

ЗАТУХАЮЩИЕ СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ СО СТРУКТУРНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Ву Тронг Люонг, Нгуен Тан Тунг

Университет Тай Бак,
Вьетнам, Шохла, Чу Ван Ан, 01

В данной работе рассматривается класс упругих систем со структурным демпфирующим элементом при нелокальных условиях. Используя подходящую меру некомпактности пространства непрерывных функций на луче, удалось доказать существование слабого решения с точной скоростью затухания экспоненциального типа. Для иллюстрации результатов приведен пример. Библиогр. 15 назв.

Ключевые слова: затухающие решения, упругая система со структурным затуханием, нелокальные условия.

1. Введение. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Рассмотрим следующую нелокальную задачу Коши для упругих систем со структурным демпфированием:

$$u_{tt}(t) + \rho \mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2 u(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(0) + g(u) = x_0, \quad u_t(0) + h(u) = y_0, \quad (1.2)$$

где $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ — замкнутый линейный оператор, $\rho \geq 2$ — заданная константа, $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $y_0 \in X$ и g, h, f — заданные функции, которые будут описаны в разделе 3 настоящей статьи.

Упругие системы со структурным демпфированием были изучены Ченом и Расселом [1] в 1981 году. Они рассматривали упругую систему

$$u_{tt}(t) + \mathcal{B}u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0, \quad (1.4)$$

в гильбертовом пространстве \mathbb{H} , где \mathcal{A} (упругий оператор) и \mathcal{B} (оператор демпфирования) — неограниченные положительно определенные самосопряженные операторы в \mathbb{H} . При удовлетворении некоторых дополнительных условий они доказали, что

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^{1/2} \\ -\mathcal{A}^{1/2} & -\mathcal{B} \end{pmatrix}$$

образует аналитическую полугруппу на $\mathbb{W} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Хуанг [2] рассматривал задачу, описанную выше, и в 1986 г. предположил, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Тогда из следующих условий следует, что $L_{\mathcal{B}}$ образует аналитическую подгруппу на \mathbb{W} :

(а) $\rho_1(\mathcal{A}^{1/2}x, x) \leq (\mathcal{B}x, x) \leq \rho_2(\mathcal{A}^{1/2}x, x)$ для всех $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$;

(б) $\rho_1(\mathcal{A}x, x) \leq (\mathcal{B}^2x, x) \leq \rho_2(\mathcal{A}x, x)$ для всех $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, для некоторых $\rho_1, \rho_2 > 0$ при $\rho_1 \leq \rho_2$.

В 1988 г. Хуанг [3] исследовал задачу (1.3)–(1.4) для оператора демпфирования \mathcal{B} , а оператор упругости \mathcal{A} был заменен оператором \mathcal{A}^α ($1/2 \leq \alpha \leq 1$). Фан, Ли и Чен [4] рассматривали существование слабого решения для упругих систем со структурным демпфированием в банаховых пространствах:

$$u_{tt}(t) + \rho \mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2 u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < t < a, \quad (1.5)$$

$$u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0, \quad (1.6)$$

где коэффициент затухания удовлетворяет неравенству $\rho \geq 2$ и нелинейность f — условию Липшица по второй переменной. Аналитичность и экспоненциальная устойчивость полугруппы, образованной упругой системой

$$u_{tt}(t) + \rho \mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2 u(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

$$u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0, \quad (1.8)$$

где $\rho > 2 \cos \alpha$, были получены в [5] для фиксированного значения $\alpha \in (0, \pi/2)$. В [6] описано асимптотическое поведение решений линейных упругих систем со структурным демпфированием

$$u_{tt}(t) + \rho \mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2 u(t) = h(t), \quad t > 0, \quad (1.9)$$

$$u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0, \quad (1.10)$$

и полулинейной упругой системы со структурным демпфированием

$$u_{tt}(t) + \rho \mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2 u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < t < a, \quad (1.11)$$

$$u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0, \quad (1.12)$$

в банаховых пространствах, где $\rho > 2 \cos \alpha$ для фиксированного значения $\alpha \in (0, \pi/2)$, \mathcal{A} — секториальный оператор, $-\mathcal{A}$ образует аналитическую и экспоненциально устойчивую полугруппу на X , $h: [0, +\infty) \rightarrow X$ непрерывна, и f непрерывная и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной. И хотя задача (1.1)–(1.2) довольно интересная, не было предпринято попыток найти ее затухающие решения с точной скоростью затухания. Это явилось предпосылкой для нашего исследования.

Следуя работе [6], рассмотрим упругую систему со структурным демпфированием в нелокальных условиях. Впервые идея нелокальных условий была использована в [7]. Это условие более подходящее, чем классическое, для описания естественных процессов, так как оно позволяет рассматривать также дополнительную информацию (см. [8, 9]). Целью данной работы является использование принципа неподвижной точки для сжимающих отображений в качестве меры некомпактности [10], чтобы доказать существование затухающих слабых решений u с $\|u(t)\| = O(e^{-\gamma t})$ при $t \rightarrow \infty$.

Дальнейшая часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 напомним некоторые понятия и сведения относительно мер некомпактности и сжимающего отображения, которые будут использованы для доказательства существования слабых решений на $[0, T]$, $T > 0$, в разделе 3 и существования слабых решений на \mathbb{R}^+ в разделе 4. В последнем разделе представлен пример для иллюстрации полученных результатов.

2. Предварительные сведения. Пусть E — банахово пространство. Положим, что $\mathcal{P}_b(E)$ — набор всех непустых ограниченных подмножеств E .

Определение 2.1. Функция $\Phi : \mathcal{P}_b(E) \rightarrow [0, +\infty)$ называется *мерой некомпактности* (МНК) в E , если выполняется равенство

$$\Phi(\overline{co}\Omega) = \Phi(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathcal{P}_b(E),$$

где $\overline{co}\Omega$ — замыкание выпуклой оболочки Ω . МНК Φ в E называется

- (i) *монотонной*, если из того, что $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E), \Omega_1 \subset \Omega_2$, следует $\Phi(\Omega_1) \leq \Phi(\Omega_2)$,
- (ii) *невырожденной*, если $\Phi(\{a\} \cup \Omega) = \Phi(\Omega)$ для $\forall a \in E, \forall \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;
- (iii) *инвариантной* относительно объединения с компактным множеством, если $\Phi(K \cup \Omega) = \Phi(\Omega)$ для каждого относительно компактного $K \subset E$ и $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;
- (iv) *алгебраически полуаддитивной*, если $\Phi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \Phi(\Omega_1) + \Phi(\Omega_2)$ для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E)$;
- (v) *регулярной*, если $\Phi(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности Ω .

Важным примером МНК является МНК Хаусдорфа $\chi(\cdot)$, которая определяется следующим образом:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\} \quad (2.1)$$

для $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$.

Утверждение 2.2. Пусть χ — МНК Хаусдорфа на банаховом пространстве $E, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ такая, что выполняется неравенство

$$\chi(\Omega) \leq 2\chi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) + \varepsilon. \quad (2.2)$$

Пусть $C([0, T]; X)$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на интервале $[0, T]$ со значениями в X — банаховом пространстве с нормой $\|u\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$. Известно, что если $X = \mathbb{R}^n$, то МНК Хаусдорфа на $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ задается в виде (см. [11, пример 2.11])

$$\chi_T(D) = \frac{1}{2} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in D} \max_{t, s \in [0, T], |t-s| < \delta} \|u(t) - u(s)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad D \subset C([0, T], \mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

Последнюю меру можно рассматривать как свойство равномерной непрерывности подмножества в $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$. В $C([0, T]; X)$, где X бесконечномерно, определение (2.2) не выполняется. Но если $D \subset C([0, T]; X)$ — равномерно непрерывное множество, тогда имеет место равенство

$$\chi_T(D) = \sup_{t \in [0, T]} \chi(D(t)). \quad (2.4)$$

Здесь χ — МНК Хаусдорфа на X и $D(t) := \{x(t) : x \in D\}$.

Рассмотрим пространство $BC(\mathbb{R}^+; X)$ ограниченных непрерывных функций на \mathbb{R}^+ , принимающих значения в X . Обозначим за π_T оператор сужения на данное пространство, так что $\pi_T(u)$ — сужение u на $[0, T]$. Тогда будем иметь МНК в виде

$$\chi_\infty(D) = \sup_{T > 0} \chi_T(\pi_T(D)), \quad D \subset BC(\mathbb{R}^+; X). \quad (2.5)$$

Рассмотрим другие МНК на этом пространстве:

$$d_T(D) = \sup_{u \in D} \sup_{t \geq T} \|u(t)\|_X, \quad (2.6)$$

$$d_\infty(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} d_T(D), \quad (2.7)$$

$$\chi^*(D) = \chi_\infty(D) + d_\infty(D). \quad (2.8)$$

Регулярность МНК χ^* доказана в [2, лемма 2.6].

Имеем следующую оценку, доказательство которой содержится в [10].

Утверждение 2.3 [10]. Пусть χ — МНК Хаусдорфа на банаховом пространстве X , последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L_1(0, T; X)$ такая, что $\|u_n(t)\|_X \leq v(t)$ для каждого $n \in \mathbb{N}^*$ и почти для всех $t \in [0, T]$, где $v \in L_1(0, T)$ — неотрицательная функция. Тогда справедливо неравенство

$$\chi \left(\left\{ \int_0^t u_n(s) ds \right\} \right) \leq 2 \int_0^t \chi(\{u_n(s)\}) ds \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Из утверждений 2.2 и 2.3 получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.4 [12]. Пусть χ — МНК Хаусдорфа на банаховом пространстве X и $D \subset L_1(0, T; X)$. Пусть существуют функции $v, q \in L_1(0, T)$, которые удовлетворяют условиям:

- (i) $\|\theta(t)\|_{L_1(0, T; X)} \leq v(t)$ для $\forall \theta \in D$ и почти всех $t \in [0, T]$,
- (ii) $\chi(D(t)) \leq q(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$, $D(t) = \{x(t) : x \in D\}$.

Тогда справедливо неравенство

$$\chi \left(\int_0^t D(s) ds \right) \leq 4 \int_0^t q(s) ds, \quad (2.10)$$

где $\int_0^t D(s) ds = \left\{ \int_0^t \theta(s) ds : \theta \in D \right\}$.

Обозначим за $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ пространство линейных ограниченных операторов из X в себя, χ — МНК Хаусдорфа на X . Для любого $T \in \mathcal{L}(X)$ введем его χ -норму (см. [11]) следующим образом:

$$\|T\|_\chi = \inf \{k > 0 : \chi(T(\Omega)) \leq k\chi(\Omega), \Omega \in B_X\}. \quad (2.11)$$

Справедлива оценка (см. [13])

$$\|T\|_\chi \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}. \quad (2.12)$$

Это определение имеется в [14, определение 6.1.1].

Определение 2.5. C_0 -полугруппа $\{T(t); t \geq 0\}$ называется *равнотепенно непрерывной*, если функция $t \mapsto T(t)$ непрерывна из $(0, +\infty)$ в $\mathcal{L}(X)$ в соответствии с равномерной операторной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$.

В заключение этого раздела напомним принцип фиксированной точки для рассмотрения отображений, которые будут использованы в дальнейшем.

Определение 2.6 [13]. Пусть β — МНК на банаховом пространстве E и $\emptyset \neq D \subset E$. Непрерывное отображение $F : D \rightarrow E$ называют *плотным относительно β* (β -плотным), если для $\forall \Omega \in \mathcal{P}_b(D)$ из неравенства $\beta(\Omega) \leq \beta(F(\Omega))$ следует относительная компактность Ω .

Теорема 2.7 [10]. Пусть D — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства E и $F : D \rightarrow D$ — β -плотное отображение, где β — монотонная и невырожденная МНК на E . Тогда $Fix(F) = \{x \in D : x = F(x)\}$ является непустым компактным множеством.

3. О существовании решений. При формулировании задачи (1.1), (1.2) рассмотрим следующие предположения.

(A) Оператор \mathcal{A} образует равностепенно непрерывную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на банаховом пространстве X .

В таком предположении $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ с нормой графика $\|z\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \|z\| + \|\mathcal{A}z\|$ становится банаховым пространством.

(G) Функция $g : C([0, T]; X) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям:

(i) g непрерывна и справедливо неравенство

$$\|g(u)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \theta_g(\|u\|_C) \quad (3.1)$$

для всех $u \in C([0, T]; X)$, где $\theta_g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция;

(ii) существуют неотрицательные константы η_g, ξ_g такие, что выполняются неравенства

$$\chi(g(\Omega)) \leq \eta_g \chi_T(\Omega), \quad (3.2)$$

$$\chi(\mathcal{A}g(\Omega)) \leq \xi_g \chi_T(\Omega) \quad (3.3)$$

для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([0, T]; X)$.

(H) Функция $h : C([0, T]; X) \rightarrow X$ удовлетворяет условиям:

(i) имеется непрерывная неубывающая функция $\theta_h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что справедливо неравенство

$$\|h(u)\|_X \leq \theta_h(\|u\|_C) \quad (3.4)$$

для всех $u \in C([0, T]; X)$;

(ii) имеется неотрицательная константа η_h такая, что выполняется неравенство

$$\chi(h(\Omega)) \leq \eta_h \chi_T(\Omega) \quad (3.5)$$

для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([0, T]; X)$.

(F) Нелинейная функция $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ удовлетворяет условиям:

- (i) $f(\cdot, v)$ измерима для любого $v \in X$, $f(t, \cdot)$ непрерывна почти для всех $t \in [0, T]$ и справедливо неравенство

$$\|f(t, v)\|_X \leq m(t)\theta_f(\|v\|_X) \quad (3.6)$$

для всех $v \in X$, где $m \in L_1(0, T)$, $\theta_f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрерывная и неубывающая;

- (ii) если полугруппа $T(\cdot)$ некомпактна, существует $\eta_f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что $\eta_f \in L_1(0, T)$ и выполняется неравенство

$$\chi(f(t, \Omega)) \leq \eta_f(t)\chi(\Omega) \quad (3.7)$$

для любого ограниченного множества $\Omega \subset X$.

Замечание 3.1. 1) Если $f(t, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. имеет место неравенство

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\|_X \leq k_f(t)\|v_1 - v_2\|_X$$

для некоторого $k_f \in L_1(0, T)$, соотношения (3.6) и (3.7) выполняются.

2) Если g — компакт, условие (3.2) выполняется.

Положим

$$S_1(t) = T(\sigma_1 t), \quad S_2(t) = T(\sigma_2 t), \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \rho, \quad \sigma_1 \sigma_2 = 1, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2.$$

Дадим определение слабого решения задачи (1.1), (1.2).

Определение 3.2. Функция $u \in C([0, T]; X)$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (1.2) на $[0, T]$, если для любого $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$u(t) = S_2(t)(x_0 - g(u)) + \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)v_0 ds + \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau, u(\tau)) d\tau ds, \quad (3.8)$$

где $v_0 = y_0 - h(u) + \sigma_2 \mathcal{A}(x_0 - g(u))$.

Введем обозначение за $B_R = \{u \in C([0, T]; X) : \|u\|_C \leq R\}$, где $R > 0$ задана. Определим оператор решения $F : B_R \rightarrow C([0, T]; X)$ как

$$F(u)(t) = S_2(t)(x_0 - g(u)) + \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)(y_0 - h(u) + \sigma_2 \mathcal{A}(x_0 - g(u))) ds + \\ + \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \quad \text{для } \forall u \in B_R, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

Из предположений, наложенных на g, h, f , очевидно, что F — непрерывное отображение на B_R . Положим

$$M = \sup_{t \in [0, T]} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \Lambda_T = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Upsilon_T = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) d\tau ds,$$

$$\Theta_T = \begin{cases} 0, & \text{если полугруппа } T(\cdot) \text{ компактна,} \\ \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) d\tau ds & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 3.3. Пусть условия **(A)**, **(G)**, **(H)**, **(F)** выполняются. Если справедливо неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T] < 1, \quad (3.10)$$

существует $R > 0$ такая, что $F(B_R) \subset B_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset B_R$ с $\|u_n\|_C \leq n$, но $\|F(u_n)\|_C > n$. Из формулировки F имеем

$$F(u_n)(t) = F_1(u_n)(t) + F_2(u_n)(t) + F_3(u_n)(t),$$

где

$$F_1(v)(t) = S_2(t)(x_0 - g(v)),$$

$$F_2(v)(t) = \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)(y_0 - h(v) + \sigma_2\mathcal{A}(x_0 - g(v))) ds,$$

$$F_3(v)(t) = \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau, v(\tau)) d\tau ds.$$

Тогда можем записать

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leq \|F_1(u_n)(t)\|_X + \|F_2(u_n)(t)\|_X + \|F_3(u_n)(t)\|_X, \quad (3.11)$$

$$\|F_1(u_n)(t)\|_X \leq \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)} (\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}) \leq M(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(n)), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \|F_2(u_n)(t)\|_X &\leq \\ &\leq \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} (\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_X) ds \leq \\ &\leq (\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}) \Lambda_T \leq \\ &\leq (\|y_0\|_X + \theta_h(n) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(n)) \Lambda_T. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \|F_3(u_n)(t)\|_X &\leq \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(\tau, u_n(\tau))\|_X d\tau ds \leq \\ &\leq \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) \theta_f(\|u_n(t)\|_X) d\tau ds \leq \theta_f(n)\Upsilon_T. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.11)–(3.14) получаем

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leq (M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X) + \\ + (M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T),$$

из чего следует

$$\|F(u_n)\|_C \leq (M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X) + \\ + (M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T).$$

Тогда будем иметь

$$1 < \frac{1}{n}\|F(u_n)\|_C \leq \frac{1}{n}[M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X] + \\ + \frac{1}{n}[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T]. \quad (3.15)$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем противоречие. Лемма 3.3 доказана. \square

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3. Тогда справедливо неравенство

$$\chi_T(F(D)) \leq [M\eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)\Lambda_T + 8\Theta_T]\chi_T(D) \quad (3.16)$$

для всех ограниченных множеств $D \subset B_R$.

Доказательство. По свойству алгебраической полуаддитивности χ_T имеем

$$\chi_T(F(D)) \leq \chi_T(F_1(D)) + \chi_T(F_2(D)) + \chi_T(F_3(D)). \quad (3.17)$$

Для любых $z_1, z_2 \in F_1(D)$ существуют $u_1, u_2 \in D$ такие, что для $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$z_i(t) = F_1(u_i)(t) = S_2(t)(x_0 - g(u_i)) \quad (i = 1, 2).$$

Имеем равенство

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_X = \|S_2(t)(g(u_2) - g(u_1))\|_X.$$

Тогда получаем

$$\|z_1 - z_2\|_C \leq M\|g(u_2) - g(u_1)\|_X$$

и

$$\chi_T(F_1(D)) \leq M\chi(g(D)) \leq M\eta_g\chi_T(D). \quad (3.18)$$

Применяя утверждение 2.2, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ такая, что выполняются неравенства

$$\chi_T(F_2(D)) \leq 2\chi_T(\{F_2(u_n)\}_{n=1}^\infty) + \varepsilon, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
\chi(\{F_2(u_n)(t)\}) &\leq 2 \int_0^t \chi\left(S_2(t-s)S_1(s)(y_0 - h(\{u_n\}) + \sigma_2 \mathcal{A}(x_0 - g(\{u_n\})))\right) ds = \\
&= 2 \int_0^t \chi\left[S_2(t-s)S_1(s)(h(\{u_n\}) + \sigma_2 \mathcal{A}g(\{u_n\}))\right] ds \leq \\
&\leq 2 \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \left(\chi(h(\{u_n\})) + \sigma_2 \chi(\mathcal{A}g(\{u_n\}))\right) ds.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\{F_2(u_n)\}$ – равностепенно непрерывное множество. Тогда в силу предположений (G) и (H) имеем

$$\chi_T(\{F_2(u_n)\}) \leq 2(\eta_h \chi_T(\{u_n\}) + \sigma_2 \xi_g \chi_T(\{u_n\})) \Lambda_T \leq 2(\eta_h + \sigma_2 \xi_g) \Lambda_T \chi_T(D). \quad (3.20)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, из (3.19) и (3.20) получаем

$$\chi_T(F_2(D)) \leq 4(\eta_h + \sigma_2 \xi_g) \Lambda_T \chi_T(D). \quad (3.21)$$

Снова применяя утверждение 2.2, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ такая, что выполняются неравенства

$$\chi_T(F_3(D)) \leq 2\chi_T(\{F_3(u_n)\}_{n=1}^\infty) + \varepsilon, \quad (3.22)$$

$$\chi(\{F_3(u_n)(t)\}) \leq 4 \int_0^t \int_0^s \chi(S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau, \{u_n(\tau)\})) d\tau ds.$$

Если $T(\cdot)$ – компактная полугруппа, такова и $S_2(\cdot)$. Тогда получаем

$$\chi(S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau, \{u_n(\tau)\})) = 0 \text{ для почти всех } \tau \in [0, T].$$

В таком случае будем иметь равенство $\chi(\{F_3(u_n)(t)\}) = 0$. В противном случае справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\chi(\{F_3(u_n)(t)\}) &\leq 4 \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \chi(f(\tau, \{u_n(\tau)\})) d\tau ds \leq \\
&\leq 4 \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) \chi(\{u_n(\tau)\}) d\tau ds.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\{F_3(u_n)\}$ – равностепенно непрерывное множество, следовательно, выполняется

$$\chi_T(\{F_3(u_n)\}) \leq 4\Theta_T \chi_T(D). \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) имеем

$$\chi_T(F_3(D)) \leq 8\Theta_T \chi_T(D). \quad (3.24)$$

Объединение (3.17), (3.18), (3.21) и (3.24) дает

$$\chi_T(F(D)) \leq [M\eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)\Lambda_T + 8\Theta_T]\chi_T(D). \quad (3.25)$$

Лемма 3.4 доказана. \square

Теорема 3.5. Пусть выполняются условия леммы 3.4. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет как минимум одно слабое решение на $[0, T]$, причем справедливы неравенства

$$l := M\eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)\Lambda_T + 8\Theta_T < 1, \quad (3.26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T] < 1. \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По неравенству (3.26) отображение F χ_T -плотно. Действительно, пусть $D \subset B_R$ — ограниченное множество такое, что $\chi_T(D) \leq \chi_T(F(D))$. Применяя лемму 3.4, получим неравенство

$$\chi_T(D) \leq \chi_T(F(D)) \leq l\chi_T(D).$$

Поэтому $\chi_T(D) = 0$, и тогда D относительно компактно.

Применяя лемму 3.3 и используя свойство (3.27), получаем $F(B_R) \subset B_R$. Далее применяем теорему 2.7, χ_T -плотное отображение F , определенное в (3.9), образует $Fix(F) \subset B_R$ — компактное непустое множество. Это доказывает существование по меньшей мере одного слабого решения $u(t)$, $t \in [0, T]$, задачи (1.1), (1.2), заданного в (3.8). \square

4. Существование затухающих слабых решений. Рассмотрим в этом разделе оператор решения F , заданный на множестве

$$BC_R^\gamma(\beta) = B_R \cap \{v \in BC(\mathbb{R}^+; X) : \sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{\gamma t} \|v(t)\|_X \leq \beta\},$$

где B_R — замкнутый шар в $BC(\mathbb{R}^+; X)$ с центром в начале координат и радиусом R ; β и γ — некоторые положительные числа, которые будут заданы далее. Это множество является выпуклым ограниченным и замкнутым подмножеством $BC(\mathbb{R}^+; X)$.

Возьмем МНК χ^* на $BC_R^\gamma(\beta)$, определенную в (2.8). Докажем, что отображение F переводит $BC_R^\gamma(\beta)$ в себя, т. е. $F(BC_R^\gamma(\beta)) \subset BC_R^\gamma(\beta)$, и F — χ^* -плотно на $BC_R^\gamma(\beta)$. Для этого необходимо заменить **(A)**, **(G)**, **(H)** и **(F)** на более строгие предположения.

(A*) Оператор $-\mathcal{A}$ — инфинитезимальный порождающий оператор равностепенно непрерывной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ такой, что справедливо неравенство

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{-\delta t}, \quad t \geq 0,$$

где $C, \delta > 0$ — положительные константы.

(G*) Предположение **(G)** выполняется при любом $T > 0$.

(H*) Предположение **(H)** справедливо при любом $T > 0$.

(F*) Предположение (F) выполняется при $\theta_f(r) = r$, $\eta_f \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, и $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ такая, что выполняется неравенство

$$K = \sup_{s \geq 0} \int_0^s e^{-(\delta\sigma_1 - \gamma)(s-\tau)} m(\tau) d\tau < +\infty.$$

Положим

$$M_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \Lambda_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Upsilon_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) d\tau ds,$$

$$\Theta_\infty = \begin{cases} 0, & \text{если полугруппа } T(\cdot) \text{ компактна,} \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) d\tau ds, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затем зафиксируем $\gamma \in (0, \delta\sigma_1]$.

Лемма 4.1. Пусть выполнены (A*), (G*), (H*) и (F*). Если справедливы неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [M_\infty \theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty] + \Upsilon_\infty < 1 \quad (4.1)$$

$$\frac{KC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma} < 1, \quad (4.2)$$

существуют положительные R, β такие, что $F(BC_R^\gamma(\beta)) \subset BC_R^\gamma(\beta)$.

Доказательство. Сначала докажем существование независимого от оператора решения F множества B_R . Докажем от противного: пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $u_n \in B_n$, удовлетворяющая $\|u_n\|_\infty \leq n$, но $\|F(u_n)\|_\infty > n$. При равных с леммой 3.3 условиях имеем

$$\|F_1(u_n)(t)\|_X \leq M_\infty (\|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \theta_g(n)), \quad (4.3)$$

$$\|F_2(u_n)(t)\|_X \leq (\|y_0\|_X + \theta_h(n) + \sigma_2 \|Ax_0\|_X + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty, \quad (4.4)$$

$$\|F_3(u_n)(t)\|_X \leq n \Upsilon_\infty. \quad (4.5)$$

Из (4.3)–(4.5) очевидно неравенство

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leq (M_\infty \|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \|y_0\|_X + \sigma_2 \|Ax_0\|_X) + (\theta_h(n) + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty + n \Upsilon_\infty$$

для любого $t \geq 0$. Отсюда имеем

$$1 < \frac{1}{n} \|F(u_n)\|_\infty \leq \frac{1}{n} [M_\infty \|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \|y_0\|_X + \sigma_2 \|Ax_0\|_X] + \frac{1}{n} [M_\infty \theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty + n \Upsilon_\infty]. \quad (4.6)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем соотношении, получаем противоречие с условием (4.1).

Теперь докажем существование положительного β такого, что $F(BC_R^\gamma(\beta)) \subset BC_R^\gamma(\beta)$. Предположим противное: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $u_n \in BC_R^\gamma(n)$ (т. е. $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{\gamma t} \|u_n(t)\|_X \leq n$) такая, что $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{\gamma t} \|F(u_n)(t)\|_X > n$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \|F_1(u_n)(t)\|_X &\leq e^{\gamma t} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)} (\|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \|g(u_n)\|_{\mathcal{D}(A)}) \leq \\ &\leq e^{\gamma t} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)} (\|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \theta_g(\|u_n\|_\infty)) \leq \frac{C}{e^{(\delta\sigma_2 - \gamma)t}} [\|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \theta_g(R)] \leq \\ &\leq C [\|x_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \theta_g(R)], \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \|F_2(u_n)(t)\|_X &\leq \\ &\leq e^{\gamma t} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} (\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2 \|Ax_0\|_X + \sigma_2 \|Ag(u_n)\|_X) ds \leq \\ &\leq C [\|y_0\|_X + \theta_h(\|u_n\|_\infty) + \sigma_2 \|Ax_0\|_X + \sigma_2 \theta_g(\|u_n\|_\infty)] e^{(\gamma - \delta\sigma_2)t} \int_0^t e^{\delta(\sigma_2 - \sigma_1)s} ds \leq \\ &\leq C_1 [\|y_0\|_X + \theta_h(R) + \sigma_2 \|Ax_0\|_X + \sigma_2 \theta_g(R)] \quad (4.8) \end{aligned}$$

для любого $t \geq 0$, так как $u_n \in BC_R^\gamma(n)$. Здесь C_1 — это положительная константа, независимая от u_n . Имеем

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \|F_3(u_n)(t)\|_X &\leq e^{\gamma t} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(\tau, u_n(\tau))\|_X d\tau ds \leq \\ &\leq C^2 e^{\gamma t} \int_0^t \int_0^s e^{-\delta\sigma_2(t-s)} e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)} m(\tau) \|u_n(\tau)\|_X d\tau ds = \\ &= C^2 e^{\gamma t} \int_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)} \left(\int_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau) - \gamma\tau} m(\tau) e^{\gamma\tau} \|u_n(\tau)\|_X d\tau \right) ds \leq \\ &\leq n C^2 e^{\gamma t} \int_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)} \left(\int_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau) - \gamma\tau} m(\tau) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Убеждаемся, что вследствие $\gamma \leq \delta\sigma_1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau) - \gamma\tau} m(\tau) d\tau &= \int_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau) + \gamma(s-\tau)} e^{-\gamma s} m(\tau) d\tau = \\ &= e^{-\gamma s} \int_0^s e^{-(\delta\sigma_1 - \gamma)(s-\tau)} m(\tau) d\tau \leq K e^{-\gamma s}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$e^{\gamma t} \|F_3(u_n)(t)\|_X \leq nC^2 K e^{\gamma t} \int_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s) - \gamma s} ds \leq \frac{nKC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma}. \quad (4.9)$$

По (4.7)–(4.9) имеем

$$e^{\gamma t} \|F(u_n)(t)\|_X \leq C_2 [\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2 \|Ax_0\|_X + (1 + \sigma_2)\theta_g(R) + \theta_h(R)] + \frac{nKC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma}$$

для $\forall u_n \in BC_R^\gamma(n)$ и $\forall t \geq 0$, где $C_2 = \max\{C, C_1\}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$1 < \frac{1}{n} \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \|F(u_n)(t)\|_X \leq \frac{C_2}{n} [\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2 \|Ax_0\|_X + (1 + \sigma_2)\theta_g(R) + \theta_h(R)] + \frac{KC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем соотношении, получаем противоречие с условием (4.2). \square

Лемма 4.2. Пусть выполняются (\mathbf{A}^*) , (\mathbf{G}^*) , (\mathbf{H}^*) и (\mathbf{F}^*) . Тогда справедливо неравенство

$$\chi^*(F(D)) \leq [M_\infty \eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2 \xi_g) \Lambda_\infty + 8\Theta_\infty] \chi^*(D) \quad (4.10)$$

для любого ограниченного множества $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$.

Доказательство. Пусть $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ — ограниченное множество. Тогда имеем равенство

$$\chi^*(F(D)) = \chi_\infty(F(D)) + d_\infty(F(D)). \quad (4.11)$$

Из леммы 3.4 получаем следующие оценки:

$$\chi_\infty(F(D)) \leq \chi_\infty(F_1(D)) + \chi_\infty(F_2(D)) + \chi_\infty(F_3(D)) \quad (4.12)$$

и

$$\chi_\infty(F_1(D)) \leq M_\infty \eta_g \chi_\infty(D), \quad (4.13)$$

$$\chi_\infty(F_2(D)) \leq 4(\eta_h + \sigma_2 \xi_g) \Lambda_\infty \chi_\infty(D), \quad (4.14)$$

$$\chi_\infty(F_3(D)) \leq 8\Theta_\infty \chi_\infty(D). \quad (4.15)$$

Из (4.12)–(4.15) имеем

$$\chi_\infty(F(D)) \leq [M_\infty \eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2 \xi_g) \Lambda_\infty + 8\Theta_\infty] \chi_\infty(D). \quad (4.16)$$

Пусть теперь $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ — ограниченное множество. Тогда для каждой $u \in D$ имеем

$$e^{\gamma t} \|F(u)(t)\|_X \leq \beta \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Значит, $\|F(u)(t)\|_X \leq \beta e^{-\gamma t}$, $\forall u \in D$, для любого достаточно большого t . Соответственно для достаточно большого T выполняется неравенство $d_T(F(D)) \leq \beta e^{-\gamma T}$.

Отсюда получаем

$$d_\infty(F(D)) = \lim_{T \rightarrow \infty} d_T(F(D)) = 0. \quad (4.17)$$

Учитывая (4.11), (4.16) и (4.17), получаем утверждение леммы. \square

Объединение лемм (4.1) и (4.2) дает следующую теорему.

Теорема 4.3. Если выполняются условия леммы 4.1 и справедливо неравенство

$$l_\infty := M_\infty \eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2 \xi_g) \Lambda_\infty + 8\Theta_\infty < 1, \quad (4.18)$$

задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно слабое решение на \mathbb{R}^+ такое, что $e^{\gamma t} \|u(t)\| = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из неравенства (4.18), оператор решения F является χ^* -плотным вследствие леммы 4.2. Это верно, если ограниченное $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ такое, что $\chi^*(D) \leq \chi^*(F(D))$. Применив лемму 4.2, получаем

$$\chi^*(D) \leq \chi^*(F(D)) \leq l_\infty \chi^*(D).$$

Отсюда имеем $\chi^*(D) = 0$, и, таким образом, D — относительный компакт.

Учитывая предположения (4.1), (4.2) и лемму 4.1, получаем $F(BC_R^\gamma(\beta)) \subset BC_R^\gamma(\beta)$. Применив в связи с этим теорему 2.7, определяем, что оператор решения F , заданный в (3.9), имеет компактное непустое множество неподвижных точек из $BC_R^\gamma(\beta)$, которое содержит затухающие решения задачи (1.1), (1.2). \square

5. Пример. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt}(t, x) - \rho \Delta_x u_t(t, x) + \Delta_x^2 u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$u(0, x) + \int_{\Omega} k(x, y) u(0, y) dy = \varphi(x), \quad u_t(0, x) + \sum_{i=1}^N C_i u(t_i, x) = \psi(x), \quad (5.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.3)$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$ и $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ такой, что $\Delta_x k \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Пусть имеем $X = L^2(\Omega)$ и $\mathcal{A} = -\Delta_x$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Известно, что (см., например, [15]) $-\mathcal{A}$ образует компактную (и, следовательно, равностепенно непрерывную) полугруппу $T(\cdot)$, экспоненциально устойчивую, т. е. $\|T(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}$, где $\lambda_1 > 0$ — первое собственное значение \mathcal{A} . Записывая

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t, \cdot), \quad f(t, v) = f(\cdot, v(\cdot)), \\ g(u) &= \int_{\Omega} k(\cdot, y) u(0, y) dy, \quad h(u) = \sum_{i=1}^n C_i u(t_i, \cdot), \end{aligned}$$

можно преобразовать задачу (5.1), (5.3) в абстрактный вид (1.1), (1.2). Рассматривая нелинейную функцию f , предположим, что существует функция $m \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ такая, что справедливо неравенство

$$|f(t, x, z)| \leq m(t)|z|, \quad \forall (t, x, z) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}.$$

Тогда будем иметь

$$\|f(t, v)\|_X \leq m(t)\|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

Заметим, что

$$G(v) = \int_{\Omega} k(\cdot, y)v(y)dy$$

является оператором Гильберта–Шмидта на $L^2(\Omega)$, следовательно, он компактен. Поэтому отображение g , задаваемое как $g(u) = G(u(0, \cdot))$, тоже компактно. Аналогично $\mathcal{A}g$ – компактное множество. Таким образом, условие **(G*)**(ii) удовлетворяется при $\eta_g = \xi_g = 0$. При этом выполняется неравенство

$$\|g(u)\|_X \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \|u(0, \cdot)\|_X \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \|u\|_C.$$

Итак, **(G*)**(i) верно.

Относительно функции h имеем

$$\|h(u_1) - h(u_2)\|_X \leq \sum_{i=1}^N |C_i| \|u_1(t_i, \cdot) - u_2(t_i, \cdot)\|_X \leq \left(\sum_{i=1}^N |C_i| \right) \|u_1 - u_2\|_C.$$

Тогда получаем

$$\chi(h(\Omega)) \leq \left(\sum_{i=1}^N |C_i| \right) \chi_{\infty}(\Omega).$$

Условие **(H*)**(ii) выполняется при $\eta_h = \sum_{i=1}^N |C_i|$. С другой стороны, очевидно неравенство

$$\|h(u)\| \leq \left(\sum_{i=1}^N |C_i| \right) \|u\|_{\infty},$$

из чего следует **(H*)**(i).

Учитывая сказанное выше, простые вычисления дают

$$\begin{aligned} M_{\infty} &= 1, \quad \Theta_{\infty} = 0, \quad \Lambda_{\infty} \leq [\lambda_1(\sigma_2 - \sigma_1)]^{-1}, \\ K &= \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-(\lambda_1 \sigma_1 - \gamma)(t-\tau)} m(\tau) d\tau, \\ \theta_g(r) &= \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \cdot r, \quad \theta_h(r) = \left(\sum_{i=1}^N |C_i| \right) \cdot r. \end{aligned}$$

Используя теорему 4.3, определяем, что задача (5.1)–(5.3) имеет как минимум одно решение $u \in BC(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, удовлетворяющее равенству $e^{\gamma t} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$, причем выполняются неравенства

$$K < \lambda_1 \sigma_2 - \gamma, \tag{5.4}$$

$$\|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} + \left(\sum_{i=1}^N |C_i| + \sigma_2 \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \right) [\lambda_1(\sigma_2 - \sigma_1)]^{-1} + \Upsilon_{\infty} < 1. \tag{5.5}$$

Авторы с удовольствием выражают свою благодарность аспирантке СПбГУ Веронике Шелковиной за перевод текста статьи на русский язык и профессору СПбГУ В. М. Рябову за научное редактирование статьи.

Литература

1. *Chen G., Russell D. L.* A Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Structural Damping // *Quart. Appl. Math.* 1981/1982. Vol. 39. P. 433–454.
2. *Huang F.* A Problem for Linear Elastic Systems with Structural Damping // *Acta Math. Sci Sinic.* 1986. Vol. 6. P. 107–113.
3. *Huang F.* On the Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Analytic Damping // *SIAM, J. Cont, Opt.* 1988. Vol. 26. P. 714–724.
4. *Fan H., Li Y., Chen P.* Existence of Mild Solutions for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces // *Abstract and Applied Analysis.* 2013. Vol. 2013. Artical ID 746893. P. 1–6.
5. *Fan H., Li Y.* Analyticity and Exponential Stability of Semigroups for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces // *J. Math. Anal. Appl.* 2014. Vol. 410. P. 316–322.
6. *Fan H., Gao F.* Asymptotic Stability of Solutions to Elastic Systems with Structural Damping // *Electronic Journal of Differential Equations.* 2014. Vol. 2014, N 245. P. 1–9.
7. *Byszewski L.* Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semi-linear evolution nonlocal Cauchy problem // *J. Math. Anal. Appl.* 1991. Vol. 162. P. 494–505.
8. *Deng K.* Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions // *J. Math. Anal. Appl.* 1993. Vol. 179. P. 630–637.
9. *Byszewski L., Lakshmikantham V.* Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space // *Appl. Anal.* 1991. Vol. 40. P. 11–19.
10. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001.
11. *Ахмеров П. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск: Наука, 1986. 265 с.
12. *Anh N. T., Ke T. D.* Decay Integral Solutions for Neutral Fractional Differential Equations with Infinite Delays // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2015. Vol. 38, N 8. P. 1601–1622.
13. *Apell J.* Mearures of Noncompactness Condensing Operators and Fixed Points an Application-Oriented Survey // *Fixed Point Theory.* 2005. Vol. 6, N 2. P. 157–229.
14. *Vrabie I. I.* C_0 -semigroups and applications. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 2003.
15. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolutio Equations. New York: Springer-Verlag Inc., 2000.

Статья поступила в редакцию 16 марта 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Vu Trong Luong — vutrongluong@gmail.com

Nguyen Thanh Tung — thanhtungcva2013@gmail.com

DECAY MILD SOLUTIONS FOR ELASTIC SYSTEMS WITH STRUCTURAL DAMPING INVOLVING NONLOCAL CONDITIONS

Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung

Tay Bac University, 01, Chu Van An, Quyet Tam, Son La, Vietnam;
vutrongluong@gmail.com, thanhtungcva2013@gmail.com

This paper deals with a class of elastic systems with structural damping subject to nonlocal conditions. By using a suitable measure of noncompactness on the space of continuous functions on the half-line, we establish the existence of mild solutions with explicit decay rate of exponential type. An example is given to illustrate the abstract results. Refs 15.

Keywords: decay solutions, elastic system with structural damping, nonlocal conditions.

References

1. *Chen G., Russell D.L.*, “A Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Structural Damping”, *Quart. Appl. Math.* **39**, 433–454 (1981–1982).
2. *Huang F.*, “A Problem for Linear Elastic Systems with Structural Damping”, *Acta Math. Sci Sinic.* **6**, 107–113 (1986).

3. Huang F., "On the Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Analytic Damping", *SIAM, J. Cont., Opt.* **26**, 714–724 (1988).
4. Fan H., Li Y., Chen P., "Existence of Mild Solutions for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces" *Abstract and Applied Analysis* **2013**, Artical ID 746893, 1–6 (2013).
5. Fan H., Li Y., "Analyticity and Exponential Stability of Semigroups for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces" *J. Math. Anal. Appl.* **410**, 316–322 (2014).
6. Fan H., Gao F., "Asymptotic Stability of Solutions to Elastic Systems with Structural Damping" *Electronic Journal of Differential Equations* **2014**(245), 1–9 (2014).
7. Byszewski L., "Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semi-linear evolution nonlocal Cauchy problem" *J. Math. Anal. Appl.* **162**, 494–505 (1991).
8. Deng K., "Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions" *J. Math. Anal. Appl.* **179**, 630–637 (1993).
9. Byszewski L., Lakshmikantham V., "Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space" *Appl. Anal.* **40**, 11–19 (1991).
10. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P., *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces* (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001).
11. Akhmerov R. R., Kamenskii M. I., Potapov A. S., Rodkina A. E., Sadovskii B. N., *Measures of Noncompactness and Condensing Operator* (Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1992).
12. Anh N. T., Ke T. D., "Decay Integral Solutions for Neutral Fractional Differential Equations with Infinite Delays" *Math. Meth. Appl. Sci.* **38**(8), 1601–1622 (2015).
13. Apell J., "Measures of Noncompactness Condensing Operators and Fixed Points an Application-Oriented Survey", *Fixed Point Theory* **6**(2), 157–229 (2005).
14. Vrabie I. I., *C_0 -semigroups and applications* (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003).
15. Engel K. J., Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations* (Springer-Verlag, New York, Inc, 2000).

Для цитирования: Ву Тронг Люонг, Нгуен Тан Тунг. Затухающие слабые решения упругих систем со структурным демпфированием при нелокальных условиях // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 87–103. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.111

For citation: Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung. Decay mild solutions for Elastic Systems with Structural Damping involving Nonlocal Conditions. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 87–103. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.111