

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ\*

*Д. Р. Ямалова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается система импульсных дифференциальных уравнений с запаздыванием, которая возникает в математической биологии в задаче наблюдения состояния. Получено дискретное преобразование (преобразование Пуанкаре), полностью описывающее эволюцию состояния гибридного наблюдателя от импульса к импульсу, что позволяет исследовать свойства исходной системы на основе ее дискретной динамики. Библиогр. 14 назв. Ил. 2.

*Ключевые слова:* системы с запаздыванием, импульсные системы, наблюдатель состояния.

**1. Введение.** Импульсные дифференциальные уравнения являются функционально-дифференциальными: их решения разрывны и испытывают скачки (импульсы) в некоторые моменты времени, которые определяются из функциональных соотношений различного вида (см., например, [1]). Импульсное воздействие возникает в различных прикладных задачах, в том числе в биологических, где импульсы порождаются ансамблями нейронов головного мозга [2]. Важной областью биологии, в которой применяются импульсные модели, является нейроэндокринология. В частности, при ряде упрощающих предположений общее поведение нейроэндокринной системы может быть описано линейной моделью с импульсной модуляцией с переменной частотой и амплитудой [3]. Такая модель может быть применена для изучения процесса секреции, освобождения и регуляции основных гормонов, таких как тестостерон, инсулин, кортизол, гормон роста и других [4].

Параметры скачков состояний эндокринной системы часто не поддаются непосредственному измерению по этическим соображениям. Поэтому требуется их оценивание на основе наблюдения непрерывных координат. Значительное число работ посвящено наблюдаемости гибридных систем, содержащих непрерывную и импульсную части (см., например, [5]), однако в литературе не рассматривался случай, когда моменты возникновения скачков неизвестны. Первая схема такого наблюдателя была предложена в [6]. В ее основе лежит синхронизация импульсов исходной системы и наблюдателя. В работе [6] было выведено дискретное отображение (в теории гибридных систем оно носит название отображения Пуанкаре [7]), описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу. Неподвижные точки этого отображения и его итераций отвечают периодическим решениям уравнения наблюдателя. Путем линеаризации этого отображения в малых окрестностях периодических режимов исходной системы были получены условия локальной асимптотической устойчивости режима наблюдения (синхронного режима).

Одной из специфических особенностей многих биологических моделей является наличие запаздывания во времени. В эндокринных системах запаздывание может воз-

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант № 6.38.230.2015) и РФФИ (грант № 14-01-00107-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

никать по двум причинам: первое — это запаздывание, связанное с транспортировкой гормонов в потоке крови, второе — запаздывание, возникающее из-за необходимости затратить определенное время на синтез гормона до его секреции [3, 8, 9]. В [10] было введено понятие конечномерной приводимости (FD-приводимости), учитывающее специальную структуру линейной части системы и позволяющее сводить импульсные системы с запаздыванием к системам без запаздывания.

В данной работе рассматривается задача наблюдения состояний FD-приводимой системы с запаздыванием. Для наблюдателя состояний такой системы построено дискретное отображение от импульса к импульсу, неподвижные точки которого отвечают периодическим решениям уравнения наблюдателя. Опираясь на методику работы [6], путем линеаризации этого отображения в малых окрестностях периодических режимов исходной системы выводятся условия локальной асимптотической устойчивости режима наблюдения (синхронного режима). Результаты иллюстрируются примером системы гормональной регуляции уровня тестостерона.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим систему импульсных уравнений с запаздыванием, предложенную в [10]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \\ t_{n+1} &= t_n + T_n, \quad x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \quad T_n = \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  — постоянные матрицы,  $z$  — управляемый скалярный выход,  $y$  — измеряемый выход,  $x$  — вектор состояния,  $\tau$  — постоянное запаздывание. Система (1) рассматривается при  $t \geq t_0$  и  $n = 0, 1, \dots$ , с начальными условиями  $t_0$  и  $x(t) = \varphi(t)$ ,  $t_0 - \tau \leq t < t_0$ , где  $\varphi(t)$  — некоторая непрерывная на  $[t_0 - \tau, t_0]$  начальная вектор-функция. Через  $f(t^-)$  и  $f(t^+)$  будем обозначать левосторонний и правосторонний пределы функции  $f(\cdot)$  в точке  $t$ .

Предположим, что выполнены соотношения  $CB = 0$ ,  $LB = 0$ . Моменты времени  $t_n$  — моменты импульсации (импульсного воздействия),  $\lambda_n$  — амплитуды импульсов. Функции  $\Phi(\cdot)$  и  $F(\cdot)$  являются непрерывными, строго монотонными и ограниченными, причем значения строго положительны и отделены от нуля. Будем считать, что величины запаздывания всегда меньше длины промежутка между двумя последовательными импульсами, т. е.  $\inf_z \Phi(z) > \tau$ .

Вектор состояния  $x(t)$  системы (1) претерпевает скачки в моменты времени  $t = t_n$ . Однако выходы  $y(t)$ ,  $z(t)$  являются непрерывными ввиду предположения  $CB = 0$ ,  $LB = 0$ .

Рассмотрим на интервале  $t \geq t_0$  систему линейных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau). \quad (2)$$

Система (2) называется *FD-приводимой (конечномерно приводимой)* [10], если существует матрица  $D$  такая, что любое решение системы (2) удовлетворяет системе уравнений без запаздывания  $\dot{x}(t) = Dx(t)$  для всех  $t \geq t_0 + \tau$ .

**Лемма 1** ([10]). *FD-приводимость системы (2) эквивалентна любому из следующих двух условий:*

- 1) *выполнено  $A_1 A_0^k A_1 = 0$  для всех  $k = 0, 1, \dots, n_x - 1$ ;*

2) существует невырожденная квадратная матрица  $S$  порядка  $n_x$  такая, что выполняются равенства

$$S^{-1}A_0S = \begin{bmatrix} U & 0 \\ W & V \end{bmatrix}, \quad S^{-1}A_1S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{W} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где блоки  $U, V$  — квадратные, а блоки  $W, \bar{W}$  имеют одинаковые размеры.

Если система FD-приводима, матрица  $D$  определяется формулой  $D = A_0 + A_1e^{-A_0\tau}$ .

Введем новое понятие наблюдаемости, которое сочетает в себе понятия спектральной наблюдаемости (см., например, [11, 12]) и FD-приводимости. Заметим, что для модели гормональной регуляции, рассмотренной в [10], это свойство имеет место.

**Определение 1.** Линейную часть системы (1) будем называть *спектрально FD-наблюдаемой*, если для любого набора комплексных чисел  $\Lambda = \{\mu_j, \quad j = 1, \dots, n_x\}$ , в котором вместе с комплексным числом  $\mu_j$  в этот набор входит и комплексно-сопряженное число  $\bar{\mu}_j$  той же кратности, существует вещественная матрица  $K$  такая, что спектр матрицы  $A_0 - KL$  совпадает с  $\Lambda$  и, кроме того,

$$A_1(A_0 - KL)^k A_1 = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, n_x - 1. \quad (4)$$

Основная задача наблюдения для гибридной системы (1) состоит в оценивании последовательности параметров импульсной модуляции  $(t_n, \lambda_n)$ . Очевидно, что, зная последовательность  $(t_n, \lambda_n), n = 0, \dots, \infty$ , оценить вектор состояния  $x$  непрерывной части можно с помощью стандартной техники наблюдения.

Отметим, что результаты работы [6] в данном случае напрямую не применимы, даже в предположении, что линейная часть системы (1) спектрально FD-наблюдаема. Хотя линейная система с запаздыванием может быть сведена к конечномерной, для гибридной системы с запаздыванием такое сведение может быть верным только на определенных интервалах времени. Поэтому задача наблюдения за бесконечномерной системой (1) должна быть рассмотрена отдельно.

Для оценивания вектора состояния системы (1) введем следующий наблюдатель:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \tau) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= L\hat{x}(t), \quad \hat{z}(t) = C\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\hat{t}_n^+) = \hat{x}(\hat{t}_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \hat{T}_n, \quad \hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)), \quad \hat{\lambda}_n = F(\hat{z}(\hat{t}_n)). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $t \geq \hat{t}_0$  и  $n = 0, 1, \dots$ , с начальными условиями  $\hat{t}_0$  и  $\hat{x}(t) = \hat{\varphi}(t)$ ,  $\hat{t}_0 - \tau \leq t < \hat{t}_0$ , где  $\hat{\varphi}(t)$  — некоторая непрерывная на  $[\hat{t}_0 - \tau, \hat{t}_0]$  начальная вектор-функция. При  $\tau = 0$  наблюдатель (5) совпадает с наблюдателем, рассмотренным в [6].

Введем матрицу  $D_0 = A_0 - KL$ , где  $K$  — матрица обратной связи. Если линейная часть системы (1) спектрально FD-наблюдаема, матрица  $K$  может быть выбрана так, чтобы матрица  $D_0$  была гурвицевой и было выполнено условие (4).

**3. Точечное отображение и его свойства.** Построим точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя:

$$(\hat{x}(\hat{t}_n^-), \hat{t}_n) \mapsto (\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-), \hat{t}_{n+1}), \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Для любой пары целых чисел  $k$  и  $s$ ,  $0 \leq k \leq s$ , определим множество

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, t_k \leq \theta < t_{k+1}, t_s \leq \theta + \Phi(C\zeta) < t_{s+1}\}.$$

Введем следующие функции:

$$G(\theta) = \begin{cases} e^{A_0\theta}, & 0 \leq \theta \leq \tau, \\ e^{D(\theta-\tau)}e^{A_0\tau}, & \tau \leq \theta, \end{cases} \quad \tilde{G}(\theta) = \begin{cases} e^{D_0\theta}, & 0 \leq \theta \leq \tau, \\ e^{\tilde{D}(\theta-\tau)}e^{D_0\tau}, & \tau \leq \theta \end{cases}$$

и

$$\tilde{R}(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} e^{\tilde{D}\theta_2} [e^{\tilde{D}(\theta_1-\tau)}e^{D_0\tau} - e^{D_0\theta_1}], & 0 \leq \theta_1 \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq \theta_1, \end{cases}$$

где  $\tilde{D} = D_0 + A_1 e^{-D_0\tau}$ . Определим матрицу-функцию  $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$  для  $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$ , где

$$\begin{aligned} P_{k,s}(\zeta, \theta) = & e^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)}x(t_s^-) - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} \left( e^{D(\theta-t_k)}x(t_k^-) - \zeta \right) - \\ & - \lambda_k \left( e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}G(\theta-t_k) + \tilde{R}(\theta-t_k, \Phi(C\zeta)) \right) B + F(C\zeta) \tilde{G}(\Phi(C\zeta))B - \\ & - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_j)B + \lambda_s G(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s)B. \end{aligned}$$

Для краткости записи введем обозначение  $\hat{x}_n = \hat{x}(\hat{t}_n^-)$ .

**Теорема 1.** Точечное отображение (8) при  $n \geq 1$  задается уравнениями

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n). \quad (7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим ошибку оценки состояния  $r(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  на интервале  $(\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1})$  и предположим, что выполняются неравенства  $t_k \leq \hat{t}_n < t_{k+1}$ ,  $t_s \leq \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n) < t_{s+1}$  для некоторых  $k$  и  $s$  таких, что  $s \geq k$ .

Очевидно,  $r(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{r}(t) = D_0 r(t) + A_1 r(t - \tau) \quad (8)$$

во всех точках  $t$ , где функция  $r(t)$  непрерывна. Выведем точную формулу, задающую отображение (8). Введем  $m \geq 0$  такое, что  $s = k + m$ .

Для продолжения доказательства теоремы докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть  $\{\tilde{t}_n\}$  и  $\{\tilde{\lambda}_n\}$  — последовательности моментов и величин импульсации функции  $r(t)$ . Тогда функция  $r(t)$  в точках  $\tilde{t}_{n+1}^-$ ,  $n \geq 1$ , выглядит следующим образом:

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}^- - \tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n \tilde{G}(\tilde{t}_{n+1}^- - \tilde{t}_n) B + \tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{R}(\tilde{t}_n^- - \tilde{t}_{n-1}^-, \tilde{t}_{n+1}^- - \tilde{t}_n) B.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как последовательность моментов импульсации  $r(t)$  состоит из объединения моментов импульсации системы и наблюдателя, выполнено свойство

$$\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_{n-1} \geq \inf_z \Phi(z) > \tau. \quad (9)$$

Для доказательства леммы будем использовать методику, предложенную в [13]. Так как пара  $(D_0, A_1)$  является FD-приводимой, будем считать, не умаляя общности, что матрицы  $D_0$  и  $A_1$  имеют следующий блочный вид:

$$D_0 = \begin{bmatrix} U & 0 \\ W & V \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{W} & 0 \end{bmatrix},$$

и для  $\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}$  уравнение (7) выглядит следующим образом:

$$\dot{u}(t) = Uu(t), \quad \dot{v}(t) = Wu(t) + Vv(t) + \bar{W}u(t - \tau), \quad (10)$$

где  $r^T = [u^T, v^T]$ . Пусть имеем  $B^T = [B_1^T, B_2^T]$ , где размеры  $B_1$  и  $B_2$  соответствуют размерам  $u$  и  $v$ . Тогда справедливы равенства

$$u(\tilde{t}_n^+) = u(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n B_1, \quad v(\tilde{t}_n^+) = v(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n B_2. \quad (11)$$

Из первого уравнения (10) получаем

$$u(t) = \begin{cases} e^{U(t-\tilde{t}_n)} u(\tilde{t}_n^-), & \tilde{t}_{n-1} < t < \tilde{t}_n, \\ e^{U(t-\tilde{t}_n)} u(\tilde{t}_n^+), & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases} \quad (12)$$

Следуя [13], перепишем (7) в виде

$$\dot{r}(t) = \tilde{D}r(t) - (\tilde{D} - D_0) [r(t) - e^{D_0\tau} r(t - \tau)]. \quad (13)$$

Так как имеем равенство

$$\tilde{D} - D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{W}e^{-U\tau} & 0 \end{bmatrix},$$

выражение (7) эквивалентно соотношению

$$\dot{r}(t) = \tilde{D}r(t) - (\tilde{D} - D_0)\eta(t), \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} u_d(t) \\ * \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $u_d(t) = u(t) - e^{U\tau} u(t - \tau)$ , а «\*» может быть заменена на любой вектор подходящей размерности.

Далее рассмотрим четыре возможных случая.

1) Пусть выполняются неравенства  $\tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n+1} < \tilde{t}_n + \tau$ . Возьмем произвольное число  $t$  из интервала  $\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}$ . Тогда будем иметь  $\tilde{t}_{n-1} < t - \tau < \tilde{t}_n$ . Из (12) следует

$$u(t) = e^{U(t-\tilde{t}_n)} u(\tilde{t}_n^+), \quad u(t - \tau) = e^{U(t-\tau-\tilde{t}_n)} u(\tilde{t}_n^-). \quad (15)$$

Отсюда получаем

$$u_d(t) = e^{U(t-\tilde{t}_n)} [u(\tilde{t}_n^+) - u(\tilde{t}_n^-)] = \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1.$$

За счет подходящего выбора «\*» в (14) можно положить  $\eta(t) = \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B$ . Очевидно, что  $\dot{\eta} = D_0\eta$  и разность  $r_d(t) = r(t) - \eta(t)$  удовлетворяет однородному линейному уравнению  $\dot{r}_d = \tilde{D}r_d(t)$  при  $\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}$ . Тогда будем иметь

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = \eta(\tilde{t}_{n+1}^-) + e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} [r(\tilde{t}_n^+) - \eta(\tilde{t}_n^+)].$$

Учитывая равенства

$$r(\tilde{t}_n^+) - \eta(\tilde{t}_n^+) = r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n B - \tilde{\lambda}_n B = r(\tilde{t}_n^-), \quad \eta(\tilde{t}_{n+1}^-) = \tilde{\lambda}_n e^{D_0(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} B,$$

получаем  $r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{D_0(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} B$ .

2) Пусть имеются неравенства  $\tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_n < \tilde{t}_n + \tau < \tilde{t}_{n+1}$ . Тогда из (12) получим

$$u_d(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{U(t - \tilde{t}_n)} B_1, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Поэтому в (14) можно выбрать

$$\eta(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t - \tilde{t}_n)} B, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Рассуждая как в случае 1, получаем  $r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B$ .

3) Пусть выполняются неравенства  $\tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_{n+1} < \tilde{t}_n + \tau$ . Тогда будем иметь

$$u_d(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{U(t - \tilde{t}_n)} B_1 + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{U(t - \tilde{t}_{n-1})} B_1, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{U(t - \tilde{t}_n)} B_1, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}, \end{cases}$$

и в (14) можно выбрать

$$\eta(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t - \tilde{t}_n)} B + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{D_0(t - \tilde{t}_{n-1})} B, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t - \tilde{t}_n)} B, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{D_0(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} B - \\ - \tilde{\lambda}_{n-1} e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} \left( e^{D_0(\tilde{t}_n - \tilde{t}_{n-1})} - e^{\tilde{D}(\tilde{t}_n - \tilde{t}_{n-1} - \tau)} e^{D_0 \tau} \right) B.$$

4) Пусть имеем  $\tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_n + \tau < \tilde{t}_{n+1}$ . Тогда справедливо равенство

$$u_d(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{U(t - \tilde{t}_n)} B_1 + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{U(t - \tilde{t}_{n-1})} B_1, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{U(t - \tilde{t}_n)} B_1, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}, \end{cases}$$

и в (14) можно выбрать

$$\eta(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t - \tilde{t}_n)} B + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{D_0(t - \tilde{t}_{n-1})} B, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t - \tilde{t}_n)} B, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Следовательно, в случае 4 получаем

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B - \\ - \tilde{\lambda}_{n-1} e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n)} \left( e^{D_0(\tilde{t}_n - \tilde{t}_{n-1})} - e^{\tilde{D}(\tilde{t}_n - \tilde{t}_{n-1} - \tau)} e^{D_0 \tau} \right) B.$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Для  $m \geq 1$  на интервале  $\hat{t}_n < t < \hat{t}_{n+1}$  функция  $r(t)$  претерпевает скачки  $r(t^+) - r(t^-) = \lambda_i B$  в точках  $t = t_i$ ,  $k+1 \leq i \leq s$ . Предположение  $\inf_z \Phi(z) > \tau$  гарантирует, что  $\hat{t}_n + \tau < t_{k+2}$ , в то время как точка  $t_{k+1}$  может находиться как в интервале  $(\hat{t}_n, \hat{t}_n + \tau)$ , так и в интервале  $(\hat{t}_n + \tau, \hat{t}_{n+1})$ , поэтому нужно учитывать оба эти случая.

Рассмотрим сначала случай  $m \geq 2$ , т.е.  $s \geq k+2$ . Очевидно равенство  $\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = x(\hat{t}_{n+1}^-) - r(\hat{t}_{n+1}^-)$ . Заметим, что выполняется  $\tilde{R}(t_s - t_{s-1}, \hat{t}_{n+1} - t_s) = 0$ , так как справедливо неравенство  $t_s - t_{s-1} \geq \inf_z \Phi(z) > \tau$ . Тогда из теоремы 2 [10] и леммы 2 следует

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^-) + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - t_s)} r(t_s^-) - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s). \quad (16)$$

Найдем  $r(t_s^-)$ .

Применяя лемму 2 на интервале  $\hat{t}_n < t < t_{k+1}$ , получаем

$$r(t_{k+1}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+1} - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) - \hat{\lambda}_n \tilde{G}(t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \lambda_k \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B.$$

Заметим, что если  $t_k < \hat{t}_{n-1}$ , то предыдущая формула верна, так как верно неравенство  $\hat{t}_n - t_k > \hat{t}_n - \hat{t}_{n-1} \geq \inf_z \Phi(z) > \tau$ , а значит, верно  $\tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) = 0$ .

Из леммы 2 на интервале  $t_{k+1} < t < t_{k+2}$  следует

$$r(t_{k+2}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+2} - t_{k+1})} r(t_{k+1}^-) + \lambda_{k+1} \tilde{G}(t_{k+2} - t_{k+1}) B - \hat{\lambda}_n \tilde{R}(t_{k+1} - \hat{t}_n, t_{k+2} - t_{k+1}) B.$$

Подставляя полученное ранее значение  $r(t_{k+1}^-)$  и учитывая равенство

$$e^{\tilde{D}(t_{k+2} - t_{k+1})} \tilde{G}(t_{k+1} - \hat{t}_n) + \tilde{R}(t_{k+1} - \hat{t}_n, t_{k+2} - t_{k+1}) = e^{\tilde{D}(t_{k+2} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau},$$

получаем

$$r(t_{k+2}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+2} - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_{k+2} - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \\ + \lambda_{k+1} \tilde{G}(t_{k+2} - t_{k+1}) B - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_{k+2} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B.$$

Если  $m \geq 3$ , то лемма 2 на интервале  $t_{k+2} < t < t_{k+3}$  дает

$$r(t_{k+3}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+2})} r(t_{k+2}^-) + \lambda_{k+2} \tilde{G}(t_{k+3} - t_{k+2}) B + \lambda_{k+1} \tilde{R}(t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+3} - t_{k+2}) B.$$

Так как верно неравенство  $t_{k+2} - t_{k+1} > \inf_z \Phi(z) > \tau$ , выполняется  $\tilde{R}(t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+3} - t_{k+2}) = 0$ . Следовательно, верно неравенство  $r(t_{k+3}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+2})} r(t_{k+2}^-) + \lambda_{k+2} \tilde{G}(t_{k+3} - t_{k+2}) B$ . Подставляя полученное ранее значение  $r(t_{k+2}^-)$ , получаем

$$r(t_{k+3}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+3} - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \\ + \lambda_{k+1} e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+2})} \tilde{G}(t_{k+2} - t_{k+1}) B + \lambda_{k+2} \tilde{G}(t_{k+3} - t_{k+2}) B - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_{k+3} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B.$$

Продолжая цепочку аналогичных рассуждений, получим

$$r(t_s^-) = e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_s - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B - \\ - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B + \sum_{j=k+1}^{s-1} \lambda_j e^{\tilde{D}(t_s - t_{j+1})} \tilde{G}(t_{j+1} - t_j) B.$$

Заметим, что справедливо равенство  $\tilde{G}(t_{j+1} - t_j) = e^{\tilde{D}(t_{j+1} - t_j - \tau)} e^{D_0 \tau}$ , так как  $t_{j+1} - t_j > \tau$ . Таким образом, будем иметь

$$r(t_s^-) = e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_s - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B - \\ - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B + r_{k,s}, \quad (17)$$

где  $r_{k,s} = \sum_{j=k+1}^{s-1} \lambda_j e^{\tilde{D}(t_s - t_j - \tau)} e^{D_0 \tau} B$ .

Учитывая  $x(\hat{t}_n^-) = e^{D(\hat{t}_n - t_k)} x(t_k^-) + \lambda_k G(\hat{t}_n - t_k) B$ , получаем

$$r(\hat{t}_n^-) = x(\hat{t}_n^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) = e^{D(\hat{t}_n - t_k)} x(t_k^-) + \lambda_k G(\hat{t}_n - t_k) B - \hat{x}(\hat{t}_n^-). \quad (18)$$

В итоге, подставляя (18) в (17), а (17) в (16), будем иметь

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)} e^{D(\hat{t}_n - t_k)} x(t_k^-) + e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)} \hat{x}(\hat{t}_n^-) - \\ - \lambda_k e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)} G_k(\hat{t}_n - t_k) B - \lambda_k e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \\ + \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B - r_{k,s} + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s) B.$$

Заметим, что справедливы равенства  $e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) = \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n)$  и  $r_{k,s} = \sum_{j=k+1}^{s-1} \lambda_j \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_j) B$ , т. к.  $\hat{t}_m - t_j > \tau$  при всех  $j = k+1, \dots, s-1$ . Таким образом, имеем

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)} \left( e^{D(\hat{t}_n - t_k)} x(t_k^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) \right) - \\ - \lambda_k \left( e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)} G(\hat{t}_n - t_k) + \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) \right) B + \\ + \hat{\lambda}_n \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) B - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_j) B + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B, \quad (19)$$

откуда следует утверждение (7) в случае  $m \geq 2$ .

Убедимся, что при  $m = 0$  и  $m = 1$  формула (19) также будет верна.

Пусть  $m = 1$ . Тогда справедливо равенство

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = x(\hat{t}_{n+1}^-) - r(\hat{t}_{n+1}^-) = \\ = e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^-) + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - t_s)} r(t_s^-) - \\ - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s) B + \hat{\lambda}_n \tilde{R}(t_s - \hat{t}_n, \hat{t}_{n+1} - t_s) B.$$

Найдем  $r(t_s^-)$ :

$$r(t_s^-) = e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n)} e^{D(\hat{t}_n - t_k)} x(t_k^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n)} G(\hat{t}_n - t_k) B - \\ - e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n)} \hat{x}(\hat{t}_n^-) - \hat{\lambda}_n \tilde{G}(t_s - \hat{t}_n) B + \lambda_k \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_s - \hat{t}_n) B.$$

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) &= e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_s)} x(t_s^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)} \left( e^{D(\hat{t}_n-t_k)} x(t_k^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) \right) - \\ &\quad - \lambda_k \left( e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)} G(\hat{t}_n - t_k) + \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) \right) B + \hat{\lambda}_n \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) B + \\ &\quad + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s) B, \end{aligned}$$

что совпадает с (19) при  $s = k + 1$ .

Пусть  $m = 0$ , т. е.  $s = k$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) &= e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_k)} x(t_k^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)} \left( e^{D(\hat{t}_n-t_k)} x(t_k^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) \right) + \lambda_k G(\hat{t}_{n+1} - t_k) B - \\ &\quad - \lambda_k \left( e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)} G(\hat{t}_n - t_k) + \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) \right) B + \hat{\lambda}_n \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) B, \end{aligned}$$

что совпадает с (19) при  $s = k$ . □

**Теорема 2.** Точечное отображение  $P(\zeta, \theta)$  непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как имеется равенство

$$\begin{aligned} x(t_k^-) &= e^{D(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}^-) + \lambda_{k-1} G(t_k - t_{k-1}) B = \\ &= e^{D(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}^-) + \lambda_{k-1} e^{D(t_k-t_{k-1}-\tau)} e^{A_0\tau} B, \end{aligned}$$

несложно получить соотношения

$$\begin{aligned} P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k-1,s}(\zeta, \theta) &= \\ &= \lambda_k \left[ -e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} G(\theta - t_k) - \tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta)) + \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_k) \right] B, \quad (20) \end{aligned}$$

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k,s-1}(\zeta, \theta) = \lambda_s \left[ G(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s) - \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s) \right] B \quad (21)$$

для  $k \geq 1, s \geq 1$ .

Так как функции  $G(\theta)$ ,  $\tilde{G}(\theta)$ ,  $\tilde{R}(\theta, \zeta)$  непрерывны для всех  $\theta \geq 0$ , функция  $P(\zeta, \theta)$  может иметь разрывы только на поверхностях  $(\zeta, \theta)$ , где имеем либо  $\theta = t_k$ , либо  $\theta + \Phi(C\zeta) = t_s$  для некоторых  $k, s$ .

Тем не менее из (20), (21) и равенств  $G(0) = I$ ,  $\tilde{R}(0, \Phi(C\zeta)) = e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)} e^{D_0\tau} - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}$ ,  $\tilde{G}(\Phi(C\zeta)) = e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)} e^{D_0\tau}$ ,  $G(0) - \tilde{G}(0) = 0$  следуют соотношения

$$P_{k,s} - P_{k-1,s} \Big|_{\theta=t_k} = 0, \quad P_{k,s} - P_{k,s-1} \Big|_{\theta+\Phi(C\zeta)=t_s} = 0,$$

и функция  $P$  непрерывна. □

**Замечание.** Используя соотношения (20), (21), можно показать, что если функции  $\Phi(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$  непрерывно дифференцируемы, то функция  $P(\cdot, \cdot)$  также непрерывно дифференцируема.

Введем дополнительные обозначения, относящиеся к отображению (8). Определим функцию

$$Q_{k,s}(q) = \begin{bmatrix} P_{k,s}(\zeta, \theta) \\ \theta + \Phi(C\zeta) \end{bmatrix}, \quad \text{где } q = \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Определим  $Q(q) = Q_{k,s}(q)$  для  $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$ . Тогда будем иметь  $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$ , где

$$\hat{q}_n = \begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{t}_n \end{bmatrix}, \quad Q(q) = \begin{bmatrix} P(\zeta, \theta) \\ \theta + \Phi(C\zeta) \end{bmatrix}.$$

Так как  $Q(\cdot)$  непрерывно дифференцируема, можно выписать ее матрицу Якоби:

$$Q'(q) = \begin{bmatrix} P'_\zeta(\zeta, \theta) & P'_\theta(\zeta, \theta) \\ \Phi'(C\zeta)C & 1 \end{bmatrix}.$$

Под  $m$ -й итерацией оператора  $Q$  будем понимать суперпозицию операторов  $Q^{(m)}(q) = Q(Q(\dots(Q(q))\dots))$ . При этом матрица Якоби  $Q^{(m)}(q)$  вычисляется следующим обра-

зом:  $(Q^{(m)})'(q) = Q'(Q^{(m-1)}(q)) Q'(Q^{(m-2)}(q)) \times \dots \times Q'(Q(q)) Q'(q)$ .

**4. Устойчивость синхронного режима.** Зафиксируем некоторое решение  $(x(t), t_n)$  исходной системы (1). Решение  $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$  уравнения наблюдателя (5), совпадающее при всех  $n, t$  с  $(x(t), t_n)$ , будем называть *синхронным режимом наблюдателя относительно*  $(x(t), t_n)$ .

Синхронный режим относительно  $(x(t), t_n)$  будем называть *асимптотически устойчивым в малом*, если при достаточно малых отклонениях начальных условий уравнений системы и наблюдателя  $|t_0 - \hat{t}_0|, \sup_{t \in \Omega} \|\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)\|$ , где  $\Omega$  — пересечение отрезков  $[t_0 - \tau, t_0]$  и  $[\hat{t}_0 - \tau, \hat{t}_0]$ ,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма, выполняется  $\hat{t}_n - t_n \rightarrow 0$  и  $\|\hat{x}_n - x_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что влечет также выполнение  $\hat{\lambda}_n - \lambda_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, для синхронного режима выполнено  $\hat{x}_{n+1} = P_{n,n+1}(\hat{x}_n, \hat{t}_n)$  для всех  $n \geq 1$ . Для случая  $n = 0$  несложно показать, что при малых начальных отклонениях  $|t_0 - \hat{t}_0|, \sup_{t \in \Omega} \|\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)\|$  отклонения  $|t_1 - \hat{t}_1|, \|\hat{x}_1 - x_1\|$  также малы. Обозначим для краткости  $\Phi'_k = \Phi'(Cx_k)$ ,  $F'_k = F'(Cx_k)$ . Синхронный режим по отношению к  $x(t)$  характеризуется векторной последовательностью  $\hat{q}_n^0 = \begin{bmatrix} x_n \\ t_n \end{bmatrix}$ . Тогда будем иметь  $Q(\hat{q}_n^0) = Q_{n,n+1}(\hat{q}_n^0)$ . Для всех  $k \geq 0$  введем матрицу  $J_k$  с блоками

$$(J_k)_{11} = \Phi'_k D x_{k+1} C + e^{\tilde{D}_K T_k} \left( I_{n_x} + F'_k e^{-\tilde{D}_K \tau} e^{D_K \tau} B C \right),$$

$$(J_k)_{12} = D x_{k+1} - e^{\tilde{D}_K T_k} \left( D x_k + \lambda_k \tilde{D}_K e^{-\tilde{D}_K \tau} e^{D_K \tau} B \right),$$

$$(J_k)_{21} = \Phi'_k C, \quad (J_k)_{22} = 1.$$

В результате [14] для любого  $n \geq 0$  якобиан  $Q(\cdot)$  в точке  $\hat{q}_n^0$  вычисляется по формуле

$$Q'(\hat{q}_n^0) = J_n.$$

Пусть  $(x(t), t_n)$  — периодическое решение системы (1) с  $m$  импульсами на периоде, где  $m$  некоторое целое число,  $m \geq 1$ . Траектории такого решения называются *m-циклами*. Тогда выполняются равенства  $x_{n+m} \equiv x_n, \lambda_{n+m} \equiv \lambda_n, T_{n+m} \equiv T_n$ . Рассмотрим синхронный режим наблюдателя по отношению к  $(x(t), t_n)$ . Легко видеть, что для периодического решения дискретное уравнение (7) справедливо не только при  $n \geq 1$ , но и при  $n = 0$ . Так как в данном случае выполнено равенство  $J_{n+m} \equiv J_n$ , последовательность  $\{J_n\}_{n=0}^\infty$  содержит не более чем  $m$  различных матриц, а именно  $J_0, \dots, J_{m-1}$ .

**Теорема 3.** Пусть матричное произведение  $J_{m-1} \dots J_0$  устойчиво по Шуру, т. е. все собственные значения этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим по отношению к  $(x(t), t_n)$  асимптотически устойчив в малом.

Доказательство в основном следует доказательству теоремы в [6].

**5. Численный пример. Система гормональной регуляции тестостерона.**

В мужском организме в процессе регуляции уровня тестостерона основную роль играют два гормона: лютеинизирующий гормон и гонадотропин релизинг гормон, которые генерируются в отделах головного мозга. По этическим соображениям уровень последнего не поддается непосредственному измерению. В связи с этим возникает задача оценивания текущего уровня гонадотропин релизинг гормона по доступным измерениям уровней остальных гормонов. Уровни гормонов связаны друг с другом внутренними обратными связями, и такая модель может быть описана системой (1) третьего порядка со следующими параметрами:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ g_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Несложно проверить, что данная система является спектрально FD-наблюдаемой. Рассмотрим систему со следующими значениями параметров:  $h = 2.7$ ,  $b_1 = 0.02$ ,  $b_2 = 0.15$ ,  $b_3 = 0.1$ ,  $g_1 = 0.6$ ,  $g_2 = 1.5$  и  $\Phi(z) = 40 + 80 \frac{(z/h)^2}{1+(z/h)^2}$ ,  $F(z) = 0.05 + \frac{5}{1+(z/h)^2}$ . Так как  $\inf_z \Phi(z) = 40$ , то выполняется  $0 \leq \tau < 40$ . Выберем матрицу обратной связи в виде  $K = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}^T$ . Тогда матрица  $D_K$  устойчива по Гурвицу, условие (4) выполнено, и синхронный режим асимптотически устойчив в малом при всех рассматриваемых  $\tau$ .

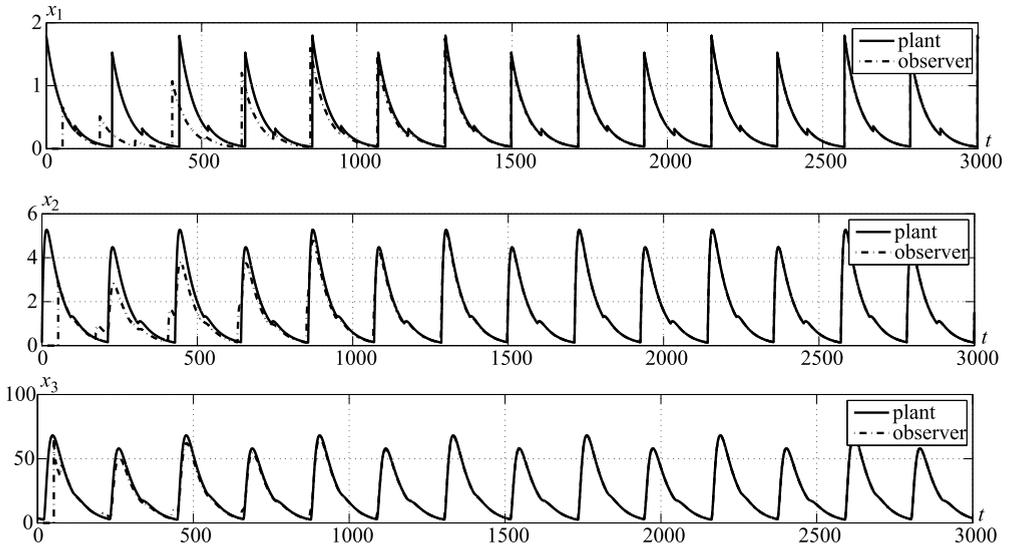


Рис. 1. Траектории системы и наблюдателя при  $\tau = 20$  (4-цикл).

Рассмотрим систему при  $\tau = 20$ , при котором она имеет устойчивый 4-цикл. Траектории системы и наблюдателя изображены на рис. 1.

Рис. 2 иллюстрирует сравнение моментов и величин импульсации системы и наблюдателя.

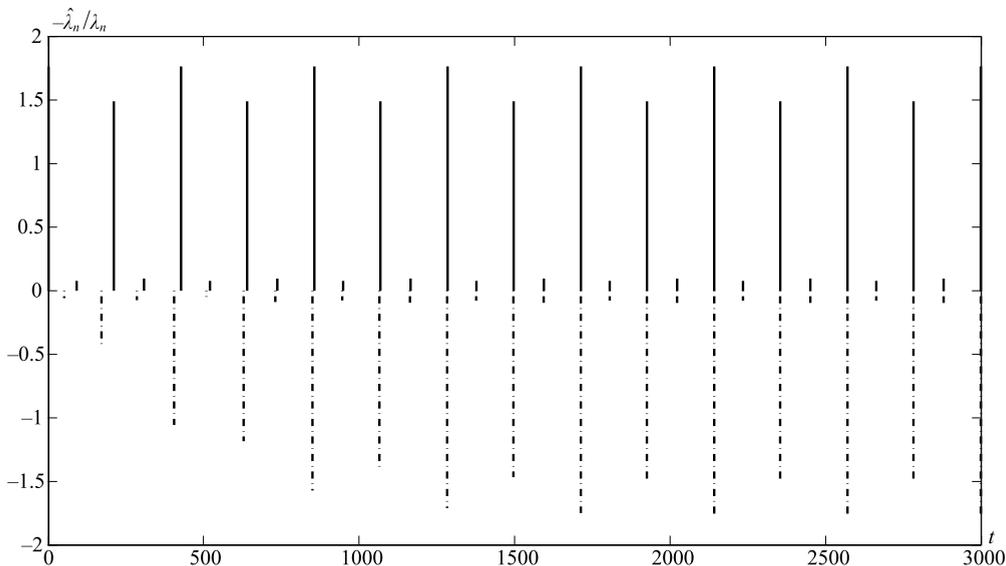


Рис. 2. Сравнение моментов и величин импульсации системы и наблюдателя: штрихпунктирные линии обозначают моменты импульсации наблюдателя  $\hat{t}_n$  с весами  $-\hat{\lambda}_n$ ; сплошные линии соответствуют импульсной модуляции системы с моментами импульсации  $t_n$  с весами  $\lambda_n$ .

Пунктирные вертикальные линии высотой  $-\hat{\lambda}_n$ , расположенные в точках  $\hat{t}_n$ , соответствуют импульсной модуляции наблюдателя. Импульсная модуляция системы характеризуется сплошными линиями длин  $\lambda_n$ , расположенными в  $t_n$  (с  $t_0 = 0$ ). Из рис. 1 и 2 видно, что моменты и величины импульсации системы и наблюдателя синхронизируются.

**6. Заключение.** Предложена схема наблюдателя состояний спектрально FD-наблюдаемой импульсной системы с запаздыванием, которая позволяет оценить параметры импульсов, недоступные для непосредственного измерения, на основе наблюдения непрерывных состояний системы. Для уравнения наблюдателя построено отображение Пуанкаре, полностью описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу. Путем линеаризации полученного преобразования в окрестности периодического режима выведены условия локальной устойчивости синхронного режима. Работоспособность данной схемы наблюдения продемонстрирована на примере задачи наблюдения в системе гормональной регуляции тестостерона.

## Литература

1. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989.
2. Mailleret L., Lemesle V. A note on semi-discrete modeling in the life sciences // Phil. Trans. R. Soc. A. 2009. Vol. 367, N 1908. P. 4779–4799.
3. Walker J. J., Terry J. R., Tsaneva-Atanasova K. et al. Encoding and decoding mechanisms of pulsatile hormone secretion // J. Neuroendocrinol. 2009. Vol. 22, N 12. P. 1226–1238.

4. Farhy L. S. Modeling of oscillations in endocrine networks with feedback // *Methods in Enzymology*. 2004. Vol. 384. P. 54–81.
5. Cox N., Marconi L., Teel A. High-gain observers and linear output regulation for hybrid exosystems // *Intern. J. Robust Nonlin. Control*. 2014. Vol. 24, N 6. P. 1043–1063.
6. Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A. A state observer for continuous oscillating systems under intrinsic pulse-modulated feedback // *Automatica*. 2012. Vol. 45, N 6. P. 1117–1122.
7. Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G. *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006.
8. Cartwright M., Husain M. A Model for the control of testosterone secretion // *J. Theor. Biol.* 1986. Vol. 123. P. 239–250.
9. Das P., Roy A. B., Das A. Stability and oscillations of a negative feedback delay model for the control of testosterone secretion // *BioSystems*. 1994. Vol. 32, N 1. P. 61–69.
10. Churilov A., Medvedev A., Mattsson P. Periodical solutions in a pulse-modulated model of endocrine regulation with time-delay // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2014. Vol. 59, N 3. P. 728–733.
11. Salamon D. On controllability and observability of time delay systems // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1984. Vol. 29, N 5. P. 432–439.
12. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems // *Kybernetika*. 2001. Vol. 74, N 4. P. 427–458.
13. Churilov A. N., Medvedev A. An impulse-to-impulse discrete-time mapping for a time-delay impulsive system // *Automatica*. 2014. Vol. 50, N 8. P. 2187–2190.
14. Yamalova D. R., Churilov A. N., Medvedev A. Hybrid state observer for time-delay systems under intrinsic impulsive feedback // *Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014)*, Groningen, Netherlands. 2014. P. 977–984.

Статья поступила в редакцию 4 марта 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторе

Ямалова Диана Рамилевна — аспирант; yam-diana@mail.ru

## POINCARÉ MAPPING FOR A TIME-DELAY IMPULSIVE OBSERVER

*Diana R. Yamalova*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; yam-diana@mail.ru

This note deals with a hybrid static gain observer for a linear time-invariant continuous plant under an intrinsic pulse-modulated feedback. The pulse parameters representing the discrete state of the hybrid system are not available for direct measurement and has to be estimated through continuous measurements. It poses an unusual observation problem. A considerable number of papers is devoted to the observability of hybrid systems, where the discrete states of a system are usually assumed known, while observers for hybrid systems that are able to reconstruct discrete states from only continuous measurements are not so well covered in the literature. With the time delay taken into account, the pulse-modulated model acquires an infinite-dimensional continuous part. The closed-loop dynamics become therefore both hybrid and infinite-dimensional, and this combination is mathematically challenging and so far rarely treated. However, the cascade structure of the continuous part, together with the impulsive feedback, allow the application of the concept of finite-dimensional reducibility (FD-reducibility), in particular the fact, that the dynamics of an impulsive time-delay system with an FD-reducible continuous part coincide on certain time intervals with the dynamics of a delay-free impulsive system. This idea plays a key role in the present study. Nevertheless the observer proposed here explicitly involve a delay and based on the infinite-dimensional original plant model, on the one hand it complicates the study of its properties, but on the other allows observation of the system for the entire time interval.

An pointwise discrete mapping (known in the hybrid systems theory as Poincaré mapping), describing the observer dynamics is derived, constituting the contribution of the paper. With the use of this pointwise mapping the mathematical modeling of the system can be performed and obtained the observer stability conditions for synchronous mode with respect to the periodic solution of the system. Refs 14. Figs 2.

*Keywords:* time-delay systems, impulsive systems, state observer.

## References

1. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S., *Theory of Impulsive Differential Equations* (World Scientific, Singapore, 1989).
2. Mailleret L., Lemesle V., “A note on semi-discrete modeling in the life sciences”, *Phil. Trans. R. Soc. A* **367**(1908), 4779–4799 (2009).
3. Walker J. J., Terry J. R., Tsaneva-Atanasova K. et al., “Encoding and decoding mechanisms of pulsatile hormone secretion”, *J. Neuroendocrinology* **22**(12), 1226–1238 (2009).
4. Farhy L. S., “Modeling of oscillations in endocrine networks with feedback”, *Methods in Enzymology* **384**, 54–81 (2004).
5. Cox N., Marconi L., Teel A., “High-gain observers and linear output regulation for hybrid exosystems”, *Intern. J. Robust Nonlin. Control* **24**(6), 1043–1063 (2014).
6. Churilov A., Medvedev A., Shepeljavi A., “A state observer for continuous oscillating systems under intrinsic pulse-modulated feedback”, *Automatica* **45**(6), 1117–1122 (2012).
7. Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G., *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control* (Princeton Univ. Press, Princeton, 2006).
8. Cartwright M., Husain M., “A Model for the control of testosterone secretion”, *J. Theor. Biol.* **123**, 239–250 (1986).
9. Das P., Roy A. B., Das A., “Stability and oscillations of a negative feedback delay model for the control of testosterone secretion”, *BioSystems* **32**(1), 61–69 (1994).
10. Churilov A., Medvedev A., Mattsson P., “Periodical solutions in a pulse-modulated model of endocrine regulation with time-delay”, *IEEE Trans. Automat. Control* **59**(3), 728–733 (2014).
11. Salamon D., “On controllability and observability of time delay systems”, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **29**(5), 432–439 (1984).
12. Senane O., “New trends in design of observers for time-delay systems”, *Kybernetika* **74**(4), 427–458 (2001).
13. Churilov A. N., Medvedev A., “An impulse-to-impulse discrete-time mapping for a time-delay impulsive system”, *Automatica* **50**(8), 2187–2190 (2014).
14. Yamalova D. R., Churilov A. N., Medvedev A., “Hybrid state observer for time-delay systems under intrinsic impulsive feedback”, *Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014)*, 977–984 (Groningen, Netherlands, 2014).

**Для цитирования:** Ямалова Д. Р. Преобразование Пуанкаре для уравнения наблюдателя состояния импульсной системы с запаздыванием // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 64–77. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.109

**For citation:** Yamalova D. R. Poincare mapping for a time-delay impulsive observer. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4(62), issue 1, pp. 64–77. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.109