

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА СЧЕТНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ОТРЕЗКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

О. В. Сильванович¹, Н. А. Широков²

¹ Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

² Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В настоящей работе рассматривается приближение целых функций из классов Гёльдера на счетном объединении отрезков целыми функциями экспоненциального типа. Принципиальным моментом является то, что скорость приближения в окрестности концов отрезков оказывается выше в той шкале, которая впервые появилась в теории приближения полиномами функций из классов Гёльдера на отрезке и позволила согласовать так называемые прямые и обратные теоремы для этого случая, т. е. восстанавливать гёльдеровскую гладкость по скорости приближения полиномами в этой шкале. Приближения целыми функциями на счетном объединении отрезков ранее не рассматривались. В первой части статьи были приведены несколько лемм и сформулирована основная теорема. В настоящей работе мы докажем эту теорему, опираясь на приведенные ранее леммы. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: класс Гёльдера, целые функции экспоненциального типа, приближения на подмножествах вещественной оси.

1. Начнем построение приближающих на множестве E функций f целыми функциями из классов T_σ . Будем предполагать вплоть до нижеследующего соотношения (44), что функция $f \in \Lambda_M^{r+\omega}(E)$, где модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq c \cdot \omega(x).$$

Модуль непрерывности $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ этому условию удовлетворяет. Использовать класс $H_M^\alpha(E)$ вместо более общего класса $\Lambda_M^{r+\omega}$ будем начиная с соотношения (44), которое выполняется как раз для класса $H_M^\alpha(E)$. Теорема справедлива и для общего класса, но доказательство требует дополнительных существенных соображений, которые мы планируем привести в следующей статье. Выберем параметры k и m так:

$$k + 1 = 4(r + 1), \quad m = 8(k + 1) + 2,$$

в частности для $H_M^\alpha(E)$, $r = 0$, поэтому $k = 3$, $m = 34$. Постоянную c_m определим равенством

$$c_m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^m dt = 1.$$

Далее, определив функции $z_{\xi,s}^{\pm}(z)$ в соотношениях (27) и (28) из [1], при $w \in E$ положим

$$R_k(z, w, \xi, s) = \begin{cases} \frac{1}{z_{\xi,s}^{+}(z)-w} \left(1 + \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{z_{\xi,s}^{+}(z)-z}{z_{\xi,s}^{+}(z)-w} \right)^{\nu} \right), & z \in D_{+}, \\ \frac{1}{z_{\xi,s}^{-}(z)-w} \left(1 + \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{z_{\xi,s}^{-}(z)-z}{z_{\xi,s}^{-}(z)-w} \right)^{\nu} \right), & z \in D_{-}. \end{cases}$$

Затем, определив эллипсы $E_{\rho_0}(I_n)$ и функцию $f'_{1\bar{z}}(z)$ в формуле (26) из [1], положим

$$F_{\sigma}(w) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}}(z) \left(\frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t \sigma_1}{t} \right)^m dt \cdot R_k \left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, t \right) \right) dm_2(z). \quad (1)$$

В формулах, определяющих R_k , F_{σ} , $\sigma_1 = \sigma/m$ в обозначениях функций F_{σ} , $z_{\xi,s}^{\pm}(z)$, $R_k(z, w, \xi, s)$ и области $D_{\pm}$, не указана зависимость этих функций от последовательностей $X' = \{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $X'' = \{x''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для краткости записи.

Учтем теперь, что области D_{+} и D_{-} зависят от последовательностей X' и X'' , т. е. $D_{\pm} = D_{\pm}(X', X'')$, поэтому и функции $z^{\pm}$ и R_k зависят от этих последовательностей:

$$z_{\xi,s}^{\pm}(z) = z_{\xi,s}^{\pm}(z, X', X''),$$

$$R_k \left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, t \right) = R_k \left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, t, X', X'' \right), \quad F_{\sigma}(w) = F_{\sigma}(w, X', X'').$$

Пусть имеем

$$a_n^0 = a'_n - \frac{1}{8}|I_n|, \quad a_n^1 = a'_n + \frac{1}{8}|I_n|, \quad b_n^0 = b'_n - \frac{1}{8}|I_n|, \quad b_n^1 = b'_n + \frac{1}{8}|I_n|,$$

$$d\nu'_n(x) = \frac{4}{|I_n|} dx, \quad x \in [a_n^0, a_n^1] \stackrel{\text{def}}{=} I'_n, \quad d\nu''_n(x) = \frac{4}{|I_n|} dx, \quad x \in [b_n^0, b_n^1] \stackrel{\text{def}}{=} I''_n.$$

Отметим, что справедливо равенство

$$\nu'_n(I'_n) = \nu''_n(I''_n) = 1. \quad (2)$$

2. Нам понадобятся последовательности целых функций экспоненциального типа, которые начнем определять в этом пункте. Пусть имеем

$$Y'_N = X' \setminus \bigcup_{l=-N}^N \{x'_l\}, \quad Y''_N = X'' \setminus \bigcup_{l=-N}^N \{x''_l\}, \quad \bigcup_{l=-N}^N \{x'_l\} = X'_N, \quad \bigcup_{l=-N}^N \{x''_l\} = X''_N.$$

Теперь положим при $w \in E$

$$F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N) = \int \prod_{l=-N}^N I'_l \int \prod_{l=-N}^N I''_l F_{\sigma}(w, X'_N \cup Y'_N, X''_N \cup Y''_N) d\nu'_{-N}(x'_{-N}) \dots d\nu''_N(x''_N). \quad (3)$$

Соотношение (2) дает равенство

$$\prod_{l=-N}^N I_l' \prod_{l=-N}^N I_l'' \int \dots \int d\nu'_{-N}(x'_{-N}) \dots d\nu'_N(x'_N) d\nu''_{-N}(x''_{-N}) \dots d\nu''_N(x''_N) = 1. \quad (4)$$

Положим

$$Q'_N = \prod_{l=-N}^N I_l', \quad Q''_N = \prod_{l=-N}^N I_l'', \quad d\mu'_N = d\nu'_{-N} \dots d\nu'_N, \quad d\mu''_N = d\nu''_{-N} \dots d\nu''_N.$$

Теперь из (26), (29) из [1] и (4) при $w \in E$ получаем соотношение

$$f(w) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}}(z) \left(c_m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m \cdot \frac{1}{z-w} dt \int_{Q'_n} d\mu'_N \int_{Q''_n} d\mu''_N \right). \quad (5)$$

Если $\zeta = z_{\xi,s}^{\pm}(z)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-w} + \frac{\zeta-z}{(\zeta-w)^2} + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} - \frac{1}{z-w} &= \\ &= \frac{z-\zeta}{(\zeta-w)(z-w)} + \frac{\zeta-z}{(\zeta-w)^2} + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} = \\ &= \frac{\zeta-z}{\zeta-w} \left(\frac{1}{\zeta-w} - \frac{1}{z-w} \right) + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} = \\ &= -\frac{(\zeta-z)^2}{(\zeta-w)^2(z-w)} + \frac{(\zeta-z)^2}{(\zeta-w)^3} + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} = \dots = \\ &= -\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-w} \right)^{k+1} \cdot \frac{1}{z-w}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому (1), (3), (5) и (6) при $w \in E$ влекут равенство

$$\begin{aligned} F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N) - f(w) &= \int_{Q'_N} d\mu'_N \int_{Q''_N} d\mu''_N \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}}(z) dm_2(z) \right) \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m dt \cdot \left(-\left(\frac{z_{1/\sigma,t}^{\pm}(z) - z}{z_{1/\sigma,t}^{\pm}(z) - w} \right)^{k+1} \cdot \frac{1}{z-w} \right) \right) = \\ &= \int_{Q'_N} d\mu'_N \int_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m dt \times \\ &\times \left(\frac{z_{1/\sigma,t}^{\pm}(z) - z}{z_{1/\sigma,t}^{\pm}(z) - w} \right)^{k+1} \cdot \frac{1}{z-w} dm_2(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя соотношения (29) и (30) из [1, лемма 1], получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_{1/\sigma,t}^{\pm}(z) - z}{z_{1/\sigma,t}^{\pm}(z) - w} \right|^{k+1} &\leq c_{abs}^{2(k+1)} \cdot \left| \frac{z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z) - z}{z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z) - w} \right|^{k+1} \cdot (\sigma|t| + 1)^{8(k+1)} \leq \\ &\leq c_{k,m} \left| \frac{z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z) - z}{z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z) - w} \right|^{k+1} \cdot (\sigma_1 t + 1)^{8(k+1)}. \quad (8) \end{aligned}$$

Отсюда в силу выбора $m = 8(k+1) + 2$ следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t \sigma_1}{t} \right)^m (\sigma_1 t + 1)^{8(k+1)} dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t \sigma_1}{t \sigma_1} \right)^m (\sigma_1 t + 1)^{8(k+1)} d\sigma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s} \right)^m (s + 1)^{8(k+1)} ds < \infty. \quad (9) \end{aligned}$$

В таком случае из (7)–(9) заключаем, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \leq \\ \leq \tilde{c}_m' \int_{Q'_N} d\mu'_N \int_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n \in \mathbb{Z}_{E_{\rho_0}(I_n)}} \int |f'_{1\bar{z}}(z)| \left| \frac{z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z) - z}{z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z) - w} \right|^{k+1} \frac{1}{|z - w|} dm_2(z). \quad (10) \end{aligned}$$

В последующих оценках будем использовать полные обозначения $z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N)$. Пусть $w \in I_{n_0} \subset E$, $\eta = 1/\sigma$. Тогда по лемме 2 из [1] имеем

$$\begin{aligned} |z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N) - z| \leq \\ \leq c |z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N) - w|^{1/2} \cdot \left(|z - w| + |z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N)| \right)^{1/2}, \quad (11) \end{aligned}$$

где $c = A_4$ или $c = A_5$, $z \in D_+$ или $z \in D_-$ соответственно.

Для оценки выражения $|z_{\eta,0}^{\pm}(z) - w|$ с помощью той же леммы 2 из [1] находим

$$|z_{1/\sigma,0}^{\pm}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N) - w| \geq c_1 \begin{cases} |z_{1/\sigma,0}^{\pm}(\omega, X', X'') - w|, & w \in D_+ \text{ или } w \in D_-, \\ |z - w|, & \text{если } |z - w| \geq |z_{\eta,0}^{\pm}(\omega, X', X'') - w|. \end{cases} \quad (12)$$

Принимая во внимание (16) из [1], а также оценки (11), (12), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{E_{\rho_0}(I_n)}} \int |f'_{1\bar{z}}(z)| \left| \frac{z_{\eta,0}^{\pm}(z, X', X'') - z}{z_{\eta,0}^{\pm}(z, X', X'') - w} \right|^{k+1} \frac{dm_2(z)}{|z - w|} \leq \\ \leq c_m(E) \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ E_{\rho_0}(I_n) \\ n \neq n_0, n_0+1}} \text{dist}^{r-1}(z, I_n) \omega(\text{dist}(r, I_n)) \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{|z_{\eta,0}(w) - w|^{1/2} (|z - w| + |z_{\eta,0}(w) - w|)^{1/2}}{|z - w|} \frac{dm_2(z)}{|z - w|} +$$

$$+ c_m(E) \left(\int_{E_{\rho_0}(I_{n_0})} \dots + \int_{E_{\rho_0}(I_{n_0+1})} \dots \right) = T_1 + T_2, \quad (13)$$

при этом $T_1 = T_{1n_0}(w, X', X'')$, $T_2 = T_{2n_0}(w, X', X'')$.

Поскольку $w \in I_{n_0} \cup J_{n_0}$ и $\sigma \geq 1$, справедлива оценка $|z_{\eta,0}^\pm(w) - w| \leq c|z - w|$ при $z \in E_{\rho_0}(I_n)$, $n \neq n_0$, $n \neq n_0 + 1$. Далее, с учетом (18) из [1], оцениваем

$$T_1 \leq c_m(E) \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ n \neq n_0, \\ n \neq n_0+1}} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} \text{dist}^{r-1}(z, I_n) \omega(\text{dist}(r, I_n)) |z_{\eta,0}^\pm(w) - w|^{\frac{k+1}{2}} \frac{dm_2(z)}{|z - w|^{\frac{k+1}{2}+1}} \leq$$

$$\leq c |z_{\eta,0}^\pm(w) - w|^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\substack{n \neq 0, \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{n^{\frac{2(k+1)}{2}+1}} \leq c |z_{\eta,0}^\pm(w) - w|^{\frac{k+1}{2}}. \quad (14)$$

В соотношении (14) знак «+» или «-» выбирается в соответствии с тем, будет ли $w \in D_+$ или $w \in D_-$.

Из (35) и (36) из [1] находим, что при любых X' и X'' выполняются неравенства

$$|z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w| \leq c\sqrt{\eta} = \frac{c}{\sqrt{\sigma}},$$

$$|z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w|^{\frac{k+1}{2}} \leq c \left(\sigma^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{4(r+1)}{2}} = c\sigma^{-r-1} \leq c\sigma^{-r} \omega \left(\frac{1}{\sigma} \right). \quad (15)$$

В соотношении (15) постоянная c не зависит от X' и X'' . Оценим слагаемое T_2 . Как следует из [1, лемма 2], в случае $z \in D_\pm$, $|z - w| \leq |z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w|$ с постоянными $c' > 0$ и $c'' > 0$, не зависящими от X', X'' , справедливы неравенства

$$|z_{\eta,0}^\pm(z, X', X'') - z| \leq c' |z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w|, \quad (16)$$

$$|z_{\eta,0}^\pm(z, X', X'') - w| \geq c'' |z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w|. \quad (17)$$

Если же имеем $|z - w| \geq |z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w|$, то с постоянной $c''' > 0$, не зависящей от X' и X'' , выполняется оценка

$$|z_{\eta,0}^\pm(z, X', X'') - w| \geq c''' |z - w|. \quad (18)$$

Неравенства (16)–(18) дают такое соотношение для слагаемого T_2 :

$$T_2 \leq c \int_A \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \times$$

$$\times \left| \frac{z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w}{z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w} \right|^{k+1} \frac{dm_2(z)}{|z - w|} + c \int_B \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \times$$

$$\times \frac{\left(|z_{\eta,0}^\pm(w) - w|^{\frac{1}{2}} (|z - w| + |z_{\eta,0}^\pm(w) - w|)^{\frac{1}{2}} \right)^{k+1}}{|z - w|^{k+1}} \frac{dm_2(z)}{|z - w|} = T_{21} + T_{22}, \quad (19)$$

где $A = E_{\rho_0}(I_{n_0}) \cup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \cap \{z : |z - w| \leq |z_{\eta,0}^{\pm}(w, x', X'') - w|\}$, $B = E_{\rho_0}(I_{n_0}) \cup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \setminus \{z : |z - w| \leq |z_{\eta,0}^{\pm}(w, x', X'') - w|\}$.

Слагаемое T_{21} оценивалось в работах Е. М. Дынькина [2, 3]: если имеем $\lambda = |z_{\eta,0}^{\pm}(w, X', X'') - w|$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} T_{21} &\leq c \int_{|z-w| \leq \lambda} \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{dm_2(z)}{|z-w|} \leq c\lambda^r \omega(\lambda) = \\ &= c|z_{\eta,0}^{\pm}(w, X', X'') - w|^r \cdot \omega(|z_{\eta,0}^{\pm}(w, X', X'') - w|). \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично, полагая $\lambda = |z_{\eta,0}^{\pm}(w, X', X'') - w|$ и учитывая (18), получаем оценку для T_{22} :

$$\begin{aligned} T_{22} &\leq c \int_{K_1} \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{\lambda^{\frac{k+1}{2}} \cdot |z-w|^{\frac{k+1}{2}} dm_2(z)}{|z-w|^{k+1} |z-w|} = \\ &= c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \int_{K_2} \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}}} \leq \\ &\leq c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \int_{K_3} \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}+1}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $K_1 = E_{\rho_0}(I_n) \cup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \setminus \{z : |z - w| \leq \lambda\}$, $K_2 = E_{\rho_0}(I_n) \cup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \setminus \{z : |z - w| \leq \lambda\}$, $K_3 = \{z : |z - w| \leq |I_{n_0}| + |J_{n_0}| + |I_{n_0+1}|\} \setminus \{z : |z - w| \leq \lambda\}$.

Пусть M таково, что $2^{M-1}\lambda \leq |I_{n_0}| + |J_{n_0}| + |I_{n_0+1}| < 2^M\lambda$, тогда неравенство (21) можно продолжить:

$$\begin{aligned} T_{22} &\leq c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\nu=1}^M \int_R \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \cdot \frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}+1}} \leq \\ &\leq c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\nu=1}^M \frac{1}{(2^\nu \lambda)^{\frac{k+1}{2}+1}} \int_R \text{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\text{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) dm_2(z) \leq \\ &\leq c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\nu=1}^M \frac{1}{(2^\nu \lambda)^{\frac{k+1}{2}+1}} (2^\nu \lambda)^{r+1} \cdot \omega(2^\nu \lambda) = c\lambda^r \sum_{\nu=1}^M \frac{1}{(2^\nu)^{\frac{k+1}{2}-r}} \omega(2^\nu \lambda) \leq \\ &\leq c\lambda^r \sum_{\nu=1}^M \frac{1}{(2^\nu)^{\frac{k+1}{2}-r}} 2^\nu \omega(\lambda) \leq c\lambda^r \omega(\lambda), \quad R = \{2^{\nu-1}\lambda \leq |z-w| \leq 2^\nu \lambda\}, \end{aligned} \quad (22)$$

поскольку $\frac{k+1}{2} - r - 1 = 2(r+1) - r - 1 = r+1 \geq 1$.

Таким образом, из оценок (19), (20) и (22) приходим при любых X' и X'' к соотношению

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{E_{\rho_0}(I_n)}} \int |f'_{1\bar{z}}(z)| \left| \frac{z_{1/\sigma,0}^{\pm} - z}{z_{1/\sigma,0}^{\pm} - w} \right|^{k+1} \frac{dm_2(z)}{|z-w|} \leq c|z_{1/\sigma,0}^{\pm}(w) - w|^r \cdot \omega(|z_{1/\sigma,0}^{\pm}(w) - w|) \quad (23)$$

с постоянной c , не зависящей от X', X'' и $w \in \mathbb{R}$. Знак «+» или «-» в (23) выбирается в соответствии с тем, будет $w \in D_+$ или $w \in D_-$. Учитывая лемму 3 из [1], для $\sigma \geq 1$ получаем оценку

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} |f'_{1\bar{z}}(z)| \left| \frac{z_{1/\sigma,0}^{\pm} - z}{z_{1/\sigma,0}^{\pm} - w} \right|^{k+1} \frac{dm_2(z)}{|z - w|} \leq C(E). \quad (24)$$

Привлекая соотношение (10), находим, что при $w \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N)| \leq |F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| + |f(w)| \leq C(E, f). \quad (25)$$

3. В этом пункте проверим, что рассматриваемые функции F_{σ} имеют равномерные оценки на комплексной плоскости. Если $w = u + iv$, $w \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_{\rho_0}(I_n)$, будем иметь

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z - w} dm_2(z) \right) = f_1(w) = 0. \quad (26)$$

Поэтому при таких w и $\eta = 1/\sigma$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N) &= F_{\sigma}(w, Y'_N, Y''_N) - f_1(w) = \\ &= \int_{Q'_N} d\mu'_N \int_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int_{E_1} f'_{1\bar{z}}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m dt \times \\ &\quad \times \left(-\left(\frac{z_{\eta,t}^{\pm}(z) - z}{z_{\eta,t}^{\pm}(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z - w} \right) dm_2(z) = \\ &= \int_{Q'_N} d\mu'_N \int_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{E_2} f'_{1\bar{z}}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m dt \times \\ &\quad \times \left(\left(\frac{z_{\eta,t}^{+}(z) - z}{z_{\eta,t}^{+}(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z - w} \right) dm_2(z) + \\ &+ \int_{Q'_N} d\mu'_N \int_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{E_3} f'_{1\bar{z}}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m dt \times \\ &\quad \times \left(\left(\frac{z_{\eta,t}^{-}(z) - z}{z_{\eta,t}^{-}(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z - w} \right) dm_2(z) = \\ &= S_{\sigma}^{+}(w, Y'_N, Y''_N) + S_{\sigma}^{-}(w, Y'_N, Y''_N), \quad (27) \end{aligned}$$

где $E_1 = E_{\rho_0}(I_n)$, $E_2 = E_{\rho_0}(I_n) \cap D_+$, $E_3 = E_{\rho_0}(I_n) \cap D_-$.

Выбираем L так, чтобы выполнялось равенство $\mathbb{R} \pm iL \cap E_{\rho_0}(I_n) = \emptyset$ при $n \in \mathbb{Z}$. Пусть имеем $w = u + iv$, $v = L + c_E^*$, с некоторым c_E^* (случай $v = -L + c_E^*$ рассматривается аналогично).

При $z \in D_- \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_{\rho_0}(I_n)$ выполняется

$$|z_{1/\sigma,0}^-(z) - z| \leq \tilde{c}, \quad |z_{1/\sigma,0}^-(z) - w| \geq c|z - w|,$$

поэтому, учитывая (8) и (9), из (27) получаем оценку

$$|S_\sigma^-(w, Y'_N, Y''_N)| \leq c \int_{Q'_N} d\mu'_n \int_{Q''_N} d\mu''_n \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} |f'_{1\bar{z}}(z)| \frac{1}{|z - w|^{k+1}} dm_2(z) \leq c. \quad (28)$$

В соотношении (28) и далее c могут обозначать различные постоянные, не зависящие от N, w и σ . При оценке $S_\sigma^+(w, Y'_N, Y''_N)$ учтем, что функция $z_{\xi,t}^+(z)$ аналитична по t и при $t \in \mathbb{C}_+$, поэтому с постоянной $c_E^* > 0$, которую выберем позже в (36), имеем

$$\begin{aligned} S_\sigma^+(w, Y'_N, Y''_N) &= \int_{Q'_N} d\mu'_n \int_{Q''_N} d\mu''_n \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int_{\mathbb{R} + iL + ic_E^*} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \right)^m dt \times \\ &\quad \times \left(\frac{z_{\xi,t}^+(z) - z}{z_{\xi,t}^+(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z - w} dm_2(z). \end{aligned} \quad (29)$$

Лемма 1 из [1] влечет оценку с другой постоянной c'_0 при $t \in \mathbb{R}$:

$$|z_{1/\sigma,t}^+(z) - z| \leq c'_0 |\sigma t + i|^4 |z_{1/\sigma,0}^+(z) - z|, \quad z \in D_+. \quad (30)$$

Также в силу леммы 1 из [1] имеем

$$|z_{1/\sigma,t}^+(z) - z| \leq c_E, \quad z \in \partial D_+, \quad \sigma \geq 1. \quad (31)$$

Поскольку $(z_{1/\sigma,0}^+(z) - z)$ аналитична в D_+ , то в силу нормировки на бесконечности функций φ_+ и ψ_+ для функции $(z_{1/\sigma,0}^+(z) - z)$ в D_+ действует принцип максимума, поэтому (31) влечет соотношение

$$|z_{1/\sigma,0}^+(z) - z| \leq c_E, \quad z \in D_+, \quad \sigma \geq 1. \quad (32)$$

Тогда из (31) и (32) следует, что (30) справедливо при $z \in D_+$ и $t \in \mathbb{C}_+$. Далее, при $t \in \mathbb{R}$, $z \in D_+$ имеем

$$\operatorname{Im} \left(z_{1/\sigma,t}^+(z) - z \right) \leq \hat{c}_E, \quad (33)$$

что получается из (32) и равенства $\operatorname{Im}(\varphi_+(z) + t) = \operatorname{Im}\varphi_+(z)$. Тогда (33) дает

$$\operatorname{Im} z_{1/\sigma,t}^+(z) \leq \operatorname{Im} z + \hat{c}_E, \quad z \in D_+, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (34)$$

Поскольку функция $\operatorname{Im} z_{1/\sigma,t}^+(z)$ при фиксированном $z \in D_+$ является гармонической при $\operatorname{Im} t > 0$ функцией по t , непрерывной в $\bar{\mathbb{C}}_+$, то нормировка на бесконечности функций φ_+ и ψ_+ из соотношения (34) при $\operatorname{Im} t > 0$ дает неравенство

$$\operatorname{Im} z_{1/\sigma,t}^+(z) \leq \operatorname{Im} t + \operatorname{Im} z + \hat{c}_E, \quad z \in D_+. \quad (35)$$

Положим

$$c_E^* = 2 \left(\hat{c}_E + \sup_{z \in E_{\rho_0}(I_n)} \operatorname{Im} z \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (36)$$

Тогда при $t \in iL + \mathbb{R} + c_E^*$, $\operatorname{Im} w = L$, $z \in D_+ \cap E_{\rho_0}(I_n)$ придем к неравенству

$$|z_{1/\sigma, t}^+(z) - w| \geq \left| \operatorname{Im} w - \operatorname{Im} z_{1/\sigma, t}^+(z) \right| \geq c_E^* - (\hat{c}_E + \operatorname{Im} z) \geq \hat{c}_E. \quad (37)$$

Затем при $\operatorname{Im} t = L + c_E^*$ получим

$$\begin{aligned} |(\sin t \sigma_1)|^m &= \left| \left(\frac{1}{2i} \right)^m (e^{it\sigma_1} - e^{-it\sigma_1})^m \right| = \left| \left(\frac{1}{2i} \right)^m e^{it\sigma} (1 - e^{-2it\sigma_1})^m \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^m} e^{(c_E^* + L)\sigma} \cdot 2^m = e^{(c_E^* + L)\sigma}. \end{aligned} \quad (38)$$

Собирая вместе оценки (38), (37), (32), (30), (16) из [1] и равенство (26), приходим при $\operatorname{Im} w = L$ (L выбрано после соотношения (27)) к неравенству

$$\begin{aligned} |S_\sigma^+(w, Y'_N, Y''_N)| &\leq c \int_{Q'_N} d\mu'_n \int_{Q''_N} d\mu''_n \sum_{n \in \mathbb{Z}_{E_{\rho_0}(I_n)}} \int \operatorname{dist}^{r-1}(z, I_n) \omega(\operatorname{dist}(z, I_n)) \frac{1}{\sigma_1^m} e^{(c_E^* + L)\sigma} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R} + iL + ic_E^*} \frac{|dt|}{|t|^m} (\sigma|t| + 1)^{4(k+1)} \cdot \frac{1}{|z - w|} dm_2(z) \leq c_m \sigma^{-m+4(k+1)} e^{(c_E^* + L)\sigma}. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, из (27), (28) и (39) следует при $\operatorname{Im} w = L + c_E^*$ и любых Y'_N, Y''_N неравенство

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \leq c + c_m \sigma^{-m+4(k+1)} e^{(c_E^* + L)\sigma}. \quad (40)$$

Оценки, аналогичные соотношениям (27)–(40), можно получить и при $\operatorname{Im} w = -L - c_E^*$ с рассмотрением D_- и D_+ соответственно вместо D_+ и D_- . Таким образом, имея в виду оценку, аналогичную (40), при $|\operatorname{Im} w| \leq L + c_E^*$ и любых Y'_N и Y''_N получаем неравенство

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \leq c + c_m \sigma^{-m+4(k+1)} e^{(c_E^* + L)\sigma}. \quad (41)$$

4. Закончим доказательство теоремы. Соотношение (41) показывает, что последовательность функций $\{F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)\}_{N=1}^\infty$ образует нормальное семейство функций, из которого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{F_\sigma(w, Y'_{N_*}, Y''_{N_*})\}_{N_*=1}^\infty$, сходящуюся в силу (41) на компакте в $\mathbb{C}$ к целой функции $F_\sigma(w)$ экспоненциального типа σ .

Учитывая соотношения (10)–(28), при любых N получаем оценку

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \leq c |z_{\eta, 0}^\pm(w) - w|^r \omega(|z_{\eta, 0}^\pm(w) - w|), \quad w \in E \quad (42)$$

с постоянной c , независящей от N .

Учитывая соотношения (39) и (40) из [1], приходим при $w \in E$ к неравенствам

$$|w - x'_n| \geq \frac{1}{16} |I_n|, \quad |w - x''_n| \geq \frac{1}{16} |I_n|, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда (42) при $\eta = 1/\sigma$ дает оценку

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \leq c|z_{\eta,0}^\pm(w) - w|^r \omega(|z_{\eta,0}^\pm(w) - w|) \leq cd_{1+\eta}^r(w) \omega(d_{1+\eta}(w)). \quad (43)$$

Поскольку при рассматриваемом w справедливо неравенство $d_{1+1/\sigma}(w) \geq c/\sigma$, оценка (43) является неравенством, которое при таких w влечет утверждение теоремы, как покажет нижеследующее рассуждение. Если же при каком-то $n_0 \in \mathbb{Z}$ будет выполнено

$$|w - x'_{n_0}| < \frac{1}{16}|I_{n_0}| \quad \text{или} \quad |w - x''_{n_0}| < \frac{1}{16}|I_{n_0}|,$$

то проведем оценки лишь в случае $r = 0$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Пусть выполняется неравенство $|w - x'_{n_0}| \geq \frac{1}{16}|I_{n_0}|$ (при $|w - x''_{n_0}| \geq \frac{1}{16}|I_{n_0}|$ рассуждения аналогичны). Выберем $\varkappa_0$ так, чтобы неравенство $|n_0| < N_\varkappa$ выполнялось бы при $\varkappa \geq \varkappa_0$. Тогда, полагая в формулах (8)–(22) $\eta = 1/\sigma$ и учитывая (35) и (36) из [1], будем иметь

$$\begin{aligned} |F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| &\leq \int_{Q'_{N_\varkappa}} \int_{Q''_{N_\varkappa}} |z_{\eta,0}^\pm(w, X', X'') - w|^\alpha d\mu'_{N_\varkappa} d\mu''_{N_\varkappa} \leq \\ &\leq c \cdot \frac{4}{|I_{n_0}|} \int_{a_{n_0}^0}^{a_{n_0}^1} \frac{\eta^\alpha}{(|x'_{n_0} - w| + \eta^{1/2})^\alpha} dx'_{n_0} \leq c_{2E,\alpha} \cdot \eta^\alpha = c_{2E,\alpha} \cdot \frac{1}{\sigma^\alpha}. \end{aligned} \quad (44)$$

Постоянная $c_{2E,\alpha}$ в (44), как следует из анализа постоянных, участвующих в соотношениях (7)–(22), зависит лишь от E и α , но не зависит от $N_\varkappa$. Ранее было отмечено, что последовательности функций $F_\sigma(w, Y'_{N_\varkappa}, Y''_{N_\varkappa})$ в силу оценки (41) сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к функции F_σ экспоненциального типа σ , т.е. $F_\sigma \in T_\sigma$. Переходя в (44) к пределу при $\varkappa \rightarrow \infty$, получим оценку

$$|F_\sigma(w) - f(w)| \leq c_{2E,\alpha} \cdot \frac{1}{\sigma^\alpha},$$

которая и доказывает теорему.

Теорема доказана.

Литература

1. Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 1. Формулировка результатов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 644–650.
2. Dyn'kin E. M. Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl. 1980. Vol. 115, N 2. P. 33–58.
3. Dyn'kin E. M. The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Сильванович Ольга Васильевна — кандидат физико-математических наук; olamamik@gmail.com

Широков Николай Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор; nikolai.shirokov@gmail.com

APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS ON A COUNTABLE UNION OF SEGMENTS ON THE REAL AXIS. 2. PROOF OF THE MAIN THEOREM

Olga V. Silvanovich¹, Nikolai A. Shirokov²

¹ St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Kronverkskii prospect, 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation; olamamik@gmail.com

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nikolai.shirokov@gmail.com

We prove in the present paper a theorem about approximation of a function defined on a countable union of segments of the real line by means of entire functions of exponential type. The approximating function is supposed to belong to a Hölder class α , $0 < \alpha < 1$. The set $E \subset \mathbb{R}$ consists of disjoint segments $[a_n, b_n]$, $-\infty < n < \infty$ such that $b_n - a_n \asymp b_k - a_k$ for any n and k and $a_{n+1} - b_n \asymp b_n - a_n$ for any n . The function f defined on E is supposed to be bounded by a constant M and satisfying the condition $|f(x) - f(y)| \leq c_0|x - y|^\alpha$, $x, y \in [a_n, b_n]$, $0 < \alpha < 1$. The construction of an approximation of f by entire functions we begin from a construction of a series of domains D_+ and D_- depending of sequences $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ and $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$: $x'_n, x''_n \in [a_n, b_n]$. We introduce a special conformal mappings of D_+ and D_- to themselves and use these mappings to form kernels $R_k(z, w, \xi, \zeta)$.

Afterwards we combine a continuation of a function f from the set E to the whole complex plane $\mathbb{C}$ from our first part of this paper and kernels $R_k(z, w, \xi, \zeta)$. We get as a result a series of entire functions of exponential type depending on sequences $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ and $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Then we use sequences $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ and $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ to construct a final approximating entire function F_σ . Refs 3.

Keywords: Hölder class σ , entire function of exponential type, approximation on subsets of real line.

References

1. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., “Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3(61)**, issue 4, 644–650 (2016) [in Russian].
2. Dyn’kin E. M., “Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale”, *Amer. Math. Soc. Transl.* **115(2)**, 33–58 (1980).
3. Dyn’kin E. M., “The pseudoanalytic extensions”, *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

Для цитирования: Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 2. Доказательство основной теоремы // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 1. С. 53–63. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.108

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the main theorem. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 53–63. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.108