

МЕХАНИКА

УДК 533:531.01
MSC 76N05

**БИФУРКАЦИИ ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ
В КАНАЛАХ С ИЗЛОМОМ СТЕНОК**

К. В. Бабарыкин, А. Г. Кузьмин, А. Н. Рябинин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Численно исследовано турбулентное течение воздуха в 2D и 3D каналах прямоугольного поперечного сечения со слабым изломом стенок. Рассмотрены режимы течения со сверхзвуковой скоростью у входа в канал и ниже по потоку от излома нижней стенки. Решения нестационарных уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу, получены с помощью вычислительных программ ANSYS-15 CFX, Fluent и SU2, основанных на методе конечных объемов. Показано наличие существенного гистерезиса зависимости положения ударной волны в канале от числа Маха вследствие ее взаимодействия со сверхзвуковой зоной, расположенной ниже по течению от излома нижней стенки. Библиогр. 17 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: ударная волна, сверхзвуковой поток, торможение, неустойчивость.

Введение. Исследования трансзвуковых течений в каналах переменного сечения представляют интерес в связи с необходимостью повышения эффективности и устойчивости работы входных устройств воздушно-реактивных двигателей. На расчетном режиме работы сверхзвукового воздухозаборника смешанного сжатия происходит формирование косых скачков уплотнения в сужающейся части канала и прямого скачка сразу за минимальным сечением. Такая система ударных волн, однако, оказывается весьма чувствительной к изменениям числа Маха натекающего потока M_∞ и угла атаки. В частности, при меньших значениях M_∞ по сравнению с расчетным значением вместо системы ударных волн образуется один скачок, расположенный перед входом в канал. При этом в расширяющейся части воздухозаборника, как правило, устанавливается дозвуковая скорость течения.

В данной работе исследуются режимы со сверхзвуковой скоростью в расширяющейся части как в случае положения косого скачка внутри канала, так и при его отсутствии. Кроме сужающегося-расширяющегося канала рассмотрен расширяющийся по всей длине канал со слабым изломом стенок.

Исследования гистерезиса ударных волн проводились в [1, 2] для каналов между двумя симметричными клиньями для двух цилиндров, расположенных рядом, и для бесконечной цепочки цилиндров, ориентированной перпендикулярно потоку [3, 4]. В этих случаях неустойчивости гистерезис и по отношению к числу Маха и по отношению к геометрическим параметрам вызывается существованием в определенном диапазоне чисел Маха двух типов отражения: регулярного и маховского.

В настоящей работе рассматривается неустойчивость другого типа, связанная со взаимодействием сверхзвуковых зон. Ранее неустойчивость такого типа подробно изучалась для профилей и крыльев, имеющих участки малой кривизны. Доказано наличие гистерезиса по отношению к числу Маха и углу атаки для невязкого газа [5, 6]. Численные расчеты уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу, с применением различных моделей турбулентности также продемонстрировали существование гистерезиса [7, 8]. Обзор работ по этой теме можно найти в [9].

Близкие вопросы устойчивости ударных волн изучались в работах [10, 11] для каналов с изломом или изгибом стенок и в [12] для задачи обтекания сверхзвуковым потоком цилиндра, расположенного над стенкой с угловой точкой. В работе [13] численно исследовались эффекты взаимодействия сверхзвуковых зон в канале с центральным телом для невязкого и вязкого газа.

1. Задача о течении в канале № 1, расширяющемся по всей длине, со слабым изломом стенок. Рассматривается плоский канал, верхняя и нижняя стенки которого составлены из двух прямолинейных отрезков. Для описания канала используется декартова система координат x, y . Отрезки, составляющие нижнюю стенку, соединяют последовательно три точки с координатами $(0; 0)$, $(1; 0)$ и $(1,7; -0,17)$. Верхняя стенка состоит из отрезков, соединяющих три точки $(0; 1,5)$, $(0,8; 1,6)$ и $(2,2; 1,3)$. Все размеры здесь и далее указаны в метрах. Входом в канал является вертикальный отрезок $x = 0$, $0 \leq y \leq 1,5$. Выходом из канала является наклонный отрезок с концевыми точками, соединяющий точки $(1,7; -0,17)$ и $(2,2; 1,3)$. Таким образом, до излома стенок канал является расширяющимся вследствие наклона верхней стенки под углом $7,125^\circ$. После излома верхняя и нижняя стенки наклонены под углами $12,095^\circ$ и $13,65^\circ$ соответственно. Схема расчетной области вместе с осями координат представлена на рис. 1 (здесь $Re = 1,7 \cdot 10^7$, характерный размер равен 1 м).

Во входном сечении канала задана скорость воздушного потока U_{in} , направленная вдоль оси x , а также статическое давление $p_{in} = 50000$ Па и статическая температура $T_{in} = 250$ К, которой соответствует скорость звука $a_{in} = 317,02$ м/с при показателе адиабаты 1,4. Степень турбулентности натекающего потока принимала значение 0 (солвер SU₂) или 1%. На выходе из канала, за исключением области пограничного слоя, примыкающего к стенкам, ставится условие сверхзвуковой скорости течения, а на стенках — условие прилипания и отсутствия теплового потока. В качестве начальных данных в расчетной области использовались параметры натекающего потока или поле течения, полученное для некоторого предыдущего значения $M_{in} = U_{in}/a_{in}$.

Численные решения системы уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу, находились с помощью нескольких вычислительных программ второго порядка точности по пространственным координатам и времени. Большинство расчетов проведено с помощью пакета ANSYS CFX-15 на неструктурированных сетках с числом элементов около $1,5 \cdot 10^5$ при расчетах двумерных течений. Вблизи стенок безразмерная толщина первого слоя сетки $y^+ \approx 1$. Использовалась модель турбулентности

$k - \omega$ SST и глобальные шаги по времени для нахождения установившегося течения. Тестирование программы проводилось, в частности, на задаче трансзвукового течения газа в канале с круговым выступом на верхней стенке [10]. Для выяснения зависимости результатов от выбора солвера и модели турбулентности расчеты были проведены также с помощью пакета ANSYS FLUENT-14 (модели турбулентности $k - \omega$ SST и Спалларта—Аллмараса) и с помощью свободно распространяемого пакета программ Stanford University Unstructured (SU₂) [14].

Расчеты с использованием SU₂ выполнялись на двумерных неструктурированных сетках, измельченных в области пограничного слоя вблизи стенки таким образом, чтобы выполнялось $y^+ \approx 1$. Сетки, содержащие $3 \cdot 10^4$ элементов, построены в пакете Gmsh [15].

Для рассмотренных чисел Маха M_{in} происходило формирование скачка уплотнения у входа в канал. В качестве параметра, характеризующего положение скачка уплотнения, использовалась координата x_s точки пересечения скачка уплотнения с горизонталью $y = 0,25$ (см. рис. 1, на котором представлен результат расчета числа Маха с помощью пакета программ SU₂ для модели турбулентности Спалларта—Аллмараса).

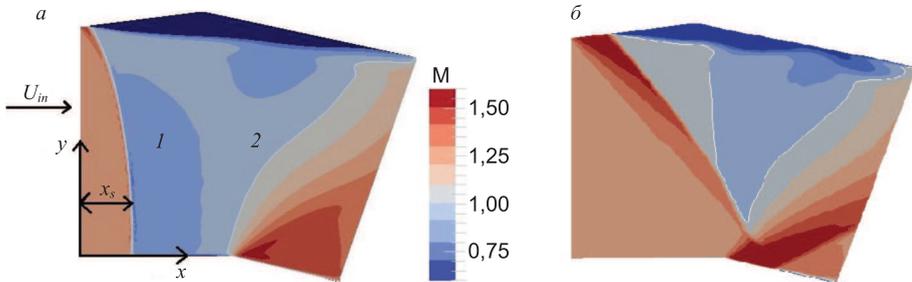


Рис. 1. Числа Маха в канале №1 при $M_{in} = 1,275$ для различных начальных условий: решение для $M_{in} = 1,2$ (а); решение для $M_{in} = 1,31$ (б). 1 — скачок уплотнения, 2 — звуковая линия.

Ниже по потоку от скачка уплотнения располагается дозвуковая область. Скачок уплотнения вызывает в верхней части канала отрыв потока, сопровождающийся появлением зоны возвратного течения. В трубках тока, прилегающих к этой зоне, происходит сначала торможение дозвукового потока, а затем его ускорение, что видно из изолиний числа Маха на рис. 1. В нижней части канала поток ускоряется монотонно, и после излома нижней стенки он становится сверхзвуковым везде, кроме примыкающего к стенке пограничного слоя. Переход дозвукового течения в сверхзвуковое вблизи выпуклого угла для невязкого газа изучался в работе [16]. Используя двумерное приближение, авторы [16] установили форму криволинейной звуковой линии. В канале рассматриваемой конфигурации звуковая линия также криволинейна (см. рис. 1).

При увеличении числа Маха потока M_{in} на входе в канал происходит слияние двух сверхзвуковых зон вблизи нижней стенки. Процесс слияния сопровождается скачкообразным увеличением x_s . Последующее уменьшение M_{in} приводит к расщеплению сверхзвуковых зон. Однако расщепление происходит при другом значении числа Маха M_{in} . Расчеты показали существование гистерезиса, охватывающего широкий интервал чисел Маха M_{in} . Результаты, полученные разными солверами, находятся

в согласии друг с другом, что следует из сравнения графиков, представленных на рис. 2 ($Re = 1.7 \cdot 10^7$ для характерного размера 1 м).

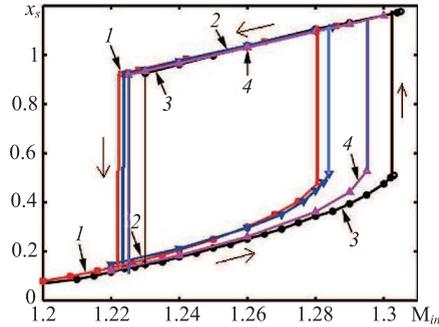


Рис. 2. Сравнение результатов, полученных для канала №1 разными солверами и при разных моделях турбулентности: 1 — CFX, SST; 2 — Fluent, SST; 3 — SU2, Спаларт—Аллмарас; 4 — Fluent, Спаларт—Аллмарас.

Причину неустойчивости двух сверхзвуковых областей можно объяснить на примере стационарного невязкого течения. Расстояние между звуковой линией, которая является началом второй сверхзвуковой зоны, и скачком уплотнения, замыкающим первую сверхзвуковую зону, уменьшается с ростом числа Маха натекающего потока. Однако это расстояние не может быть равно нулю, так как за скачком уплотнения поток строго дозвуковой, поэтому скачок уплотнения и звуковая линия не могут иметь общей точки. Как следствие, когда число Маха превосходит некоторое значение, две сверхзвуковые зоны резко сливаются.

2. Задача об обтекании простейшей модели воздухозаборника с плоской верхней стенкой. Рассмотрим теперь обтекание канала с учетом ударной волны, отошедшей вверх по потоку от передней кромки обечайки, и области, прилегающей к обечайке с внешней стороны. При этом в качестве профиля обечайки (верхней стенки канала №2) берется тонкий прямоугольник толщиной 0,02 с внутренней стороной $y = 1 - (x - 0,4) \operatorname{tg} \theta$, где $0,4 \leq x \leq 2$. Угол наклона θ верхней стенки к оси x равен 7° .

Верхней границей расчетной области в задаче 2 является отрезок $y = 5, 0 \leq x \leq 2$, который расположен на достаточном удалении от верхней стенки для исключения его влияния на течение в канале. Входной границей является отрезок $x = 0, 0 \leq y \leq 5$. С целью экономии вычислительных ресурсов в качестве выходной границы, расположенной вне канала, вместо вертикального отрезка $x = 2$ выбран наклонный отрезок, соединяющий угловую точку $x = 2, y = 5$ и точку с абсциссой $x = 0,7$, находящуюся на внешней стороне верхней стенки.

Рассматривались три положения точки излома нижней стенки: $x_c = 0,9; 1,1; 1,3$. Угол наклона после излома равен $12,6^\circ$. Схема нижней части расчетного объема для 1,3 приведена на рис. 2. Расчеты проводились солвером CFX с использованием модели турбулентности $k - \omega$ SST.

Принимались следующие параметры набегающего потока: статическое давление $p_\infty = 50000$ Па, статическая температура $T_\infty = 250$ К и нулевой угол наклона потока к оси x . Степень турбулентности на входной границе расчетного объема равна 1%.

Было проведено исследование положения ударной волны при изменении числа Маха M_∞ в диапазоне от 1,38 до 1,70. Установлено, что возможны два режима течения в канале: первый режим характерен отошедшей ударной волной перед входом в канал, второй — наклонной ударной волной, достигающей горла канала. При этом расчеты показали наличие существенного гистерезиса течения и возможность реализации разных режимов при одних и тех же граничных условиях (см. рис. 3). На рис. 4 приведены графики координаты ударной волны x_s на высоте $y = 0,25$, полученные для разных значений x_c . На рис. 3 и 4 $Re = 1,7 \cdot 10^7$, характерный размер равен 1 м.

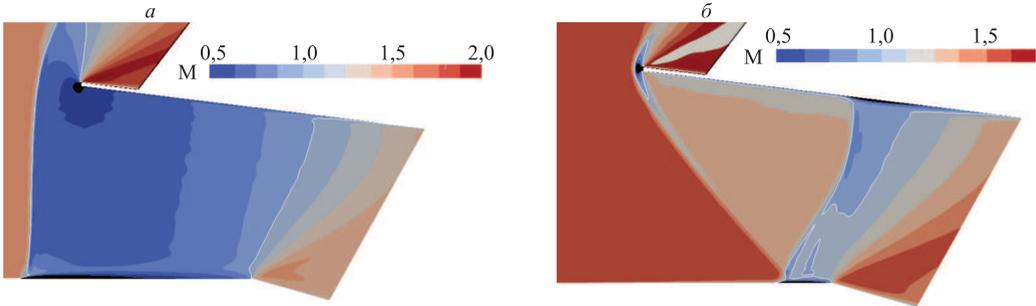


Рис. 3. Изомахи в канале №2 при координате точки излома нижней стенки $x_c = 1,3$ при увеличении M_∞ до 1,535 (а); при уменьшении M_∞ до 1,535 (б).

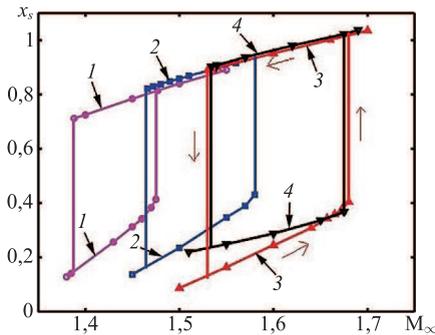


Рис. 4. Гистерезис ударной волны в канале №2 при трех разных координатах точки излома нижней стенки x_c : 1 — $x_c = 0,9$ (плоское течение); 2 — $x_c = 1,1$ (плоское течение); 3 — $x_c = 1,3$ (плоское течение); 4 — $x_c = 1,3$ (трехмерное течение).

Рассмотрим эволюцию установившегося решения при увеличении M_∞ для канала с $x_c = 1,3$. Расчеты показали, что при $M_\infty = 1,5$ отошедшая от верхней стенки ударная волна расположена на значительном расстоянии выше по течению от входа в канал. С увеличением M_∞ до 1,68 картина течения сохраняется, при этом расстояние от ударной волны до входа плавно уменьшается, что видно по нижней части графика 3 на рис. 4. Сама форма ударной волны становится несколько вогнутой. Последующее увеличение M_∞ , даже весьма незначительное, приводит к резкому изменению формы ударной волны и скачкообразному изменению координаты x_s от 0,4045 до 1,02 вследствие слияния сверхзвуковых зон, находившихся при $1,5 \leq M_\infty \leq 1,68$

в сужающейся и расширяющейся частях канала. В результате реализуется картина течения того же типа, что и на рис. 3, б. Кривизна скачка уплотнения быстро уменьшается по мере удаления от верхней стенки. Таким образом, на протяжении большей своей части этот скачок является косым и почти прямолинейным.

Последующее уменьшение M_∞ (см. верхнюю часть графика 3 на рис. 4) приводит к обратному переходу от схемы течения с единой сверхзвуковой областью к другой, с двумя сверхзвуковыми зонами. Однако этот обратный переход происходит только при $M_\infty < 1,53$, то есть при значениях M_∞ , заметно меньших, чем 1,68, что говорит о наличии сильного гистерезиса течения.

В невязком приближении и в предположении бесконечно тонкой верхней стенки прямолинейный косой скачок уплотнения S_1 будет присоединен к передней кромке обечайки. Угол наклона потока за таким скачком равен наклону верхней стенки (в нашем случае $\theta = 7^\circ$), а угол наклона самого скачка и число Маха M_1 за ним вычисляются по известным формулам через θ и M_∞ . Скачок S_1 отражается от горизонтальной части нижней стенки в виде прямолинейного скачка S_2 , за которым поток становится снова параллельным оси x . Поэтому угол поворота потока здесь равен также 7° , что позволяет найти число Маха M_2 за скачком S_2 . Расчеты зависимости значений M_2 от M_∞ показывают, что при $M_\infty < 1,57$ характер отражения ударной волны от нижней стенки должен переходить от регулярного к маховскому.

Конечная толщина обечайки приводит к искажению вышеуказанной простой схемы, так как скачок уплотнения оказывается отошедшим от передней кромки обечайки и криволинейным. При уменьшении M_∞ от значения 1,7 угол наклона этого скачка вблизи нижней стенки канала возрастает. Сначала ударная волна, смещаясь вверх по потоку, выходит к горлу канала и взаимодействует с волной разрежения, идущей от точки излома нижней стенки. По мере уменьшения M_∞ и увеличения угла наклона ударная волна начинает отражаться от горизонтальной части нижней стенки (перед изломом). Дальнейшее уменьшение M_∞ и смещение точки отражения вверх по течению создают предпосылки к формированию маховского отражения ударной волны с тройной точкой. Определенное влияние на характер отражения падающей на нижнюю стенку ударной волны оказывает также наличие пограничного слоя. Как показал расчет поля течения, при $M_\infty = 1,53$ и $M_\infty = 1,535$ (см. рис. 3, б) маховская конфигурация с тройной точкой становится хорошо заметной, при этом решение еще устойчиво. Дальнейшее незначительное уменьшение M_∞ приводит к расщеплению единой сверхзвуковой зоны на две, одна из которых расположена перед каналом, а вторая — в расширяющейся его части, где сохранение сверхзвуковой скорости обеспечивается разгоном газа в волне разрежения, идущей от точки излома.

Расчеты показали, что при уменьшении координаты x_c переход от течения с единой сверхзвуковой областью к течению с двумя сверхзвуковыми областями реализуется при меньших значениях M_∞ . Об этом свидетельствует положение петель гистерезиса на графиках, приведенных на рис. 4. Это связано с тем, что с уменьшением x_c выход ударной волны на нижнюю стенку канала имеет место при меньших значениях M_∞ .

Кроме того, сравнение графиков на рис. 4 показывает, что с увеличением координаты точки излома нижней стенки x_c ширина гистерезиса по числу Маха несколько увеличивается.

Расчеты трехмерного обтекания канала № 2 были выполнены для ширины канала, равной 0,8, и координаты излома нижней стенки $x_c = 1,3$. Внешняя присоединенная область была дополнена боковыми частями шириной, также равной 0,8, что

позволило провести расчет обтекания с внешних сторон вертикальных стенок канала. Результаты расчетов показали, что трехмерность почти не сказывается на положении ударной волны внутри канала (рис. 4, верхняя ветвь графика 4). Заметные по сравнению с двумерными расчетами различия имеют место в случае отошедшей ударной волны от входа в канал, то есть при сравнительно малых M_∞ . На рис. 5 показано положение звуковой поверхности в диффузорной части канала и ударной волны перед входом в канал при $M_\infty = 1,6$. Отметим, что наличие пограничного слоя на боковых стенках приводит к более сильной вогнутости ударной волны, чем в двумерном случае. Полученная форма трехмерной ударной волны перед входом в канал качественно согласуется с имеющимися в литературе результатами расчетов реальных воздухозаборников [10, 17].

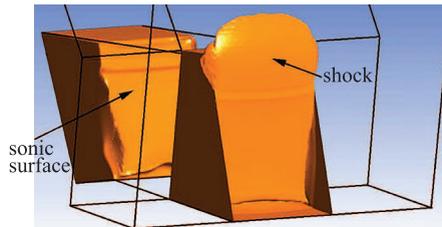


Рис. 5. Трехмерная ударная волна и звуковая поверхность при расчетах обтекания канала № 2 для $M = 1,6$, $x_c = 1,3$.

Заключение. Исследовано явление гистерезиса трансзвукового течения в расширяющемся канале со слабым изломом стенок и в канале конфузурно-диффузорного типа. Результаты расчетов, полученные с помощью разных вычислительных программ, свидетельствуют о том, что влияние численного метода и модели турбулентности на характер структурных переходов от одного типа течения к другому мало. Это обусловлено геометрией рассматриваемых каналов, которая предопределяет сильное взаимодействие ударной волны, формирующейся у входа в канал, с течением расширения вблизи излома нижней стенки. Возникающие бифуркации течения носят тот же характер, что и в случае слияния-расщепления сверхзвуковых зон на поверхности аэродинамических профилей с плоской средней частью, которые исследовались авторами в предыдущие годы.

Данная работа выполнена с использованием ресурсов вычислительного центра СПбГУ (<http://cc.spbu.ru>).

Литература

1. Ben-Dor G. Hysteresis phenomena in reflection of shock waves // 29th International Symposium on Shock Waves. Madison, Wisconsin, USA. July 14–19, 2013. Springer. 2015. Vol. 1. P. 3–11.
2. Кудрявцев А. Н. Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: ИТПМ, 2014. 337 С.
3. Kudryavtsev A. N., Epstein D. B. Hysteresis phenomenon of interaction of shock waves generated by a cylinder array // Shock Waves. 2012. Vol. 22, N 4. P. 341–349.
4. Кудрявцев А. Н., Эпштейн Д. Б. Явление гистерезиса при обтекании системы цилиндров // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 122–131.
5. Jameson A. Airfoils admitting non-unique solutions of the Euler equations. // AIAA paper no. 91-1625; 1991.

6. Иванова А. В., Кузьмин А. Г. Неединственность трансзвукового обтекания аэродинамического профиля // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 4. С. 152–159.
7. Kuzmin A. Instability and bifurcation of transonic flow over airfoils // AIAA paper no: 2005-4800; 2005.
8. Kuzmin A. Bifurcations and buffet of transonic flow past flattened surfaces // Computers & Fluids. 2009. Vol. 38. P. 1369–1374.
9. Kuzmin A. Non-unique transonic flows over airfoils // Computers & Fluids. 2012. Vol. 63. P. 1–8.
10. Kuzmin A. Shock wave instability in a channel with an expansion corner // International J. Applied Mechanics. 2015. Vol. 7, N 2. P. 1–9.
11. Кузьмин А. Г., Матюхина И. А. Бифуркации трансзвукового течения в модели воздухозаборника // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. / СибАК. Новосибирск, 2015. № 7(31). С. 48–53.
12. Kuzmin A. Instability of the shock wave/sonic line interaction. Paris. France 2015. E-print / Centre national de la recherche scientifique. HAL archives, N01136894. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01136894> (дата обращения: 18.12.2016).
13. Riabinin A., Suleymanov A. Bifurcation of transonic flow in the channel with a central body // Conference Topical Problems of Fluid Mechanics 2016. Proceedings, 2016. P. 185–190.
14. Palacios F., Colonna M. R., Aranake A. C., Campos A., Copeland S. R., Economon T. D., Alonso J. J. Stanford University Unstructured (SU2): An open-source integrated computational environment for multi-physics simulation and design // 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2013. AIAA 2013-0287, 60 p. URL: http://su2.stanford.edu/documents/SU2_AIAA_ASM2013.pdf (дата обращения: 18.12.2016).
15. Geuzaine Ch., Remacle J.-F. Gmsh Reference Manual. University of Liège. Belgium. 2014. URL: <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf> (дата обращения: 18.12.2016).
16. Бойченко В. С., Луфилиц Ю. Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла // Ученые записки ЦАГИ. 1976. Т. 7, № 2. С. 8–16.
17. Trapier S., Deck S., Duveau P. Delayed detached-eddy simulation and analysis of supersonic inlet buzz // AIAA J. 2008. Vol. 46, N 1. P. 118–131.

Статья поступила в редакцию 3 июля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Бабарыкин Константин Валентинович — кандидат физико-математических наук, инженер; konst20@mail.ru

Кузьмин Александр Григорьевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник; alexander.kuzmin@pobox.spbu.ru

Рябинин Анатолий Николаевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; a.ryabinin@spbu.ru

TRANSONIC FLOW BIFURCATION IN A CHANNEL WITH A BREAK WALL

Konstantin V. Babarykin, Alexander G. Kuzmin, Anatoly N. Ryabinin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; konst20@mail.ru, alexander.kuzmin@pobox.spbu.ru, a.ryabinin@spbu.ru

This paper addresses the turbulent airflow in 2D and 3D channels of rectangular cross section with weak breaks of walls. Flow regimes with supersonic velocities at the inlet and downstream of the break of the lower wall are examined. Solutions of the unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes equations are obtained with finite-volume solvers ANSYS-15 CFX, Fluent and SU2. A significant hysteresis in the dependence of the shock wave position on the Mach number is demonstrated. The existence of the hysteresis is explained by a shock wave interaction with the supersonic zone located downstream of the break of the lower wall. Refs 17. Figs 5.

Keywords: shock wave, supersonic flow, deceleration, instability.

References

1. Ben-Dor G., “Hysteresis phenomena in reflection of shock waves”, *29th International Symposium on Shock Waves* (Madison, Wisconsin, USA, July 14–19, 2013, Springer, 2015, 1, 3–11).
2. Kudryavtsev A. N., *Computational aerodynamics of supersonic flows with strong shock waves* (Doctor of Science (Phys. and Math.) thesis Novosibirsk, ITAM, 2014, 337 p.) [in Russian].

3. Kudryavtsev A. N., Epstein D. B., “Hysteresis phenomenon of interaction of shock waves generated by a cylinder array”, *Shock Waves* **22**(4), 341–349.
4. Kudryavtsev A. N., Epstein D. B., “Hysteresis phenomenon in supersonic flow past a system of cylinders”, *Fluid Dynamics* **47**(3), 395–402 (2012).
5. Jameson A., “Airfoils admitting non-unique solutions of the Euler equations”, *AIAA paper no.* 91-1625; 1991.
6. Ivanova A. V., Kuzmin A. G., “Nonuniqueness of the transonic flow past an airfoil”, *Fluid Dynam* **39**, 642–648 (2004).
7. Kuzmin A., “Instability and bifurcation of transonic flow over airfoils”, *AIAA paper no.* 2005-4800; 2005.
8. Kuzmin A., “Bifurcations and buffet of transonic flow past flattened surfaces”, *Computers & Fluids* **38**, 1369–1374 (2009).
9. Kuzmin A., “Non-unique transonic flows over airfoils”, *Computers & Fluids* **63**, 1–8 (2012).
10. Kuzmin A., “Shock wave instability in a channel with an expansion corner”, *International J. Applied Mechanics* **7**(2), 1–9 (2015).
11. Kuzmin A.G., Matyukhina I. A., “Transonic flow bifurcation in an intake model”, *Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire: collection of the papers* (Sibac. Novosibirsk, 2015, no. 7 (31), 48–53) [in Russian].
12. Kuzmin A., *Instability of the shock wave/sonic line interaction* (Paris, France 2015, E-print / Centre national de la recherche scientifique. HAL archives, no. 01136894, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01136894>).
13. Riabinin A., Suleymanov A., “Bifurcation of transonic flow in the channel with a central body”, *Conference Topical Problems of Fluid Mechanics 2016. Proceedings*, 185–190 (2016).
14. Palacios F., Colonna M.R., Aranake A. C., Campos A., Copeland S.R., Economon T.D., Alonso J.J., “Stanford University Unstructured (SU2): An open-source integrated computational environment for multi-physics simulation and design”, *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2013. AIAA 2013-0287* (60 p., http://su2.stanford.edu/documents/SU2_AIAA_ASM2013.pdf).
15. Geuzaine Ch., Remacle J.-F., *Gmsh Reference Manual* University of Liège Liège (Belgium, 2014, E-print, <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf>).
16. Boichenko V. S., Lifshitz Yu. B. “Transonic flow near a convex angle”, *Uch. Zapiski TSAGI* **7**(2), 8–16 (1976) [in Russian].
17. Trapier S., Deck S., Duvéau P., “Delayed detached-eddy simulation and analysis of supersonic inlet buzz”, *AIAA J.* **46**(1), 118–131 (2008).

Для цитирования: Бабарькин К. В., Кузьмин А. Г., Рябинин А. Н. Бифуркации трансзвукового течения в каналах с изломом стенок // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 104–112. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.112

For citation: Babarykin K. V., Kuzmin A. G., Ryabinin A. N. Transonic flow bifurcation in a channel with a break wall. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 104–112. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.112