

УТОЧНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОГРАНСЛОЯ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НОРМАЛЬНОГО ТИПА *

И. В. Кириллова, Л. Ю. Коссович

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,
Российская Федерация, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Данная статья продолжает работу авторов, в которой построены уравнения первого порядка приближения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея в оболочках вращения при ударных нормальных поверхностных нагрузках. Поскольку первый порядок асимптотического приближения недостаточен для определения всех компонент напряженно-деформированного состояния, в статье строятся уточненные асимптотические уравнения, позволяющие с асимптотической погрешностью порядка относительной толщины оболочки построить решения для всех компонент перемещений и напряжений. Библиогр. 10 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: оболочки вращения, асимптотические методы, ударные нагрузки, символический метод Лурье, волна Рэлея, погранслои.

В работе [1] построены уравнения первого порядка приближения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея в оболочках вращения при осесимметричных ударных нормальных поверхностных нагрузках. Рассматриваемый погранслоем используется в общей асимптотической схеме расчленения нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) на составляющие с различными показателями изменяемости [2–10]. Представленный в работе [1] асимптотический вывод уравнений рассматриваемого погранслоя позволил получить эллиптические уравнения, описывающие изменение погранслоя по толщине, и гиперболические уравнения, задающие граничные условия на поверхностях оболочки. Однако анализ показал, что первый порядок асимптотического приближения недостаточен для определения всех компонент НДС. Поэтому в данной статье строятся уточненные асимптотические уравнения, позволяющие с асимптотической погрешностью порядка относительной толщины оболочки построить решения для всех компонент перемещений и напряжений.

Приведем постановку задачи в соответствии с [1].

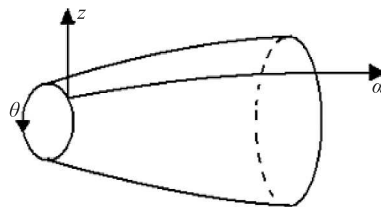


Рис. 1. Оболочка вращения.

Рассмотрим оболочку вращения, изображенную на рис. 1. Введем обозначения: α — длина дуги вдоль образующей срединной поверхности, θ — угол в окружном направлении, z — внешняя нормаль к срединной поверхности. Обозначим напряжения и

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00769-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

перемещения как σ_{ij} и v_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно. Граничные условия на лицевых поверхностях рассмотрим в виде

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, t), \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad (1)$$

где h — полутолщина оболочки, t — время. Рассмотрим однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2)$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\alpha}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}, \quad (3)$$

где E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно. Разрешающие динамические уравнения в безразмерных координатах приведены в [1]. Аналогично случаю цитируемой статьи рассматриваем данный тип НДС как коротковолновый (в общем случае коротковолновый тип НДС описан в [3]) и представляем его в виде комбинации симметричной и антисимметричной составляющих. При этом асимптотически главной составляющей в случае граничных условий (1) является симметричная компонента. Приведем разрешающие уравнения для этой компоненты:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \eta \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \\ & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \eta \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) = 0, \\ & \sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \eta \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ & \sigma_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \eta \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ & \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)h} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где B — расстояние до оси вращения, $\varkappa^2 = (1-2\nu)/(2-2\nu)$, $\eta = h/R$ — малый параметр, R — характерное значение радиуса кривизны.

Построим уравнения погранслоя с помощью символического метода Лурье. Введем операторы $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$. Решая систему (4) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений по ζ , выищем следующую форму общего решения, более простую по сравнению с соответствующей формой в [1]:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_\xi e^{i(1+\zeta)\alpha_1} D_1 + \partial_\xi e^{i(1-\zeta)\alpha_1} D_2 + \beta_1 e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_3 + \beta_1 e^{i(1-\zeta)\beta_1} D_4, \\ v_3 &= i\alpha_1 e^{i(1+\zeta)\alpha_1} D_1 - i\alpha_1 e^{i(1-\zeta)\alpha_1} D_2 + \\ &+ i \left(\partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_3 - i \left(\partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) e^{i(1-\zeta)\beta_1} D_4, \end{aligned} \quad (5)$$

где D_i — произвольные параметры, $\alpha_1^2 = \partial_\xi^2 - \varkappa^2 \partial_\tau^2 + \eta \frac{B'}{B} \partial_\xi$, $\beta_1^2 = \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \eta \frac{B'}{B}$.

Как и в [1], интерпретация символического решения (5) основывается на прямой аналогии представленного символического решения и изображения двойного интегрального преобразования Лапласа (по времени) и Фурье (по продольной координате) при $\partial_\tau \sim s$, $\partial_\xi \sim i\chi$, где s и χ — параметры преобразования Лапласа и Фурье. При этом слагаемые с множителями $(1 - \zeta)$ и $(1 + \zeta)$ в показателях степени экспоненты соответствуют волнам, инициируемым лицевыми поверхностями $\zeta = \pm 1$ и распространяющимся в отрицательном и положительном направлениях оси ζ соответственно.

Подставляя полученные операторные решения в граничные условия на лицевых поверхностях, получим следующую систему алгебраических уравнений для D_i :

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 D_1 + \gamma_1^2 e^{i2\alpha_1} D_2 + \left(\partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3 + \left(\partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{i2\beta_1} D_4 &= \frac{(1 + \nu)h}{E} P, \\ \partial_\xi \alpha_1 D_1 - \partial_\xi \alpha_1 e^{i2\alpha_1} D_2 + \gamma_1^2 D_3 - \gamma_1^2 e^{i2\beta_1} D_4 &= 0, \\ \gamma_1^2 e^{i2\alpha_1} D_1 + \gamma_1^2 D_2 + \left(\partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{i2\beta_1} D_3 + \left(\partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 &= \frac{(1 + \nu)h}{E} P, \\ \partial_\xi \alpha_1 e^{i2\alpha_1} D_1 - \partial_\xi \alpha_1 D_2 + \gamma_1^2 e^{i2\beta_1} D_3 - \gamma_1^2 D_4 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\gamma_1^2 = \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2/2 + \eta \frac{B'}{B} \partial_\xi$.

Получим уточненное, по сравнению с [1], приближение уравнений для граничных условий. Пренебрежем в (6) членами с множителями $e^{i2\alpha_1}$, $e^{i2\beta_1}$. Это соответствует пренебрежению в асимптотике для первого корня уравнения Рэлея—Лэмба [1] при $\chi \rightarrow \infty$ членами с множителями $e^{-2\alpha\chi}$, $e^{-2\beta\chi}$ ($a = \sqrt{1 - \alpha^2 \alpha_R^2}$, $b = \sqrt{1 - \alpha_R^2}$, $\alpha_R = c_R/c_2$, c_R — скорость поверхностных волн Рэлея, $c_2 = \sqrt{E/2(1 + \nu)\rho}$) по сравнению с первым членом $\alpha_R \chi$, играющим главную роль в формировании решения в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея.

Рассмотрим большие значения времени, когда $\tau \gg 1$, т. е. когда фронты волн проходят расстояние, много большее толщины оболочки: $\tau = O(T)$, $T \gg 1$ (при $T = O(1/\eta)$ фронты волн проходят вдоль срединной поверхности расстояние, соизмеримое с характерным значением радиусов кривизн R). Введем новый малый параметр ε и масштабированные переменные y , τ_0 :

$$y = \frac{\xi - \alpha_R \tau}{\varepsilon}, \quad \tau_0 = \varepsilon \tau, \quad \varepsilon = \frac{1}{T}. \quad (7)$$

Введем также новые операторы ∂_y , ∂_{τ_0} по формулам

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_{\tau_0} = \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \quad (8)$$

Переходя в асимптотически упрощенном варианте уравнений (6) к новым операторам (8) и раскладывая полученные уравнения в ряд по малому параметру ε , оставим в них асимптотически главные части:

$$\begin{aligned} \left(2\varepsilon \partial_y \partial_{\tau_0} + \eta K \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_i &= \frac{(1 + \nu)h}{E} \frac{\alpha_R B \omega}{\sqrt{1 - \alpha_R^2}} P, \quad i = 3, 4, \\ \left(a \partial_y^2 + \varepsilon \frac{\alpha^2 \alpha_R^2}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \eta \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_i + \\ &+ \left(g \partial_y^2 + \varepsilon \alpha_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \eta \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$K = 2 + \varkappa_R B_\omega, \quad g = 1 - \varkappa_R^2/2, \quad B_\omega = 2 \left[\frac{\varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2} + \frac{\varkappa_R \varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2 \varkappa_R^2} - \frac{4\varkappa_R}{2 - \varkappa_R^2} \right]^{-1}.$$

Выпишем асимптотическое представление выражений для перемещений и напряжений в новых операторах. Анализ показывает, что в выражениях для перемещений и напряжения σ_{13} достаточно рассмотреть асимптотически главные части, а в выражении для напряжения σ_{33} необходимо учитывать малые члены порядков $O(\eta)$ и $O(\varepsilon)$:

$$v_1 = \partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 + \partial_y e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + b\partial_y e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 + b\partial_y e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4,$$

$$v_3 = ia\partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 - ia\partial_y e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + i\partial_y e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 - i\partial_y e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[L_1 e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 + L_1 e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + L_2 e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 + L_2 e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right], \quad (10)$$

$$\sigma_{13} = i\frac{E}{(1+\nu)h} \left[a\partial_y^2 e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 - a\partial_y^2 e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + g\partial_y^2 e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 - g\partial_y^2 e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right],$$

где операторы L_1, L_2 определяются выражениями

$$L_1 = g\partial_y^2 + \varepsilon \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \eta \frac{B'}{B} \partial_y,$$

$$L_2 = b\partial_y^2 + \varepsilon \frac{\varkappa_R}{b} \partial_y \partial_{\tau_0} + \eta \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_y.$$

Как и в [1], введем объемные и сдвиговые потенциалы Ламе φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 . Здесь индексами «1» и «2» будем обозначать положительное и отрицательное по ζ направления распространения возмущений. Вид операторных представлений потенциальных функций

$$\varphi_i = e^{ia(1\pm\zeta)\partial_\varepsilon} D_i, \quad \psi_i = e^{ib(1\pm\zeta)\partial_\varepsilon} D_{i+2}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

показывает, что в исходных размерных координатах они определяются эллиптическими уравнениями вида

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0, \quad (12)$$

$$b^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = 1, 2,$$

при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \eta \frac{1}{\varkappa_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} = \frac{(1+\nu)B_\omega}{Eh\varkappa_R b} P, \quad z = \pm h,$$

$$\left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \eta \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} +$$

$$+ \left(g + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \eta \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} = 0, \quad z = \pm h. \quad (13)$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам

$$\begin{aligned}
 v_1 &= h \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} \right), \\
 v_3 &= h \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right), \\
 \sigma_{33} &= -\frac{Eh}{1+\nu} [L_3(\varphi_1) + L_3(\varphi_2) + L_4(\psi_1) + L_4(\psi_2)], \\
 \sigma_{13} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha \partial z} + \frac{g}{b} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{g}{b} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha \partial z} \right),
 \end{aligned} \tag{14}$$

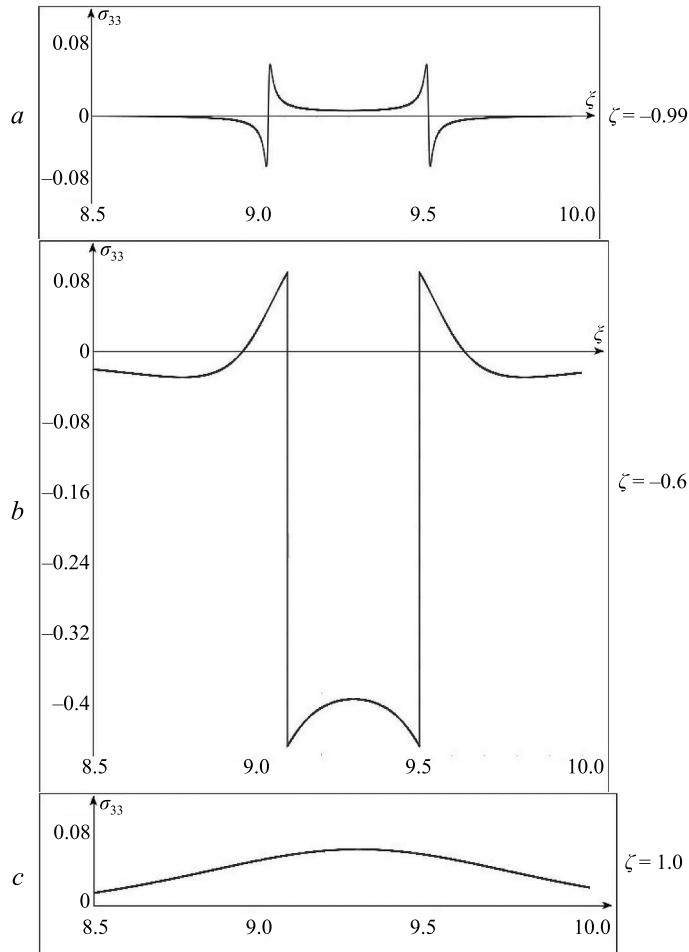


Рис. 2. Графики зависимости напряжения σ_{33} от продольной координаты ξ в момент времени $\tau = 10$ при $L = 0.25$ и при различных значениях нормальной координаты $\zeta = -0.99$ (a), $\zeta = -0.6$ (b), $\zeta = 1.0$ (c).

где операторы L_3, L_4 определяются выражениями

$$L_3 = \left(g + \frac{\alpha_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\alpha_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

$$L_4 = \left(b + \frac{\alpha_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\alpha_R^2}{2bc_R^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Рассмотрим в качестве примера искомое приближение той части эллиптического погранслоя в цилиндрической оболочке, которая инициирована поверхностью $z = -h$ при $P = pH(L - \xi)H(\tau)$ ($\xi \geq 0$) и $P = pH(L + \xi)H(\tau)$ ($\xi \leq 0$), где p, L — постоянные, H — единичная функция Хевисайда. Использование аппарата интегрального преобразования Фурье по пространственной переменной α и преобразования Лапласа по времени дает следующее выражение для асимптотически главной составляющей нормального напряжения в искомой области квазифронта $\xi = \alpha_R \tau + L$:

$$\sigma_{33} = p \frac{B_\omega}{\pi \alpha_R} \left[- \operatorname{arctg} \left(\frac{2La(1 + \zeta)}{a^2(1 + \zeta)^2 - L^2 + (\xi - \alpha_R \tau)^2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2Lb(1 + \zeta)}{b^2(1 + \zeta)^2 - L^2 + (\xi - \alpha_R \tau)^2} \right) \right].$$

Представленные на рис. 2 графики зависимости напряжения σ_{33} от продольной координаты ξ показывают решение в окрестности условных фронтов поверхностных волн Рэлея $\xi = \alpha_R \tau + L, \xi = \alpha_R \tau - L$. Из графиков видно, как убывают решения при удалении от этих условных фронтов и как эволюционирует решение в зависимости от нормальной координаты. Если при $\zeta = -0.99$ решение близко к нулю (исключая скачки на квазифронтах) вследствие условия свободных лицевых поверхностей, то при $\zeta = -0.6$ оно стремительно возрастает, значительно убывая на противоположной лицевой поверхности $\zeta = 1$. Таким образом, предположение о возможности раздельного исследования волн, инициируемых противоположными лицевыми поверхностями, полностью оправдывается.

Литература

1. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестн. С.-Петербург. ун-та, 2016. Сер. 1. Т. 3(61). Вып. 1. С. 139–146.
2. Kaplunov J. D. On the quasi-front in 2D shell theories // C.R. Acad. Sci. 1991. Vol. 313, N2. P. 731–736.
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998.
4. Шевцова Ю. В. Погранслои в окрестности квазифронта в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // «Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами». Межвузовский научный сборник. Саратов: СГТУ, 2000. С. 114–117.
5. Коссович Л. Ю. Асимптотический анализ нестационарных, упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях / Л. Ю. Коссович, Ю. Д. Каплунов // Известия Саратовского университета. Саратов, 2001. Т. I, № 2. С. 111–131.
6. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solid and Structures. 1969. Vol. 5, N6. P. 607–627.

7. Кушеккалиев А. Н. Решение задач о распространении волн в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке при нормальных воздействиях // *Механика деформируемых сред*. Изд-во СГУ, 2002. Вып. 14. С. 106–115.

8. Кушеккалиев А. Н. Волны типа Релея в полубесконечной пластине при нормальном воздействии поперечного типа // *Механика деформируемых сред*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. С. 66–73.

9. Ковалев В. А., Таранов О. В. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // *Смешанные задачи механики деформированного тела: матер. V Рос. конф. с международным участием*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 191–193.

10. Айнола Л. Я., Нигул У. К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // *Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63.

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Кириллова Ирина Васильевна — кандидат физико-математических наук, доцент; nano-bio@sgu.ru

Коссович Леонид Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор; nano-bio@sgu.ru

REFINED EQUATIONS OF ELLIPTIC BOUNDARY LAYER IN SHELLS OF REVOLUTION UNDER NORMAL SHOCK SURFACE LOADING

Irina V. Kirillova, Leonid Yu. Kossovich

Saratov State University, ul. Astrakhanskaya, 83, Saratov, 410012, Russian Federation; nano-bio@sgu.ru

The first order approximations for boundary layer in the vicinity of the surface Rayleigh wave front in shells of revolution under shock surface loads were obtained. The proposed approach for asymptotic constructing of boundary layer equations allowed to obtain elliptic equations describing boundary layer variation by thickness and hyperbolic equations defining boundary conditions on the shell surface. However, the analysis shows that first order approximations are insufficient for deriving all stress-strain state components. Therefore, the refined asymptotic equations were constructed, which allows to obtain all stress-strain components with the accuracy of relative thickness of the shell. Refs 10. Figs 2.

Keywords: shell of revolution, asymptotic methods, shock loading, symbolic method Lourié, Rayleigh wave, boundary layer.

References

1. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., “Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading”, *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1* **3(61)**, Issue 1, 139–146 (2016) [in Russian].
2. Kaplunov J. D., “On the quasi-front in 2D shell theories”, *C. R. Acad. Sci.* **313(2)**, 731–736 (Paris, France, 1991).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V., *Dynamics of thin walled elastic bodies* (Academic Press, San Diego, 1998).
4. Shevtsova Yu. V., *Boundary layer in the vicinity of quasi-front in transversal isotropic cylindrical shell*. In *On the strength of the elements of constructions under the action of loads and working media*, 114–117 (Saratov Technical Univ. Press, Saratov, 2000) [in Russian].
5. Kossovich L. Yu., Kaplunov J. D., “Asymptotic Analysis of the Non-stationary Elastic Waves in Thin-walled Shells of Revolution Initiated by the Edge Shock Load”, *J. Izvestiya Saratov University* **1(2)**, 115–128 (2001) [in Russian].
6. Nigul U., “Regions of effective of application of the methods of 3D and 2D of analysis of transient of stress waves in shells and plates”. *Int. J. Solids and Structures* **54(6)**, 607–627 (1969).
7. Kushekkaliev A. N., “Solution of the problems about the propagation of waves in the transversal-isotropic cylindrical shell under the normal loading”, *Continuum mechanics*, Issue 14, 106–115 (2002) [in Russian].

8. Kushekkaliev A. N., “Rayleigh’s wave in the semi-infinite plate under the transverse normal loading”, *The mechanics of the deformed media*, pp. 66–73 (2004) [in Russian].

9. Kovalev V. A., Taranov O. V., “The separation of non-stationary SSS of cylindrical shells under normal type edge loading”, *Mixed Problems of Mechanics of Solid. Proceedings of the V Russian conf. with Intern. Participation*, 191–193 (Ed. Acad. N.F. Morozov, 2005) [in Russian].

10. Ainola L. Ya., Nigul U. K., “Wave Strain Processes in Elastic Plates and Shells”, *Izv. AN ESSR* **14**(1), 3–63 (1965).

Для цитирования: Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 113–120. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.113

For citation: Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 113–120. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.113