УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1
MSC 60F15

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получены достаточные условия применимости закона повторного логарифма к последовательности зависимых случайных величин. Следствием этого результата является теорема о законе повторного логарифма для последовательности m-ортогональных случайных величин. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: закон повторного логарифма, последовательности m-ортогональных случайных величин.

Теорема 1. *Пусть $\{Y_n; n = 1, 2, \cdots\}$ — последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве, $\{a_n; n = 1, 2, \cdots\}$ — последовательность положительных чисел, такая что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $a_{n+r} \geq a_n(1-\varepsilon)$ для всех $r \geq 1$ и всех достаточно больших n (условие A). Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{[c^n]\leq k<[c^{n+1}]} Y_k > (1+\varepsilon)a_{[c^n]}\right) < \infty \tag{1}$$

для некоторого $c > 1$ и любого $\varepsilon > 0$. Тогда выполняется

$$\limsup \frac{Y_n}{a_n} \leq 1 \quad \text{п. н.} \tag{2}$$

Доказательство. Пусть δ — произвольное положительное число, $c > 1$. В силу условия A имеем

$$P\left(Y_n > (1+\delta)a_n \quad \text{б. ч.}\right) \leq P\left(\max_{[c^n]\leq k<[c^{n+1}]} Y_k > (1+\delta)a_{[c^n]}(1-\varepsilon) \quad \text{б. ч.}\right)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$P\left(Y_n > (1+\delta)a_n \quad \text{б. ч.}\right) \leq P\left(\max_{[c^n]\leq k<[c^{n+1}]} Y_k > \left(1+\frac{\delta}{2}\right)a_{[c^n]} \quad \text{б. ч.}\right),$$

если положительное число ε выбрать столь малым, что $(1+\delta)(1-\varepsilon) > 1+\delta/2$.

Взяв число c удовлетворяющим условию (1) и применив лемму Бореля—Кантелли, приходим к неравенству (2).

Условие A представляет собой ослабление условия неубывания нормирующей числовой последовательности $\{a_n\}$, позволяющее применить теорему 1 к последовательностям случайных величин при нормирующей последовательности, которая не является неубывающей, но удовлетворяет условию A. В частности, с помощью теоремы 1 можно получить достаточные условия применимости закона повторного логарифма к суммам m-зависимых случайных величин. Напомним, что последовательность случайных величин $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$ называется *последовательностью m-зависимых случайных величин*, где m есть целое неотрицательное число, если случайные векторы $(X_p, \ldots, X_q)$ и $(X_r, \ldots, X_s)$ независимы при любых целых p, q, r, s, удовлетворяющих условиям $1 \leq p \leq q < r \leq s$ и $r - q > m$.

Понятие последовательности m-зависимых случайных величин введено Хёфдингом и Роббинсом в классической работе [1], содержащей также условия применимости центральной предельной теоремы к последовательностям m-зависимых случайных величин. К настоящему времени литература по предельным теоремам для сумм m-зависимых случайных величин весьма обширна.

В [2] введено понятие последовательности m-ортогональных случайных величин. Пусть m — целое неотрицательное число. Будем говорить, что заданная на некотором вероятностном пространстве последовательность случайных величин $\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ есть *последовательность m-ортогональных случайных величин*, если $EX_n^2 < \infty$ для любого n и $E(X_k X_j) = 0$ при условии $|k-j| > m$. В частности, последовательность 0-ортогональных случайных величин есть последовательность ортогональных случайных величин. Если $\{X_n\}$ есть последовательность m-зависимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями, то она является последовательностью m-ортогональных случайных величин. Последнее утверждение остается верным, если в нем заменить условие m-зависимости более слабым условием попарной m-зависимости. Заметим, что проверка выполнения условия m-ортогональности значительно проще, чем проверка условия m-зависимости или попарной m-зависимости. Исследование предельных теорем для последовательностей m-ортогональных случайных величин представляет определенный интерес с учетом того большого внимания, которое было уделено предельным теоремам для сумм ортогональных случайных величин и сумм m-зависимых случайных величин. Приведем одну теорему о законе повторного логарифма для последовательностей m-ортогональных случайных величин.

Теорема 2. *Пусть $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность m-ортогональных случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $B_n = ES_n^2$, $\chi(n) = (2B_n \log\log B_n)^{1/2}$. Пусть*

$$B_n \to \infty, \tag{3}$$

$$\frac{EX_n^2}{B_n} \to 0 \tag{4}$$

при $n \to \infty$ и выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{[c^n] \leq k < [c^{n+1}]} S_k > (1+\varepsilon)\chi([c^n])\right) < \infty \tag{5}$$

для некоторого $c > 1$ и любого $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\limsup \frac{S_n}{\chi(n)} \leq 1 \qquad \text{п. н.} \tag{6}$$

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет условию A. Справедливы равенства

$$B_n = E(S_{n+1} - X_{n+1})^2 = B_{n+1} + EX_{n+1}^2 - 2E(S_{n+1}X_{n+1}) =$$
$$= B_{n+1} + EX_{n+1}^2 + 2\theta \left(ES_{n+1}^2 EX_{n+1}^2\right)^{1/2}$$

в силу неравенства Буняковского—Коши, где $|\theta| \leq 1$. Поэтому

$$\frac{B_n}{B_{n+1}} = 1 + \frac{EX_{n+1}^2}{B_{n+1}} + 2\theta \left(\frac{EX_{n+1}^2}{B_{n+1}}\right)^{1/2}.$$

Условие (4) приводит к соотношению

$$\frac{B_n}{B_{n+1}} \to 1 \qquad (n \to \infty). \tag{7}$$

Для любого целого $p \geq 1$ имеем

$$B_{n+p} = B_n + E(X_{n+1} + \cdots + X_{n+p})^2 + 2E[S_n(X_{n+1} + \cdots + X_{n+p})] \geq$$
$$\geq B_n + 2E[S_n(X_{n+1} + \cdots + X_{n+p})],$$

$$E[S_n(X_{n+1} + \cdots + X_{n+p})] = E[(X_{n-m+1} + \cdots + X_n)(X_{n+1} + \cdots + X_{n+p})]$$

при $n > m$ в силу условия m-ортогональности. Используя это же условие, нетрудно убедиться, что выполняется неравенство

$$E|S_n(X_{n+1} + \cdots + X_{n+p})| \leq \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} |E(X_{n-j}X_{n+i})|.$$

Поэтому

$$B_{n+p} \geq B_n - 2\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} |E(X_{n-j}X_{n+i})| \geq B_n - 2\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} \left(EX_{n-j}^2 EX_{n+i}^2\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Для любого целого фиксированного p имеем

$$\frac{EX_{n+p}^2}{B_n} = \frac{EX_{n+p}^2}{B_{n+p}} \frac{B_{n+p}}{B_{n+p-1}} \cdots \frac{B_{n+1}}{B_n} \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{9}$$

вследствие (4) и (7). Из (8) и (9) следуют неравенства

$$B_{n+s} \geq B_n \left(1 - 2\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} \left(\frac{EX_{n-j}^2}{B_n} \frac{EX_{n+i}^2}{B_n}\right)^{1/2}\right),$$

$$B_{n+s} \geq B_n(1 - \varepsilon) \tag{10}$$

для любых $\varepsilon > 0$, $s \geq 1$ и всех достаточно больших n. Таким образом, последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет условию A.

Неравенство (10) сохраняет силу, если в нем заменить B_n на $\chi(n) = (2B_n \log\log B_n)^{1/2}$. Таким образом, последовательность $a_n = \chi(n)$ удовлетворяет условию A. Условие (1) теоремы 1 также выполнено в силу (5) для $Y_n = S_n$ и $a_n = \chi(n)$. По теореме 1 справедливо соотношение (6).

Теорема 2 сохраняет силу, если в ней заменить условие m-ортогональности условием m-зависимости (с сохранением остальных условий теоремы) или даже более слабым условием попарной m-зависимости. Полученный таким образом результат представляет собой обобщение теоремы 2 из [3], в которой предполагались выполненными условия (3) и (4), а вместо (5) было наложено следующее условие: для любого $b > 1$ существуют положительные постоянные C и δ, такие что выполняется неравенство

$$P\left(\max_{1\le k\le n} S_k \ge b\chi(n)\right) \le C\left(\log B_n\right)^{-1-\delta}$$

для всех достаточно больших n. Теорема из [2] отличается от последнего результата заменой условия m-зависимости условием m-ортогональности.

Литература

1. *Hoeffding W., Robbins H.* The central limit theorem for dependent random variables // Duke Math. J. 1948. Vol. 15, N 3. P. 773–780.
2. *Петров В. В.* Последовательности m-ортогональных случайных величин // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1982. Т. 119. Р. 198–202.
3. *Петров В. В.* О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 97. Р. 186–194.

Статья поступила в редакцию 19 мая 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторе

Петров Валентин Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; petrov2v@mail.ru

ON THE LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR SEQUENCES OF DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Valentin V. Petrov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; petrov2v@mail.ru

Some sufficient conditions are obtained for the applicability of the law of the iterated logarithm to sequences of dependent random variables. By means of this result we get a theorem on the law of the iterated logarithm for a sequence of m-orthogonal random variances. Refs 3.

Keywords: law of the iterated logarithm, sequences of m-orthogonal random variables.

References

1. Hoeffding W., Robbins H., “The central limit theorem for dependent random variables”, *Duke Math. J.* **15**(3), 773–780 (1948).
2. Petrov V. V., “Sequences of m-orthogonal random variables”, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **119**, 198–202 (1982) [in Russian].
3. Petrov V. V., “Law of the iterated logarithm for sequences of dependent random variables”, *J. Math. Sci* **24**(5), 611–617 (1984).

Для цитирования: Петров В. В. О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 49–52. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.107

For citation: Petrov V. V. On the law of the iterated logarithm for sequences of dependent random variables. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 49–52. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.107