

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ\*

*А. С. Соловьев, А. О. Бочкарев*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В работе рассматривается устойчивость тонкой упругой кольцевой пластины, растянутой в радиальном направлении сосредоточенными силами, приложенными в двух диаметрально противоположных точках внешней окружности. В качестве граничных условий взято шарнирное закрепление на внешней окружности при свободной внутренней.

Решение плоской задачи получено в виде рядов с помощью теории комплексных потенциалов. С помощью метода Ритца были найдены критическое значение силы и форма потери устойчивости при различных отношениях радиусов.

Выявлено, что при достаточно больших относительных размерах отверстия форма потери устойчивости носит симметричный характер и наибольшее выпучивание происходит вблизи отверстия вдоль направления действия силы. При достаточно малых относительных размерах отверстия форма потери устойчивости носит уже антисимметричный характер, и наибольшее выпучивание происходит вдоль диаметра, перпендикулярного направлению действия силы. Библиогр. 15 назв. Ил. 5.

*Ключевые слова:* устойчивость пластины, упругость, метод Ритца.

**1. Введение.** Изучение устойчивости деформируемых систем является важной задачей, имеющей прикладное значение, поскольку потеря устойчивости нередко приводит к большим перемещениям и, как следствие, к разрушению.

Устойчивость плоской формы положения равновесия пластин была всесторонне изучена в классических трудах [1–3] в случае сжатия и, как правило, в однородном поле напряжений. Ряд работ посвящен изучению влияния отверстий на устойчивость сжатых прямоугольных пластин [4–6]. Однако выпучивание пластин может происходить и при растяжении, если в силу особенностей геометрии (наличие отверстий) или неоднородности поля напряжений в пластине возникают зоны сжимающих напряжений. Наибольшее внимание привлекала задача об устойчивости при одноосном растяжении бесконечных пластин с отверстиями различной конфигурации [7, 8], а также пластины наноразмерной толщины с круговым отверстием [9–12]. В этих работах использовалось аналитическое решение для поля напряжений, а критическая Эйлера нагрузка находилась вариационным методом.

Более сложной задачей является изучение устойчивости при растяжении пластины конечных размеров, поскольку в этом случае аналитические решения для неоднородного поля напряжений фактически отсутствуют.

В данной работе рассматривается устойчивость плоской формы равновесия тонкой упругой кольцевой пластины при растяжении сосредоточенными силами величины  $P$ , приложенными в двух диаметрально противоположных точках внешней окружности (см. рис. 1). В качестве граничных условий рассматривается шарнирное закрепление на внешней окружности радиуса  $r_2$  при свободной внутренней окружности радиуса  $r_1$ .

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00260).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Для изучения устойчивости был выбран энергетический критерий. В качестве метода решения выбран метод Ритца. Для применения энергетического критерия необходимо знать напряжения, возникающие в пластине в докритическом состоянии, поэтому первым шагом в анализе проблемы является решение плоской задачи.

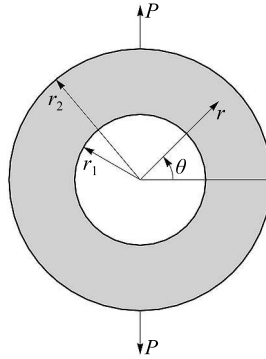


Рис. 1. Растяжение кольца сосредоточенными силами.

**2. Напряжения в плоском состоянии.** Напряжения находятся с помощью теории комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  [13, 14]. Основными уравнениями здесь являются уравнения Колосова—Мусхелишвили, которые записываются в полярной системе координат  $(r, \theta)$  следующим образом:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta} (\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)). \quad (2)$$

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{rr}|_{r=r_1} = \sigma_{r\theta}|_{r=r_1} = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}|_{r=r_2} = \frac{P}{h} \left( \delta \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=r_2} = 0, \quad (4)$$

где  $P$  — величина силы,  $h$  — толщина пластины,  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Функции  $\Phi$  и  $\Psi$  являются аналитическими и могут быть найдены в виде степенных рядов Лорана. Однако такие ряды расходятся на внешней границе из-за наличия  $\delta$ -функции в (4). Обойти эту проблему позволяет метод, представленный в книге А. И. Лурье [14].

Рассмотрим задачу I о растяжении круга радиуса  $r_2$  сосредоточенными силами. Внутри круга справедливы уравнения Колосова—Мусхелишвили (1), (2), а на границе выполняются равенства

$$\sigma_{rr}^I|_{r=r_2} = \frac{P}{h} \left( \delta \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad \sigma_{r\theta}^I|_{r=r_2} = 0. \quad (5)$$

В той же книге Лурье приводятся формулы для потенциалов для этой задачи (с точностью до поворота системы координат), из которых выражаются напряжения:

$$\sigma_{rr}^I = \frac{P}{\pi r_2 h} \frac{(r_2^2 - r^2)^2 (r^4 + 2r^2 r_2^2 + r_2^4 (2 \cos(2\theta) - 1))}{(r^4 + 2r^2 r_2^2 \cos(2\theta) + r_2^4)^2}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{P}{\pi r_2 h} \frac{(-r^8 - 4r^6 r_2^2 \cos(2\theta) + 2r^4 r_2^4 (\cos(2\theta) - 2) + 4r^2 r_2^6 + r_2^8 (2 \cos(2\theta) + 1))}{(r^4 + 2r^2 r_2^2 \cos(2\theta) + r_2^4)^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = \frac{2P}{\pi r_2 h} \frac{r_2^2 \sin(2\theta) (r^2 + r_2^2) (r_2^2 - r^2)^2}{(r^4 + 2r^2 r_2^2 \cos(2\theta) + r_2^4)^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим далее задачу II о нагружении кольца на внутренней границе нагрузкой, противоположной по знаку напряжениям, возникающим в сечении  $r = r_1$  при растяжении круга:

$$\sigma_{rr}^{\text{II}}|_{r=r_1} = -\sigma_{rr}^{\text{I}}|_{r=r_1}, \quad \sigma_{r\theta}^{\text{II}}|_{r=r_1} = -\sigma_{r\theta}^{\text{I}}|_{r=r_1}, \quad (9)$$

$$\sigma_{rr}^{\text{II}}|_{r=r_2} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{\text{II}}|_{r=r_2} = 0. \quad (10)$$

Оказывается, что сумма решений этих двух задач является решением исходной задачи:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{\text{I}} + \sigma_{rr}^{\text{II}}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{\text{I}} + \sigma_{r\theta}^{\text{II}}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^{\text{I}} + \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}}. \quad (11)$$

Действительно, граничные условия выполняются в силу (5), (9), (10), уравнения Колосова—Мухелишвили выполняются в силу линейности.

Задача II, в отличие от задачи I, решалась методом степенных рядов. Ее решение имеет вид

$$\sigma_{rr}^{\text{II}} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m^{(1)}(r) \cos(2m\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m^{(2)}(r) \cos(2m\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{\text{II}} = \sum_{m=1}^{\infty} s_m^{(3)}(r) \sin(2m\theta), \quad (12)$$

где  $s_m^{(k)}$  — многочлены вида

$$s_m^{(k)} = A_m^{(k)} r^{2m} + B_m^{(k)} r^{2m-2} + C_m^{(k)} r^{-2m} + D_m^{(k)} r^{-2m-2}. \quad (13)$$

Метод степенных рядов позволяет получить символичные выражения коэффициентов  $A_m^{(k)}$ ,  $B_m^{(k)}$ ,  $C_m^{(k)}$ ,  $D_m^{(k)}$ , однако здесь они не приводятся ввиду громоздкости и промежуточного характера этапа решения задачи.

О сходимости таких рядов в общем случае написано в книге Н. И. Мухелишвили [13, с. 212]. Отметим лишь, что сходимость значительно ухудшается при увеличении внутреннего радиуса по отношению к внешнему.

**3. Энергетический критерий нахождения критической силы.** Критическая сила определяется с помощью энергетического критерия [3]. В рассмотрение вводятся энергетические характеристики деформации пластины.

Потенциальная энергия изгиба  $U$  определяется формулой

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)] dr d\theta, \quad (14)$$

где  $w = w(r, \theta)$  — прогиб пластины,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad E — \text{модуль Юнга}, \quad (15)$$

$$L(w, w) = 2 \left( \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right). \quad (16)$$

Работа усилий в срединной плоскости, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных выпучиванием [3], дается выражением

$$W = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[ r \sigma_{rr} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \sigma_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] dr d\theta,$$

напряжения здесь берутся из решения плоской задачи, при этом считается, что прогиб весьма мал и не влияет на напряженное состояние.

Согласно энергетическому критерию, имеем

$$\delta(U + W) = 0. \quad (17)$$

Из этого уравнения находятся функция прогиба  $w(r, \theta)$  и критическая сила  $P_c$ .

Если ввести следующим образом безразмерные величины, отмеченные знаком \*:

$$\sigma_{ij} = \frac{P_c}{\pi h r_2} \sigma_{ij}^*, \quad W = \frac{P_c r_2}{2\pi} W^*, \quad U = \frac{D}{2} U^*, \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{P_c r_2}{\pi D}, \quad (19)$$

соотношение (17) переписется как

$$\delta(U^* + \lambda W^*) = 0. \quad (20)$$

Безразмерный параметр  $\lambda$ , пропорциональный величине силы, далее трактуется как собственное число. При этом критическая сила соответствует наименьшему положительному  $\lambda$ .

**4. Метод Ритца.** Искомая функция прогиба  $w(r, \theta)$  аппроксимируется суммой

$$w(r, \theta) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} c_{ij} f_{ij}(r, \theta), \quad (21)$$

где  $c_{ij}$  — неизвестные коэффициенты,  $f_{ij}(r, \theta)$  — базисные функции.

Рассматривается случай шарнирного закрепления на внешней границе, поэтому  $f_{ij}$  должны удовлетворять условию

$$f_{ij}(r_2, \theta) = 0. \quad (22)$$

В качестве базисных функций были выбраны

$$f_{ij}(r, \theta) = (r - r_2)^i T_j(\theta), \quad (23)$$

где

$$T_j(\theta) = \begin{cases} \cos(j\theta), & j < 0, \\ 1, & j = 0, \\ \sin(j\theta), & j > 0. \end{cases} \quad (24)$$

В методе Ритца неизвестные коэффициенты  $c_{ij}$  трактуются как обобщенные координаты. Условие (20) заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}}(U^* + \lambda W^*) = 0. \quad (25)$$

Взяв производную и упростив выражение выше, приходим к линейной задаче на обобщенные собственные значения  $\lambda$  вида

$$\sum_{k=1}^{i_{\max}} \sum_{l=j_{\min}}^{j_{\max}} \left( \tilde{U}_{ijkl} + \lambda \tilde{W}_{ijkl} \right) c_{kl} = 0 \quad \text{для} \quad i = 1..i_{\max}, \quad j = j_{\min}..j_{\max}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{ijkl} = & \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r [\Delta f_{ij} \Delta f_{kl} - (1 - \nu)L(f_{ij}, f_{kl})] dr d\theta + \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r [\Delta f_{kl} \Delta f_{ij} - (1 - \nu)L(f_{kl}, f_{ij})] dr d\theta, \\ \tilde{W}_{ijkl} = & \tilde{W}_{ijkl}^{rr} + \tilde{W}_{ijkl}^{\theta\theta} + 2\tilde{W}_{ijkl}^{r\theta}, \end{aligned}$$

$$\tilde{W}_{ijkl}^{r\theta} = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{r\theta}^* \left( \frac{\partial f_{ij}}{\partial r} \frac{\partial f_{kl}}{\partial \theta} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta} \frac{\partial f_{kl}}{\partial r} \right) dr d\theta, \quad (27)$$

$$\tilde{W}_{ijkl}^{\theta\theta} = 2 \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^* \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta} \frac{\partial f_{kl}}{\partial \theta} dr d\theta, \quad (28)$$

$$\tilde{W}_{ijkl}^{rr} = 2 \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{rr}^* \frac{\partial f_{ij}}{\partial r} \frac{\partial f_{kl}}{\partial r} dr d\theta. \quad (29)$$

**5. Вычисление коэффициентов.** Вычисление коэффициентов  $\tilde{W}_{ijkl}$ ,  $\tilde{U}_{ijkl}$  напрямую с помощью численного интегрирования возможно, но затруднительно, поскольку напряжения, входящие в выражения  $\tilde{W}_{ijkl}$ , известны лишь в виде рядов. Для преодоления этой проблемы коэффициенты были преобразованы символично.

Далее рассмотрим нахождение  $\tilde{W}_{ijkl}^{rr}$ .

Если решать плоскую задачу методом степенных рядов, не вводя  $\sigma_{ij}^I$ , получим напряжения в виде

$$\sigma_{rr} = \frac{P_c}{\pi h r_2} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m^{rr}(r) \cos(2m\theta), \quad (30)$$

где  $\rho_m^{rr}$  имеют вид многочлена

$$\rho_m^{rr}(r) = a_m r^{2m} + b_m r^{-2m} + c_m r^{2m-2} + d_m r^{-2m-2}. \quad (31)$$

В отличие от (12), этот ряд и соответствующие ряды для  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  расходятся на внешней окружности ввиду наличия сосредоточенных сил.

Это означает, что равенство (30) не выполняется при  $r = r_2$ . Однако оно имеет место при  $r_1 \leq r < r_2$ , то есть имеет силу почти всюду на кольце. Таким образом, данное разложение может быть использовано при интегрировании. К тому же при

фиксированном  $r$  выражение (30), по сути, является разложением в ряд Фурье по  $\theta$ . Из математического анализа известно, что такие ряды могут быть проинтегрированы почленно [15, с. 635].

Подставив (23) и (30) в (29), подынтегральное выражение удается упростить и получить различные формулы в зависимости от знака и четности  $j$  и  $l$ .

Например, при  $j \leq 0, l \leq 0$  имеют место формулы

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{i2jk2l}^{rr} = ik \int_{r_1}^{r_2} r(r-r_2)^{i+k-2} \times \\ \times \left( \rho_{|j-l|}^{rr} \|\cos(2(j-l)\theta)\|^2 + \rho_{|j+l|}^{rr} \|\cos(2(j+l)\theta)\|^2 \right) dr, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\widetilde{W}_{i2j-1k2l-1}^{rr} = ik \int_{r_1}^{r_2} r(r-r_2)^{i+k-2} \left( \rho_{|j-l|}^{rr} \|\cos(2(j-l)\theta)\|^2 + \rho_{|j+l-1|}^{rr} \right) dr. \quad (33)$$

Поскольку  $\rho_m^{rr}$  имеет вид (31), после перенормировки пределов интегрирования  $\widetilde{W}_{ijkl}^{rr}$  выражается через линейную комбинацию неполных В-функций. Аналогичные выражения были получены и для оставшихся коэффициентов. В частности, получено, что многие из коэффициентов равны нулю:

$$\widetilde{W}_{i2j-1k2l} = \widetilde{W}_{i2jk2l-1} = 0 \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}, \quad (34)$$

$$\widetilde{W}_{ijkl} = 0, \quad \text{если } jl < 0; \quad \widetilde{W}_{ijk0} = \widetilde{W}_{i0kj} = 0, \quad \text{если } j > 0, \quad (35)$$

$$\widetilde{U}_{ijkl} = 0, \quad \text{если } j \neq l. \quad (36)$$

**6. Численные результаты.** Символьное решение линейной системы (26) является слишком трудоемким, поэтому она была решена численно. Результатом такого вычисления является набор значений собственных чисел  $\lambda$  и соответствующих собственных форм  $w(r, \theta)$  в виде (21). Интерес представляет наименьшее положительное  $\lambda$ , поскольку именно оно соответствует критической силе.

Данный метод также позволяет рассмотреть случай сжатия (рис. 2), тогда критическая сила будет соответствовать наибольшему отрицательному  $\lambda$ , однако в этой работе внимание было сосредоточено именно на растяжении.



Рис. 2. Форма потери устойчивости при сжатии, вид сбоку,  $\nu = 0.3, r_1^* = 0.5$ .

Из соотношений (34)–(36) следует, что собственные формы могут иметь только следующий вид:

$$\begin{aligned} w_1(r, \theta) &= \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=0}^{j_{\max}} \tilde{c}_{ij} (r-r_2)^i \cos(2j\theta), \\ w_2(r, \theta) &= \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=0}^{j_{\max}} \tilde{c}_{ij} (r-r_2)^i \cos((2j+1)\theta), \end{aligned}$$

$$w_3(r, \theta) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=0}^{j_{\max}} \tilde{c}_{ij} (r - r_2)^i \sin(2j\theta),$$

$$w_4(r, \theta) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=0}^{j_{\max}} \tilde{c}_{ij} (r - r_2)^i \sin((2j + 1)\theta).$$

Данное утверждение подтверждается результатами вычислений. Соответствующие собственные числа обозначим  $\lambda_n$ ,  $n = 1..4$ .

Рассмотрим зависимость  $\lambda_n$  от отношения радиусов. Для удобства введем обозначение

$$r_1^* = \frac{r_1}{r_2}. \quad (37)$$

Собственные значения  $\lambda_n$  были вычислены при  $\nu = 0.3$  и  $r_1^*$  в диапазоне от 0.02 до 0.96 с шагом 0.02. Из-за недостаточной точности значения  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  при  $r_1^* = 0.02$ , 0.04, 0.94, 0.96 были отброшены. Результаты изображены на рис. 3.

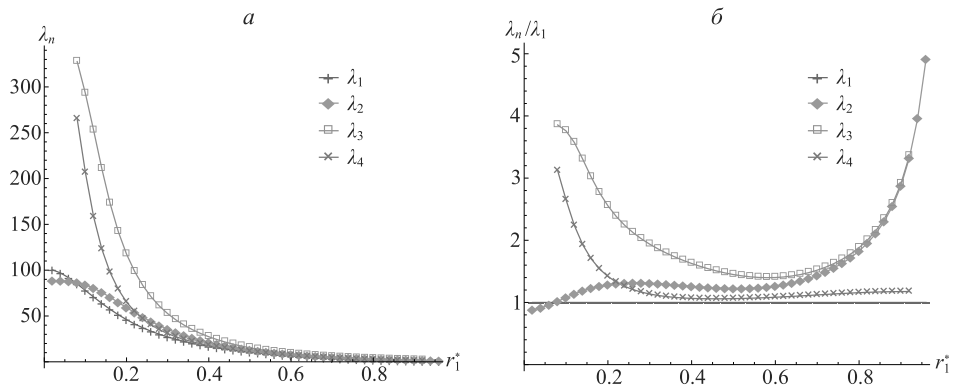


Рис. 3. Зависимость собственных чисел, соответствующих различным формам потери устойчивости, от относительного размера отверстия: в абсолютных значениях (а), в отношении к  $\lambda_1$ , соответствующему двухосносимметричному выпучиванию (б).

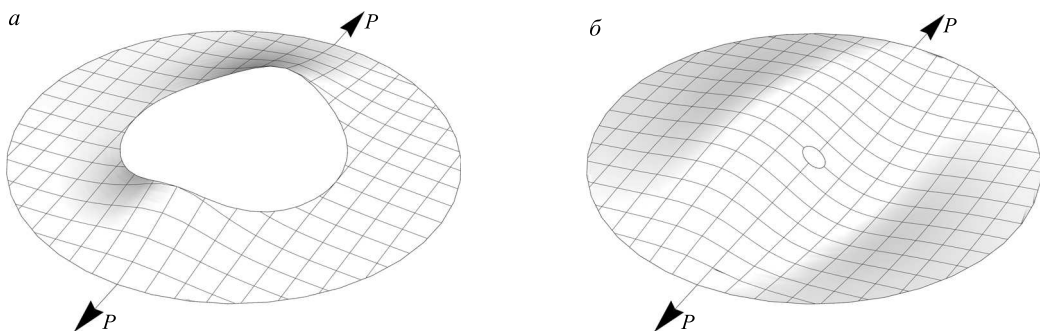


Рис. 4. Формы потери устойчивости при растяжении,  $\nu = 0.3$ ;  $r_1^* = 0.5$  (а),  $r_1^* = 0.05$  (б).

В достаточно широком диапазоне  $r_1^*$  в качестве формы потери устойчивости преобладает симметричная форма  $w_1$  (рис. 4, а). Однако с уменьшением  $r_1^*$  энергетически выгодной становится форма  $w_2$ , обладающая осью антисимметрии, совпадающей

с линией приложения сил (рис. 4, б). Для более наглядной картины на рис. 3, б представлен график отношения  $\lambda_n/\lambda_1$  в зависимости от  $r_1^*$ .

С помощью метода Ньютона было получено равенство  $\lambda_1 = \lambda_2$  при  $r_1^* = 0.0746 \pm 0.0006$ . Эта погрешность связана в первую очередь с погрешностью вычисления  $\lambda$ .

Для проверки сходимости была рассмотрена последовательность решений  $\lambda_n(m)$ , полученных при

$$i_{\max} = 4 + m, \quad j_{\max} = 5 + m; \quad m = 1..4, \quad (38)$$

где  $i_{\max}, j_{\max}$  определяются в формулах для  $w_1, w_2$ . Было рассмотрено относительное отклонение

$$\delta_n^m(r_1^*) = \frac{|\lambda_n(m+1) - \lambda_n(m)|}{\lambda_n(m+1)}; \quad m = 1..3, \quad n = 1..2. \quad (39)$$

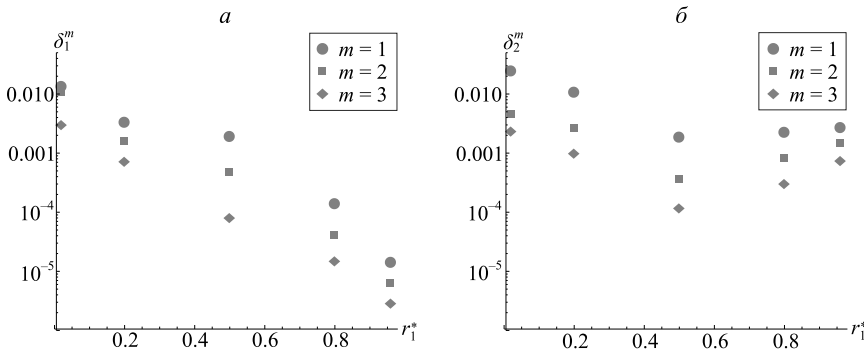


Рис. 5. Значения  $\delta_n^m(r_1^*)$  при различных  $m$  в зависимости от  $r_1^*$ :  $n = 1$  (а),  $n = 2$  (б). Шкала логарифмическая.

На рис. 5 изображены значения  $\delta_n^m(r_1^*)$  в логарифмической шкале, разделенные на 3 группы точек, соответствующих разным значениям  $m$ .

Малость величины  $\delta_n^m$  означает, что найденное значение  $\lambda_n$  практически не изменяется при увеличении количества слагаемых в методе Рунге. К тому же с увеличением  $m$  значение  $\delta_n^m$  уходит ближе к нулю, а значит, последовательность решений сходится в себе.

**6. Заключение.** В работе найдены критическая сила и форма потери устойчивости кольца при различных размерах отверстия. Как и следовало ожидать, критическая величина силы возрастает с уменьшением размера отверстия. Однако оказалось, что при достаточно малых размерах отверстия потеря устойчивости реализуется через антисимметричную форму, что обусловлено действием сжимающих радиальных напряжений в направлении, перпендикулярном действию силы. В то же время при больших размерах отверстия первой является симметричная форма, которая обусловлена действием сжимающих окружных напряжений, локализованных вблизи кромки отверстия с касательной, перпендикулярной направлению действия силы.

Реализованный в работе метод позволяет найти коэффициенты  $\tilde{U}_{ijkl}, \tilde{W}_{ijkl}$  линейной системы (26) в символьном виде, что значительно ускоряет компьютерные расчеты. Данный метод с минимальными изменениями пригоден для решения других задач об устойчивости пластин с радиальной симметрией, если известно разложение напряжений в тригонометрические ряды по  $\theta$ .



Авторы благодарят Н.Ф. Морозова за помощь, оказанную при работе над статьей.

## Литература

1. *Панкович П. Ф.* Строительная механика корабля. Ч. II. М.: Морской транспорт, 1941. 960 с.
2. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1946. 532 с.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
4. *Narayana R., Chow F. Y.* Ultimate Capacity of Uniaxially Compressed Perforated Plates // *Thin-Walled Structures*. 1984. Vol. 2. P. 241–264.
5. *Azizian Z. G.* Instability and nonlinear analysis of thin walled structures. Ph.D. thesis: University Coll., Cardiff, United Kingdom. 1985.
6. *Лебедев А. В.* Влияние вырезов на устойчивость прямоугольных упругих пластин при осевом сжатии // *Вестник СПбГУ. Сер. 1.* 2009. Вып. 4. С. 77–83.
7. *Гузъ А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г. и др.* Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 184 с.
8. *Бочкарев А. О., Даль Ю. М.* Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами // *Доклады АН СССР*. 1989. Т. 308, № 2. С. 312–315.
9. *Бочкарев А. О., Греков М. А.* Локальная потеря устойчивости пластины с круговым отверстием при одноосном растяжении // *ДАН*. 2014. Т. 457, № 3. С. 282–285.
10. *Bochkarev A. O., Grekov M. A.* On symmetrical and antisymmetrical buckling of a plate with circular nanohole under uniaxial tension // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 9, N 125. P. 6241–6247.
11. *Bochkarev A. O., Grekov M. A.* The influence of the surface stress on the local buckling of a plate with a circular nanohole // *Proceedings of International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP)*, 2015. P. 367–370.
12. *Баур С. М., Кашипанова С. В., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н.* Об устойчивости пластины наноразмерной толщины, ослабленной круговым отверстием // *ДАН*. 2014. Т. 458, № 2. С. 158–160.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
14. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
15. *Филтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / предисл. и примеч. А. А. Флоринского. 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т. III. 728 с.

Статья поступила в редакцию 4 мая 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

## Сведения об авторах

*Соловьев Антон Сергеевич* — студент; icemtel@gmail.com

*Бочкарев Анатолий Олегович* — кандидат физико-математических наук, доцент; a.bochkarev@spbu.ru

## BUCKLING OF AN ANNULAR PLATE UNDER TENSILE POINT LOADING

*Anton S. Solovev, Anatoly O. Bochkarev*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; icemtel@gmail.com, a.bochkarev@spbu.ru

In this paper, we address the stability of an elastic thin annular plate stretched by two point loads that are located on the outer boundary. A roller support is considered on the outer boundary while the inner edge of the plate is free.

Muskhelishvili's theory of complex potentials has been applied to obtain a solution of the plane problem in the form of a power series. The buckling problem has been solved using the Rayleigh-Ritz method, based on the energy criterion. The critical Euler force and the respective buckling mode have been computed. Dependence between the critical force and the relative orifice size has been illustrated.

Analysis of the results has shown that a symmetric buckling mode takes place for a sufficiently large hole, with the greatest deflection observed around the hole along the force line. However, an antisymmetric

buckling mode occurs for relatively small holes, with the greatest deflection being along a line that is orthogonal to the force line. Refs 15. Figs 5.

*Keywords:* stability, buckling, plate, elasticity, Rayleigh—Ritz method.

## References

1. Papkovich P. F., *Structural Mechanics of Ships* (Morskoj Transport, Moscow, 1941, **2**) [in Russian].
2. Timoshenko S. P., *Stability of elastic systems* (OGIZ. Gos. izd-vo tehniko-teoret. lit., Leningrad, 1946) [in Russian].
3. Volmir A. S., *Stability of deformable systems* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
4. Narayanan R., Chow F. Y., “Ultimate Capacity of Uniaxially Compressed Perforated Plates”, *Thin-Walled Structures* **2**, 241–264 (1984).
5. Azizian Z. G., “Instability and nonlinear analysis of thin walled structures” (Ph.D. thesis: University Coll., Cardiff, United Kingdom, 1985).
6. Lebedev A. V., “The influence of notches on the stability of rectangular plates under uniaxial compression”, *Vestnik SPbSU. Ser. 1*, Issue 4 (2009) [in Russian].
7. Guz A. N. Dyshel M. Sh., Kuliev G. G., et al. *Failure and stability of thin solids with cracks* (Nauk. dumka, Kiev, 1981) [in Russian].
8. Bochkarev A. O., Dal Yu. M., “Local stability of elastic plates with notches”, *Doklady Academy of Science USSR* **308**(2), 312–315 (1989) [in Russian].
9. Bochkarev A. O., Grekov M. A., “Local instability of a plate with a circular nanohole under uniaxial tension”, *Doklady Phys.* **59**(7), 330–334 (2014).
10. Bochkarev A. O., Grekov M. A., “On symmetrical and antisymmetrical buckling of a plate with circular nanohole under uniaxial tension”, *Applied Mathematical Sciences* **9**(125), 6241–6247 (2015).
11. Bochkarev A. O., Grekov M. A., “The influence of the surface stress on the local buckling of a plate with a circular nanohole”, *Proceeding of International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP)*, 367–370 (2015).
12. Bauer S. M., Kashtanova S. V., Morozov N. F., Semenov B. N., “Stability of a nanoscale-thickness plate weakened by a circular hole”, *Doklady Phys.* **59**(3), 416–418 (2015); Erratum. **60**(3), 145 (2015).
13. Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Noordhoff, Groningen, 1963).
14. Lurie A. I., *Theory of elasticity* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
15. Fihtengoltz G. M., *The course of differential and integral calculus* (FIZMATLIT, Moscow, 2003, **3**) [in Russian].

**Для цитирования:** Соловьев А. С., Бочкарев А. О. Устойчивость кольцевой пластины при растяжении сосредоточенными силами // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 136–145. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.116

**For citation:** Solovev A. S., Bochkarev A. O. Buckling of an annular plate under tensile point loading. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 136–145. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.116