УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1
MSC 60J35

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА В ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА НЕКОТОРЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Р. Н. Мирошин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается семейство одномерных марковских процессов с непрерывным временем, для которых ранее автором получены вероятности перехода непосредственным решением уравнения Колмогорова—Чепмена. Эти вероятности имеют вид однократных интегралов. Используя процедуру получения интегродифференциальных уравнений для марковских процессов с разрывными траекториями, автор в статье получает аналоги первого и второго уравнений Колмогорова для рассматриваемого семейства процессов. Найденные уравнения оказываются уравнениями в дробных производных. Результаты основаны на асимптотическом анализе вероятности перехода при сближении времени начала перехода и времени его конца. Из этого анализа, в частности, следует, что траектории данного марковского процесса разделяются на два класса в зависимости от интервала, где они начинались. Одни траектории на малом интервале времени исчезают с определенной вероятностью, а другие — зарождаются также с определенной вероятностью. Библиогр. 8 назв.

Ключевые слова: марковский процесс с непрерывным временем, вероятность перехода, уравнения Колмогорова, дробные производные.

Уравнения в дробных производных неоднократно встречаются в естественных науках — физике, радиотехнике, теории упругости, агрономии и пр. (см., например, [1–4]). В данной статье показано на примере одного из решений интегрального уравнения Колмогорова—Чепмена, полученного автором [5], что и в теории марковских процессов первое и второе уравнения Колмогорова для вероятности перехода [6] также могут иметь форму уравнений в дробных производных.

Вероятностные характеристики одномерного вещественного марковского процесса ξ_t с непрерывным временем t полностью определяются [6] своей *начальной* (в момент s, $s < t$) *функцией распределения*

$$F_s(x) = P\{\xi_s < x\}$$

и *вероятностью перехода*

$$F(s, x; t, y) = P\{\xi_t < y | \xi_s = x\}, \tag{1}$$

т. е. вероятностью того, что в момент t случайная величина ξ_t примет значение, меньшее y, при условии, что $\xi_s = x$. Вероятность перехода (1) удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению Колмогорова—Чепмена (обобщенному уравнению Маркова в терминологии Б. В. Гнеденко [6, с. 299])

$$F(s, x; t, y) = \int_\Omega F(\tau, z; t, y) d_z F(s, x; \tau, z), \quad s \le \tau \le t, \quad x, y, z \in \Omega. \tag{2}$$

Если существует *плотность вероятности перехода*

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{\partial}{\partial y} F(s, x; t, y), \tag{3}$$

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.106

она является решением уравнения

$$\pi_{s\to t}(x\to y)=\int_\Omega \pi_{s\to\tau}(x\to z)\pi_{\tau\to t}(z\to y)dz,\quad s\le\tau\le t,$$

следующего из (2).

Одно из решений этого уравнения получено в [5, пример 1, $\Omega=[0,\infty)$]:

$$\pi_{s\to t}(x\to y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(s)}\cos\lambda y\cos\lambda x\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\left[g(x+y)+g(y-x)\right],\tag{4}$$

где $\Psi_\lambda(t)$ — непрерывная вещественная невозрастающая функция от t, не обращающаяся в нуль при $0\le t<\infty$, а

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(s)}\cos\lambda x d\lambda,\quad x>0,\tag{5}$$

— косинус-преобразование Фурье от $\Psi_\lambda(t)/\Psi_\lambda(s)$.

Далее рассматривается решение (4), для которого справедливо равенство

$$\frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(s)}=\exp\{-H_{s,t}\lambda^\nu\},\quad H_{s,t}=\alpha(t)-\alpha(s),\tag{6}$$

причем $\alpha(t)$ — непрерывная функция, $0<\nu<1$.

Согласно (3), имеем

$$F(s,x;t,y)=\int_0^y \pi_{s\to t}(x\to z)\,dz,\tag{7}$$

откуда, в силу (4) и (6), получаем

$$F(s,x;t,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y dz\int_0^\infty \exp\{-H_{s,t}\lambda^\nu\}[\cos\lambda(x+z)+\cos\lambda(z-x)]\,d\lambda.\tag{8}$$

Переставляя в (8) интегралы местами и вычисляя интеграл по z, будем иметь

$$F(s,x;t,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\exp\{-H_{s,t}\lambda^\nu\}[\sin\lambda(x+y)+\sin\lambda(y-x)].\tag{9}$$

Если $x\ne y$, то с помощью очевидной замены переменных интеграл (9) приводится к сумме тригонометрических интегралов:

$$F(s,x;t,y)=J(k_1)+J(k_2)\eta(y-x)-J(k_3)\eta(x-y),\tag{10}$$

где

$$J(k_i)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\exp\{-k_iu^\nu\}du\,,\quad i=1,2,3,\tag{11}$$

$$k_1=\frac{H_{s,t}}{(x+y)^\nu}\,,\quad k_2=\frac{H_{s,t}}{(y-x)^\nu}\,,\quad k_3=\frac{H_{s,t}}{(x-y)^\nu}\,,\tag{12}$$

$\eta(x)$ — функция Хэвисайда, т. е. $\eta(x)=1$ при $x>0$ и $\eta(x)=0$ при $x\le 0$. Когда $x=y$, в (10) имеем $J(k_2)=J(k_3)=0$.

Проверим, что $F(s,x;t,y)$ — функция распределения, т. е. выполняются соотношения

$$F(s,x;t,0)=0,\quad F(s,x;t,y)\geq 0,\quad F(s,x;t,y)\to 1\quad \text{при}\quad y\to\infty. \tag{13}$$

Данная проверка необходима, так как среди решений уравнения Колмогорова—Чепмена есть такие, которые не имеют вероятностного смысла [5].

Первое равенство в (13) следует из (9). Чтобы доказать второе, покажем, что преобразование Фурье (5) неотрицательно, и тогда $\pi_{s\to t}(x\to z)\geq 0$ и, в силу (7), $F(s,x;t,y)\geq 0$. Действительно, согласно (6), функция

$$\varphi(\lambda)=\exp\{-H\lambda^{\nu}\},\quad H\equiv H_{s,t},$$

непрерывна, для $0\leq\nu\leq 1$ выпукла в $[0,\infty)$ и $\varphi(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$, а потому является характеристической функцией по теореме Пойа, что влечет по теореме Бохнера неотрицательность ее косинус-преобразования Фурье (5).

Так как $k_1\to 0$, $k_2\to 0$ в (12) и $\eta(y-x)\to 1$, $\eta(x-y)\to 0$ в (10) для фиксированного $H_{s,t}$ при $y\to 0$, то предельный переход $k_i\to 0$ под знаком интеграла в (11) приводит к соотношениям

$$J(k_1)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{1}{2},\quad J(k_2)\to\frac{1}{2},\quad k_i\to 0,\quad i=1,2,$$

т. е. в силу (10) получаем

$$F(s,x;t,y)\to 1\quad\text{при}\quad y\to\infty.$$

Таким образом, утверждения (13) справедливы, и $F(s,x;t,y)$ является функцией распределения (по y).

Отметим, что предельный переход под знаком интеграла в (11) допустим, поскольку интеграл (11) равномерно сходится при $0\leq k<\infty$, что следует из неравенства [7, с. 18, 26]

$$\Big|\int_A^{\infty}\exp\{-ku^{\nu}\}\frac{\sin u}{u}du\Big|\leq 2\frac{\exp\{-kA^{\nu}\}}{A}\leq\frac{2}{A}\to 0\quad\text{при}\quad A\to\infty,$$

а подынтегральная функция непрерывна по $k\geq 0$ и по $u\in[0,\infty)$.

Определение 1. В равенстве

$$f(t)-f(a)=\int_a^t\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}\,d\tau,\quad 0<\beta<1,$$

функция $v(\tau)$ называется *дробной производной от $f(t)$ степени β в смысле Г. Харди и Д. Е. Литтлвуда* [2] и обозначается

$$v(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\,\mathcal{D}^{\beta}_{[a,x]}[f(x)-f(a)]. \tag{14}$$

Согласно [2], при $h\to 0$ справедливо соотношение

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h^{\beta}}\sim\frac{v(t)}{\beta}\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\,f_a^{(\beta)}(t), \tag{15}$$

т. е.

$$f(t+h) = f(t) + \frac{h^\beta}{\Gamma(1+\beta)} f_a^{(\beta)}(t)(1+o(1)). \tag{16}$$

При $\beta = 1$ дробная производная $f_a^{(\beta)}(t)$ совпадает с обычной $df(t)/dt$, а правая часть (16) представляет собой сумму двух первых членов разложения $f(t+h)$ в ряд Тейлора. Определяя *дробную производную в смысле Гёльдера* [2] равенством

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h^\beta} = \frac{\partial^\beta f(t)}{\partial t^\beta}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{17}$$

видим, что она совпадает с правой частью (15), но, в отличие от (17), нелокальная (зависит от $f(a)$) дробная производная (14) допускает восстановление $f(t)$ как по обычной производной.

Предположим, что $\alpha(t+h)$ в (6) при $h \to 0$ представима в виде (16), т. е.

$$\alpha(t+h) = \alpha(t) + b_\rho(t)h^\rho(1+o(1)), \tag{18}$$

где

$$b_\rho(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_a^t \frac{\alpha(x)-\alpha(a)}{(t-x)^\rho}\, dx = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \frac{\partial^\rho \alpha_a(t)}{\partial t^\rho}, \quad 0 \le a < s < t.$$

Таким образом, будем иметь

$$H_{t,t+h} \sim b_\rho(t)h^\rho.$$

Лемма 1. *При $k \to 0$ и $0 < \nu < 1$ справедливо асимптотическое равенство*

$$J(k) = \frac{1}{2} - k \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \sin\frac{\nu\pi}{2} + o(k). \tag{19}$$

В самом деле, имеет место тождество

$$J(k) = F - k \cdot G(k), \tag{20}$$

в котором

$$F = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2}, \qquad G(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(y)\lambda^{\nu-1}\sin\lambda d\lambda,$$

$$y = k\lambda^\nu, \qquad f(y) = 1 - \frac{1}{y}(e^{-y} - 1 + y).$$

Интеграл $G(k)$ сходится равномерно относительно $0 \le k < \infty$, поскольку неотрицательная функция $f(y)\lambda^{\nu-1}$ монотонно убывает по λ при $\lambda \to \infty$ (т. е. при $y \to \infty$) и справедливо неравенство [7, с. 18]

$$\left|\int_A^\infty f(y)\lambda^{\nu-1}\sin\lambda\, d\lambda\right| \le 2f(kA^\nu)A^{\nu-1} \le 2A^{\nu-1} \to 0 \quad \text{при} \quad A \to \infty.$$

На любом интервале $[a,b]$ при $k \to 0$ имеем

$$f(k\lambda^\nu)\sin\lambda \to \lambda^{\nu-1}\sin\lambda,$$

причем $f(y) = 1 + o(1)$, $y \to 0$. Поэтому $G(k)$ в (20) оценивается величиной $a(\nu)(1 + o(1))$, где [8, с. 68]

$$a(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\nu-1} \sin\lambda \, d\lambda = \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \sin\frac{\nu\pi}{2}\,.$$

Замечание 1. При $\nu < 1/2$ оценку (19) легко уточнить. Вместо (20) рассмотрим тождество

$$J(k) = F - k \cdot a(\nu) + k^2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\infty p_k(\lambda) \sin\lambda \, d\lambda, \tag{22}$$

где

$$p_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda k^2}(e^{-k\lambda} - 1 + k\lambda^\nu) \le \frac{1}{2}\lambda^{2\nu-1}. \tag{23}$$

Функция $p_k(\lambda)$ неотрицательна, монотонно убывает при $\nu < 1/2$ и равномерно $p_k(\lambda) \to \lambda^{2\nu-1}\sin\lambda$ при $k \to 0$ на любом интервале $[a, b]$.

Кроме того, при $A \to \infty$, $0 \le k < \infty$, $0 < \nu < 1/2$ справедливо неравенство

$$\left| \int_A^\infty p_k(\lambda) \sin\lambda d\lambda \right| \le 2p_k(A) \le A^{2\nu-1} \to 0,$$

т. е. несобственный интеграл по $[0, \infty)$ сходится равномерно при $0 \le k < \infty$. Тем самым, третий интеграл в (22) является непрерывной функцией от λ и, следовательно, при $k \to 0$ имеет место равенство

$$J(k) = \frac{1}{2} - a(\nu) \cdot k + b(\nu) \cdot k^2(1 + o(1)), \tag{24}$$

где [8, с. 68]

$$b(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda^{2\nu-1} \sin\lambda d\lambda = \frac{\Gamma(2\nu)}{2\pi} \sin\nu\pi.$$

В этом рассуждении не очевидно только монотонное убывание $p_k(\lambda)$ как функции λ. Производная этой функции такова:

$$p'_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 k^2}\,\psi_\nu(y), \quad y = k\lambda^\nu, \quad \psi_\nu(y) = \nu y(1 - e^{-y}) - (e^{-y} - 1 + y).$$

Обозначая

$$\nu_0 = \frac{e^{-y} - 1 + y}{y(1 - e^{-y})}\,,$$

при $\nu < \nu_0$ имеем $\psi_\nu(y) < 0$, т. е. $p'_k(\lambda) < 0$. Так как $\nu'_0(y) > 0$ при $y > 0$, то $\nu_0(y)$ возрастает и $\inf \nu_0(y) = 1/2$.

Следовательно, при $\nu < 1/2$ заведомо $p'_k(\lambda) < 0$, т. е. $p_k(\lambda)$ убывает при $\lambda \to \infty$ (в силу (23) $p_k(\lambda) \to 0$).

Таким образом, для $\nu < 1/2$ более точная, чем (19), оценка интеграла $J(k)$ определяется формулой (24).

Лемма 2. *При предположении (18), фиксированных x и z и $h \to 0$ справедливо соотношение*

$$F(t, x; t+h, z) = \left\{1 - h^\rho b_\rho(t) a(\nu) \left[\frac{1}{(z+x)^\nu} + \frac{1}{(z-x)^\nu}\right]\right\} \eta(z-x)(1+o(1)) +$$
$$+ h^\rho b_\rho(t) a(\nu) \left[\frac{1}{(x-z)^\nu} - \frac{1}{(z+x)^\nu}\right] [1 - \eta(z-x)](1+o(1)), \tag{25}$$

в котором

$$a(\nu) = \frac{1}{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\frac{\nu\pi}{2}\,, \quad \eta(z-x) == \begin{cases} 1, & \text{если } x < z; \\ 0, & \text{если } x \geq z. \end{cases}$$

В самом деле, согласно (10) имеем

$$F(t,x;t+h,z) = J(k_1) + J(k_2)\eta(y-x) - J(k_3)\eta(x-y), \tag{26}$$

где ($h \sim 0$)

$$k_1 = \frac{H_{t,t+h}}{(x+y)^\nu}\,, \quad k_2 = \frac{H_{t,t+h}}{(y-x)^\nu}\,, \quad k_3 = \frac{H_{t,t+h}}{(x-y)^\nu}\,,$$
$$H_{t,t+h} = \alpha(t+h) - \alpha(t) \sim b_\rho(t)h^\rho.$$

Так как все $k_i \to 0$ по условиям леммы 2, то по лемме 1 из (26) сразу получается (25).

Правая часть равенства (25) интерпретируется следующим образом. Первый член есть вероятность того, что на малом интервале времени $[t, t+h]$ часть траекторий процесса, начавшихся из точки x, $x < z$, сохраняется от t до $t+h$. Вероятность их аннигиляции равна

$$b_\rho(t)a(\nu)\left[\frac{1}{(z+x)^\nu} + \frac{1}{(z-x)^\nu}\right] h^\rho \eta(z-x)(1+o(1)). \tag{27}$$

К оставшимся траекториям добавляются траектории, начавшиеся из точки $x > z$, вероятность появления которых определяется вторым слагаемым в (25):

$$b_\rho(t)a(\nu)\left[\frac{1}{(x-z)^\nu} - \frac{1}{(z+x)^\nu}\right] h^\rho (1-\eta(z-x))(1+o(1)). \tag{28}$$

Если использовать метафору, отождествляя вероятность $F(t,x;t+h,z)$ с объемом жидкости в дуршлаге, то равенство (25) показывает, сколько жидкости сохранится в дуршлаге глубиной $[0,z]$ к моменту времени $t+h$ с момента t, если объем просочившейся жидкости определяется выражением (27), но снаружи ($x > z$) за это время доливается еще объем (28).

Еще одна метафора. Представим себе, что есть канал с песчаным дном и глубиной z. В начальный момент времени t количество воды равно $\eta(z-x)$. За время h часть текущей воды впитывается в песок (эта часть определяется формулой (27)), но за то же время вода добавляется извне в объеме (28). Спрашивается, сколько воды будет в канале через промежуток времени h после начала течения. Ответ дается формулой (25).

Следуя процедуре, описанной Б. В. Гнеденко для марковских процессов с разрывными траекториями [5, с. 308, 309], подставим (25) в уравнение Колмогорова—Чепмена (2):

$$F(t,x;\tau,y) = \int_0^\infty F(t+h,z;\tau,y)d_zF(t+h,x;\tau,z), \quad t \leq t+h \leq \tau. \tag{29}$$

Используя свойства δ-функции, после несложных выкладок находим из (29) соотношение

$$F(t,x;\tau,y) = F(t+h,x;\tau,y) -$$
$$- h^{\rho}(t)a(\nu)b_{\rho}(t)\Big\{-\nu\int_0^{\infty}\frac{F(t+h,z;\tau,y)}{(z+x)^{\nu+1}}\,dz + \int_0^{\infty}F(t+h,z;\tau,y)\frac{d}{dz}\,G_x(z)\,dz\Big\}, \quad (30)$$

где

$$G_x(z) = \begin{cases}(z-x)^{-\nu}, & \text{если } z > x,\\ -(x-z)^{-\nu}, & \text{если } z < x.\end{cases}$$

Запишем второй интеграл в (30) в виде суммы трех интегралов: по интервалу $[0, x-\varepsilon)$, по интервалу $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ и по $(x+\varepsilon,\infty)$. Выберем $\varepsilon = \varepsilon(h)$ так, чтобы $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$. При этом интегралы по $[0, x-\varepsilon)$ и $(x+\varepsilon,\infty)$ стремятся к интегралам по $[0, x)$ и (x,∞) соответственно. Оценим интеграл по интервалу $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

Лемма 3. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место оценка*

$$A \equiv \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} F(t+h,z;\tau,y)\frac{d}{dz}\,G_x(z)\,dz \sim C\cdot\varepsilon^{1-\nu} \quad \textit{при } C = \text{const}. \quad (31)$$

В самом деле, обозначим

$$\varphi(z) = F(t+h,z;\tau,y) \quad (32)$$

и проинтегрируем левую часть (31) по частям:

$$A = [\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon)]\,\varepsilon^{-\nu} - \Delta, \quad (33)$$

$$\Delta = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} G_x(z)\,\frac{d}{dz}\,\varphi(z)\,dz. \quad (34)$$

При достаточно малых ε из формулы (9) следует соотношение

$$\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon) = 2\varepsilon\int_0^{\infty}\exp(-H\lambda^{\nu})\,[\cos\lambda(x+y) - \cos\lambda(y-x)]\,d\lambda\,,$$

т. е. первый член в (33) имеет порядок $\varepsilon^{1-\nu}$.

Так как (см. (4)) имеем $\pi_{s\to t}(x\to y) = \pi_{s\to t}(y\to x)$, формулу (34) можно преобразовать к виду

$$\Delta = \int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\pi_{t+h\to\tau}(z\to y)}{(x-z)^{\nu}}\,dz + \int_x^{x+\varepsilon}\frac{\pi_{t+h\to\tau}(z\to y)}{(z-x)^{\nu}}\,dz =$$
$$= \int_0^{\varepsilon} u^{-\nu}[\pi_{t+h\to\tau}(x-u\to y) + \pi_{t+h\to\tau}(x+u\to y)]\,du. \quad (35)$$

Используя (4), выражение в квадратных скобках в (35) оцениваем величиной

$$2\cos\lambda x + O(u^2), \quad (36)$$

так что, произведя интегрирование в (35) с учетом (36), получаем

$$\Delta = \frac{2\cos\lambda x}{1-\nu}\varepsilon^{1-\nu}.$$

Лемма 3 доказана.

Определение 2 [1–4]. Правосторонняя и левосторонняя дробные производные Римана—Лиувилля порядка ν от вещественной функции φ определяются следующими соотношениями ($0<\nu<1$):

— левосторонняя

$$D^{\nu}_{0+}\varphi(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\,\frac{d}{dz}\int_0^z\frac{\varphi(u)}{(z-u)^{\nu}}\,du;$$

— правосторонняя

$$D^{\nu}_{\infty-}\varphi(z)=-\,\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\,\frac{d}{dz}\int_z^{\infty}\frac{\varphi(u)}{(u-z)^{\nu}}\,du.$$

Интегрируя в этих равенствах по частям, находим соотношения

$$\int_z^{\infty}\frac{\varphi'(u)}{(u-z)^{\nu}}\,du=-\Gamma(1-\nu)D^{\nu}_{\infty-}\varphi(z)+\lim_{u\uparrow\infty}\frac{\varphi(u)}{(u-z)^{\nu}}\,, \tag{37}$$

$$\int_0^z\frac{\varphi'(u)}{(z-u)^{\nu}}\,du=\Gamma(1-\nu)D^{\nu}_{0+}\varphi(z)-\lim_{u\downarrow 0}\frac{\varphi(u)}{(z-u)^{\nu}}. \tag{38}$$

Преобразуем второй интеграл в (30), интегрируя его по частям и используя (37) и (38) для функции (32) и лемму 2. Получаем

$$-\Gamma(1-\nu)\,D^{\nu}_{0+}\varphi(z)-\Gamma(1-\nu)\,D^{\nu}_{\infty-}\varphi(z)\,.$$

При этом будем иметь

$$\lim_{u\uparrow\infty}\frac{\varphi(u)}{(u-z)^{\nu}}=0\,,$$

в силу конечности $\varphi(u)=F(t+h,u;\tau,y)\le 1$. Таким образом, поделив (30) на h^{ρ}, полагая $h\to 0$ и заменяя дробную производную Гёльдера (17) на дробную производную Харди и Литтлвуда (14), т. е.

$$\frac{\partial^{\rho}}{\partial t^{\rho}}\,F(t,x;\tau,y)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h,x;\tau,y)-F(t,x;\tau,y)}{h^{\rho}}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\,\mathcal{D}^{\rho}_{[s,t]}[F(t,x;\tau,y)-F(s,x;\tau,y)],$$

приходим к утверждению следующей теоремы.

Теорема 1. *Вероятность перехода (9) $\varphi_t(x)\equiv F(t,x;\tau,y)$ удовлетворяет первому уравнению Колмогорова (в дробных производных) вида*

$$\frac{1}{b_{\rho}(t)\Gamma(1+\rho)}\,\mathcal{D}^{\rho}_{[s,t]}[\varphi_t(x)-\varphi_s(x)]=$$
$$=-a_{\nu}\left[\nu\int_0^{\infty}\frac{\varphi_t(z)}{(z+x)^{1+\nu}}\,dz+\Gamma(1-\nu)\,D^{\nu}_{0+}\varphi_t(z)+\Gamma(1-\nu)\,D^{\nu}_{\infty-}\varphi_t(z)\right], \tag{39}$$

где

$$b_{\rho}(t)=\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_s^t\frac{\alpha(x)-\alpha(s)}{(t-x)^{\rho}}\,dx,\quad 0<\rho<1,\quad a_{\nu}=\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\,\sin\,\frac{\nu\pi}{2}\,,\quad 0<\nu<1. \tag{40}$$

Выведем второе уравнение Колмогорова.

Согласно (25), при $h \to 0$ имеем

$$F(\tau, z; \tau+h, y) = \int_0^y \delta(u-z)du -$$
$$- h^\rho b_\rho(t) a(\nu) \Big\{ \frac{1}{(z+y)^\nu} + \frac{1}{(y-z)^\nu} \eta(y-z) - \frac{1}{(z-y)^\nu}[1-\eta(y-z)] \Big\} + o(h^\rho). \quad (41)$$

Вставляем (41) в уравнение Колмогорова—Чепмена

$$F(t, x; \tau+h, y) = \int_0^\infty F(\tau, z; \tau+h, y) d_z F(t, x; \tau, z) \quad (42)$$

и получаем

$$F(t, x; \tau+h, y) = F(t, x; \tau, y) -$$
$$- b_\tau(\rho) a_\nu h^\rho \left[\int_0^\infty \frac{d_z F(t, x; \tau, z)}{(z+y)^\nu} + \int_0^{y-\varepsilon} \frac{d_z F(t, x; \tau, z)}{(y-z)^\nu} - \int_{y+\varepsilon}^\infty \frac{d_z F(t, x; \tau, z)}{(z-y)^\nu} + E_\varepsilon \right], \quad (43)$$

где

$$E_\varepsilon = \int_{y-\varepsilon}^y \frac{d_z F(t, x; \tau, z)}{(y-z)^\nu} - \int_y^{y+\varepsilon} \frac{d_z F(t, x; \tau, z)}{(z-y)^\nu}. \quad (44)$$

Лемма 4. *Для фиксированного $x > 0$ имеет место оценка*

$$E_\varepsilon = C_1 \cdot \varepsilon^{1-\nu}, \quad C_1 = \mathrm{const}. \quad (45)$$

В самом деле, в силу (3) имеем равенство $d_z F(t, x; \tau, z) = \pi_{t\to\tau}(x \to z)\, dz$ и поэтому, делая в интегралах (44) очевидные замены переменной, находим

$$E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \frac{du}{u^\nu} [\pi_{t\to\tau}(x \to y-u) - \pi_{t\to\tau}(x \to y+u)]. \quad (46)$$

Согласно (5) и (6), выражение в квадратных скобках в (46) представляется в виде

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-H_{t,\tau}\lambda^\nu)[\cos\lambda(y-u) - \cos\lambda(y+u)] \cos\lambda x \, d\lambda =$$
$$= -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \exp(-H_{t,\tau}\lambda^\nu) \sin\lambda y \sin\lambda u \cos\lambda x \, d\lambda. \quad (47)$$

Используя (47), интегрируем в (46) по u:

$$E_\varepsilon = -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \exp(-H_{t,\tau}\lambda^\nu) \cos\lambda x \sin\lambda y d\lambda \int_0^\varepsilon \frac{\sin\lambda u}{u^\nu} du.$$

Второй интеграл при малых ε оценивается величиной

$$\left| \int_0^\varepsilon \frac{\sin\lambda u}{u^\nu} du \right| \le \int_0^\varepsilon u^{-\nu} du = \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^{1-\nu},$$

откуда и вытекает (45).

Возьмем $\varepsilon = O(h)$, разделим (43) на h^ρ и перейдем к пределу $h \to 0$, используя $F(t, x; \tau, 0) = 0$ и лемму 3. Рассуждая так же, как при выводе (39), получаем формулу в следующей теореме.

Теорема 2. *Вероятность перехода (9) $\varphi_\tau(y) = F(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет второму уравнению Колмогорова (в дробных производных) вида*

$$\frac{1}{b_\rho(\tau)\Gamma(1+\rho)}\,\mathcal{D}^\rho_{[t,\tau]}[\varphi_\tau(y) - \varphi_t(y)] =$$
$$= a_\nu \left[\nu \int_0^\infty \frac{\varphi_\tau(z)}{(z+y)^{1+\nu}}\,dz + \Gamma(1-\nu)\,D^\nu_{0+}\varphi_\tau(y) + \Gamma(1-\nu)\,D^\nu_{\infty-}\varphi_\tau(y)\right]. \quad (48)$$

Литература

1. *Нигматуллин Р. Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теор. и матем. физика. 1992. Т. 90, №3. С. 354–368.
2. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. *Caputo M.* Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent — II // Geophys. J. Astronom. Soc. 1967. Vol. 13. P. 529–539.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Марачев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. *Мирошин Р. Н.* О некоторых решениях интегрального уравнения Колмогорова—Чепмена // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2007. Вып. 4. С. 22–29.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 488 с.
7. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований / пер. с англ. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторе

Мирошин Роман Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; miroshin-roman1938@yandex.ru

KOLMOGOROV EQUATIONS IN FRACTIONAL DERIVATIVES FOR THE TRANSITION PROBABILITIES OF SOME MARKOV PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME

Roman N. Miroshin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; miroshin-roman1938@yandex.ru

We consider a family of one-dimensional Markov processes with continuous time, for which earlier the author received the transition probability by means of the Chapman—Kolmogorov equation. These probabilities have the form of simple integrals. Using the procedure for obtained integral-differential equations for Markov processes with discontinuous trajectories, the author gets both first and second Kolmogorov equations for this family of processes. These equations are called equations with fractional derivatives. Results are based on the asymptotic analysis of transition probability when approaching the start of transition and the time of the end. From this analysis,in particular, it is followed the trajectory of Markov process be divided into two classes according to the range where they started. Some trajectories disappear with a certain probability, while others are born with a certain probability. Refs 8.

Keywords: Markov process with continuous time, transition probability, Kolmogorov equations, fractional derivatives.

References

1. Nigmatullin R. R., “The fractional integral and its physic interpretation”, *Theor. Math. Physics* **90**(3), 354–368 (1992) [in Russian].

2. Nakhushev A. M., *The elements of fractional derivative and its application* (Fizmatlit, Moscow, 2003, 272 p.) [in Russian].

3. Caputo M., “Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent — II”, *Geophys. J. Astronom. Soc.* **13**, 529–539 (1967).

4. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Fractional integrals and derivatives theory and applications* (Gordon and Breach, New York, 1993, 678 p.).

5. Miroshin R. N., “On some solutions of the Chapman-Kolmogorov integral equation”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1* Issue 4, 22–29 (2007) [in Russian].

6. Gnedenko B. V., *The theory of probability* (Chelsea Publishing Company, New York, 1999, 390 p.).

7. Bochner S., *Lectures on Fourier integrals* (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1959).

8. Bateman H., Erdélyi A., *Tables of integral transforms* (McGraw-Hill Book Company, inc., New York, Toronto, London, 1953, 344 p.).

Для цитирования: Мирошин Р. Н. Уравнения Колмогорова в дробных производных для вероятностей перехода некоторых марковских процессов с непрерывным временем // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 38–48.
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.106

For citation: Miroshin R. N. Kolmogorov equations in fractional derivatives for the transition probabilities of some Markov processes with continuous time. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 38–48. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.106