the close-loop control system”, *Journ. of Computer and Systems Sciences International* **51**, 431–444 (2012).
38. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh. et al., “The use of the exact pole placement algorithm for the control of spacecraft motion”, *Journ. of Computer and Systems Sciences International* **52**, 129–144 (2013).
39. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh. et al., “Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion”, *Journ. of Computer and Systems Sciences International* **52**, 279–292 (2013).
40. Popov V. M., *Hyperstability of control systems* (Springer Verlag, 1973).
41. LaSalle J. P., “Some extensions of Liapunov’s second method”, *IRE Transactions on circuit theory* **7**(4), 520–527 (1960).

Для цитирования: Леонов Г. А., Андриевский Б. Р., Мокаев Р. Н. Асимптотическое поведение решений систем лоренцевского типа. Аналитические результаты и структуры компьютерных ошибок // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 25–37. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.105

For citation: Leonov G. A., Andrievskiy B. R., Mokaev R. N. Asymptotic behavior of solutions of Lorenz-like systems. Analytical results and computer error structures. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 25–37. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.105