

АСТРОНОМИЯ

УДК 629.7.031.7

MSC 70G45, 70M20, 70F15

**ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ
СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА ОПТИЧЕСКИ ВЫПУКЛУЮ
КОСМИЧЕСКУЮ КОНСТРУКЦИЮ****Н. А. Неровный*

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

В статье рассмотрены вопросы, связанные с определением светового давления на космические оптически выпуклые конструкции. Представлено соотношение для элементарной силы светового давления, действующей на бесконечно малый элемент поверхности космической конструкции оптически выпуклой геометрии с учетом того, что некоторые части этой конструкции могут находиться в тени. Выведено представление элементарной силы светового давления в виде рядов на основе разложения функции модуля в ряд по полиномам Чебышёва первого рода. Получены тензорные соотношения, описывающие форму и оптические свойства поверхности независимо от ее ориентации. Для выведенных тензорных соотношений записаны выражения для главного вектора и главного момента сил светового давления на космическую конструкцию. Представленные соотношения проверены на примере плоского двухстороннего солнечного паруса. Полученные результаты возможно использовать при анализе динамики центра масс космических аппаратов и вокруг центра масс под действием светового давления, для разработки адаптивных систем управления спутниками, которые бы учитывали световое давление. Библиогр. 41 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: солнечный парус, световое давление, главный вектор, главный момент.

1. Введение. Настоящая работа связана с расчетом влияния силы светового давления на космические конструкции. Явление светового давления было впервые предсказано Дж. К. Максвеллом на основании его теории электромагнетизма [1]. Экспериментальным путем световое давление было обнаружено П. Н. Лебедевым [2, 3]. Впервые предложил использовать силу светового давления для полетов в космическом пространстве Ф. А. Цандер в середине 20-х годов XX века [4]. Если говорить о теме солнечных парусов, достаточно полный обзор современного состояния разработок содержит монография К. Макиннеса [5].

Явление светового давления, помимо астрофизических приложений, продолжали рассматривать с точки зрения динамики центра масс космического аппарата (КА).

*Работа выполнена в рамках работы над космическим экспериментом «Парус–МГТУ».

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Библиография по изучению светового давления весьма обширна и насчитывает сотни наименований работ. Мы укажем лишь несколько основополагающих. Среди ставших классическими можно выделить труды таких ученых, как П. Е. Эльясберг [6], М. Б. Балк [7], А. П. Скопцов [8], В. В. Белецкий [9], В. И. Левантовский [10] и др. Большой вклад в развитии отечественной школы астродинамики солнечных парусов сделала Е. Н. Поляхова [11, 12].

Рассматривалась также задача динамики КА вокруг центра масс под действием момента сил светового давления, например, для стабилизации ориентации КА в межпланетном пространстве. Основополагающими можно считать работы А. А. Карымова [13], Б. В. Раушенбах и Е. Н. Токаря [14], В. И. Попова [15]. Среди вышедших в последние годы работ можно отметить труды В. Н. Лихачева, В. В. и Вас. В. Сазоновых, А. И. Ульяшина, М. М. Комарова, Д. Н. Климович, Я. Г. Сапункова, Ю. Н. Челнокова и др. [16–22]. Недавно вышла монография [23], где приведено приближенное выражение для момента сил светового давления на осесимметричное тело.

Следует подчеркнуть, что Б. В. Раушенбах и Е. Н. Токарь указали на сложность вычисления момента сил светового давления в случаях, если форма внешней поверхности КА сложна, если форма поверхности КА будет меняться при изменении ориентации аппарата относительно Солнца, если различные части поверхности имеют различные коэффициенты отражения, в особенности в аналитической постановке [14, с. 172]. Возможно сделать аналогичное утверждение и для главного вектора сил светового давления.

В рамках разработки теории светового давления на космические объекты были получены результаты, согласно которым для определения главного вектора и главного момента сил светового давления возможно отделить описание конструкции от ее ориентации (работы Д. Ширса, Л. Риос-Райса, Дж. Макмахона и др. [24–31]). Указанные авторы развивают тензорный подход к описанию светового давления. Тензорный подход также развивается и другими исследователями [32, 33]. Настоящая работа выполнена в рамках тензорного подхода к описанию сил светового давления и является продолжением исследований автора [34–36]. Целью работы является разработка перспективного метода для расчета светового давления на космические конструкции.

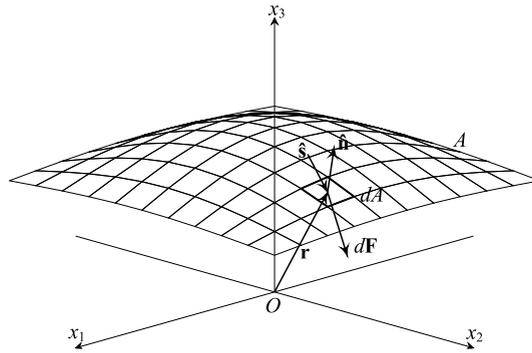
2. Элементарная сила светового давления. Как было показано в работах [24, 36], возможно записать аналитические выражения для главного вектора и главного момента сил светового давления на поверхность КА при допущении, что ориентация КА не изменяется существенно в процессе его полета, то есть, например, если не изменяется набор освещенных поверхностей.

Выражения для элементарной силы светового давления на бесконечно малый элемент dA в векторной постановке плоской задачи в рамках модели зеркально-диффузной схемы отражения были впервые получены в 1980-х годах в пионерских монографиях [37, 38]. В них проекции сил определялись в направлении нормали к теневой стороне паруса. В нашей задаче мы пользуемся аналогичной записью по [5], где проекции записаны по нормали к освещенной стороне (см. рисунок):

$$d\mathbf{F} = P(R) [-a_0 \hat{\mathbf{n}} - a_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} + a_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} - 2a_3 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 \hat{\mathbf{n}}] dA. \quad (1)$$

Обобщенные оптические параметры имеют вид

$$a_0 = \frac{\varepsilon B \sigma T^4}{P(R)}; \quad a_1 = 1 - \rho s; \quad a_2 = B \rho (1 - s); \quad a_3 = \rho s.$$



Геометрическая схема взаимодействия светового излучения с частью поверхности A .

В данном случае используются следующие обозначения:

- $P(R) = q_0/c$ — световое давление на плоскую абсолютно черную площадку перпендикулярно падающему излучению на расстоянии R от Солнца, причем Солнце принимается точечным источником, а световой поток на расстоянии R составляет q_0 (приблизительно 1400 Вт/м^2 для орбиты Земли), за c обозначена скорость света в вакууме;
- $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор местной нормали к поверхности КА;
- $\hat{\mathbf{s}}$ — единичный вектор, задающий направление от источника света в связанной с КА системе координат;
- ε — коэффициент эмиссии или переизлучения элемента поверхности;
- σ — постоянная Стефана–Больцмана;
- T — температура элемента поверхности;
- B — коэффициент, равный $2/3$ для диффузной рассеивающей поверхности (имеет смысл только для материалов, у которых отсутствует анизотропия оптических свойств в зависимости от направления вдоль поверхности), в литературе часто используется название «коэффициент Ламберта»;
- ρ — интегральный коэффициент отражения материала;
- s — степень зеркальности, показывающая, какая часть излучения отражается зеркально, а какая — диффузно.

Напомним, что эта схема соответствует так называемой идеально отражающей поверхности, т. е. поверхности, взаимодействие лучей с которой происходит строго по законам геометрической оптики, хотя коэффициент отражения необязательно равен единице.

Что касается последующей векторной разработки уравнения (1), необходимо заметить, что действие света на каждый элемент поверхности оптически выпуклого

тела не зависит от свойств других элементов поверхности, причем суммарное действие светового потока на тело определяется интегрированием локального воздействия на поверхность. При этом чаще всего употребляется принятая нами классическая зеркально-диффузная схема в предположении, что поверхность является изотропной по отношению к параллельному потоку лучей от бесконечно удаленного точечного источника светового излучения, а действия падающего и отраженного потоков аддитивны. Здесь и далее под *оптически выпуклой конструкцией* будем понимать оптически непрозрачную конструкцию выпуклой геометрической формы, если для любого элемента поверхности dA не существует другого элемента поверхности, на который бы попадали лучи света, отраженные или излученные исходным бесконечно малым элементом.

Многие характеристики взаимодействия светового потока с поверхностью аналогичны тем, которые используются в аэродинамике разреженных газов. Поскольку мы в (1) применили запись силы не через тригонометрические функции углов, а через скалярные произведения векторов, а ниже мы применим тензоры к представлению элементарной силы в виде рядов, следует напомнить, что тензорные методы были разработаны В. В. Белецким для описания зеркально-диффузного взаимодействия КА с аэродинамическим потоком в книге [39].

В дальнейших построениях для оптически выпуклой конструкции будем считать, что конструкция может принимать произвольную ориентацию относительно падающего солнечного излучения. Учет этого условия аналогичен замене в (1) выражения $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ на отношение

$$\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} - |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|}{2}.$$

Выражение выше можно интерпретировать как функцию освещенности в работах Дж. Макмахона и Д. Ширса [28], [29, формула (15) и комментарии ниже], однако указанные авторы были удовлетворены получившейся численно-аналитической теорией. Действительно, если $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} > 0$, получается, что площадка освещается с внутренней для нее стороны, чего не может быть. Запишем выражение (1) в новой постановке задачи о произвольной ориентации нормали:

$$d\mathbf{F} = \frac{P(R)}{2} \left(-2a_0\hat{\mathbf{n}} - a_1(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} - |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|)\hat{\mathbf{s}} + a_2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} - |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|)\hat{\mathbf{n}} - a_3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} - |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|)^2\hat{\mathbf{n}} \right) dA,$$

или, после преобразований,

$$d\mathbf{F} = \frac{P(R)}{2} \left(-2a_0\hat{\mathbf{n}} - a_1(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{s}} + a_2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{n}} - 2a_3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^2\hat{\mathbf{n}} + a_1|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|\hat{\mathbf{s}} - a_2|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|\hat{\mathbf{n}} + 2a_3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{n}} \right) dA. \quad (2)$$

3. Представление элементарной силы в виде рядов. Так как область значений $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ составляет $[-1; 1]$, величину $|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}|$ возможно разложить в известный ряд по многочленам Чебышёва первого рода [40]:

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n T_{2n}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})}{-1 + 4n^2} = \\ &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n (-1)^k n(2n-k-1)!}{(-1+4n^2)k!(2n-2k)!} 4^{n-k} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^{2(n-k)}. \quad (3) \end{aligned}$$

После несложных преобразований запишем ряд (3) в следующем виде:

$$|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}| = \sum_{m=1}^{\infty} B_m (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^{2m}, \quad (4)$$

где

$$B_m = -\frac{(-1)^m 4^{m+1}}{\pi(2m)!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n(n+m-1)!}{(-1+4n^2)(n-m)!}. \quad (5)$$

Ряды в выражении (5) расходятся, однако для любого конечного числа членов ряда при окончательном суммировании (4) мы получаем сходящуюся последовательность. В дальнейшем при рассмотрении сумм бесконечных рядов будем подразумевать, что для них либо взято конечное число членов ряда, либо была произведена перенормировка, если это допустимо. Анализ возможности перенормировки указанных рядов выходит за рамки рассматриваемой задачи.

Подставим соотношение (4) в (2) и получим выражение для элементарной силы светового давления в виде рядов:

$$d\mathbf{F} = \frac{P(R)}{2} \left(-2a_0 \hat{\mathbf{n}} - a_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} + a_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} - 2a_3 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 \hat{\mathbf{n}} + a_1 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^{2m} \hat{\mathbf{s}} - a_2 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^{2m} \hat{\mathbf{n}} + 2a_3 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})^{2m+1} \hat{\mathbf{n}} \right) dA. \quad (6)$$

4. Главный вектор и главный момент сил светового давления. Используя подход, приведенный в работе [36], запишем следующие соотношения:

$$\underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \dots (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})}_p \hat{\mathbf{n}} = \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}})}_{p+1} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_p = \mathcal{J}_A^{p+1} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_p;$$

$$\underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \dots (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})}_p \hat{\mathbf{s}} = \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathcal{E}^2)}_p \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_{p+1} = \mathcal{J}_B^{p+2} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_{p+1},$$

где \mathcal{J}_A^{p+1} и \mathcal{J}_B^{p+2} — некоторые тензоры в евклидовом пространстве ранга $p+1$ и $p+2$ соответственно.

Запишем (6) в новых тензорных обозначениях:

$$d\mathbf{F} = \frac{P(R)}{2} \left(-2a_0 \hat{\mathbf{n}} - a_1 \mathcal{J}_B^3 \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} + a_2 \mathcal{J}_A^2 \cdot \hat{\mathbf{s}} - 2a_3 \mathcal{J}_A^3 \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} + a_1 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m \mathcal{J}_B^{2m+2} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_{2m+1} - a_2 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m \mathcal{J}_A^{2m+1} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_{2m} + 2a_3 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m \mathcal{J}_A^{2m+2} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \dots \hat{\mathbf{s}}}_{2m+1} \right) dA. \quad (7)$$

Группируя в (7) члены бесконечных сумм между собой, вводя дополнительные обозначения, получим выражение для силы светового давления на элементарную

площадку, которая воспринимает только то излучение, которое падает на внешнюю сторону:

$$d\mathbf{F} = P(R) \left(\mathcal{J}^1 + \sum_{n=2}^{N_{\max}} \mathcal{J}^n \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{n-1} \right) dA, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^1 &= -a_0 \hat{\mathbf{n}}; \quad \mathcal{J}^2 = \frac{1}{2} a_2 \mathcal{J}_A^2; \quad \mathcal{J}^3 = \frac{1}{2} \left(-a_1 \mathcal{J}_B^3 - 2a_3 \mathcal{J}_A^3 - B_1 a_2 \mathcal{J}_A^3 \right); \\ \mathcal{J}^n &= \frac{1}{2} \left(-B_{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - (-1)^n}{2} a_2 \mathcal{J}_A^n + B_{\frac{n-2}{2}} \frac{1 + (-1)^n}{2} (a_1 \mathcal{J}_B^n + 2a_3 \mathcal{J}_A^n) \right), \quad n > 3; \\ \mathcal{J}_A^n &= \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}}}_n; \quad \mathcal{J}_B^n = \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}}}_{n-2} \otimes \mathcal{E}^2, \end{aligned}$$

где \mathcal{E}^2 — единичный тензор второго ранга.

Введем тензор \mathcal{R}^2 следующим образом:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathcal{R}^2 \cdot \mathbf{a}. \quad (9)$$

Очевидно, что тензор \mathcal{R}^2 из (9) является кососимметричным и может быть представлен в матричном виде:

$$\mathcal{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для записи выражения элементарного момента будем использовать соотношения:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \dots (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})}_p (\mathcal{R}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}}) &= \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathcal{R}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}})}_p \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_p = \mathcal{L}_A^{p+1} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_p; \\ \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \dots (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})}_p (\mathcal{R}^2 \cdot \hat{\mathbf{s}}) &= \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathcal{R}^2)}_p \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{p+1} = \mathcal{L}_B^{p+2} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{p+1}. \end{aligned}$$

Выразив силу (6) в новых тензорных обозначениях, запишем ее момент:

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathcal{R}^2 \cdot d\mathbf{F} = \frac{P(R)}{2} \left(-2a_0 \mathcal{R}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - a_1 \mathcal{L}_B^3 \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} + a_2 \mathcal{L}_A^2 \cdot \hat{\mathbf{s}} - \right. \\ \left. - 2a_3 \mathcal{L}_A^3 \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} + a_1 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m \mathcal{L}_B^{2m+2} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{2m+1} - a_2 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m \mathcal{L}_A^{2m+1} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{2m} + \right. \\ \left. + 2a_3 \sum_{m=1}^{N_{\max}} B_m \mathcal{L}_A^{2m+2} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{2m+1} \right) dA, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{L}_A^n = \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}}}_{n-1} \otimes \mathcal{R}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}}; \quad \mathcal{L}_B^n = \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{n}}}_{n-2} \otimes \mathcal{R}^2.$$

После преобразований, аналогичным использовавшимся при выводе соотношения для силы, получим выражение для момента от элементарной силы светового давления:

$$d\mathbf{M} = P(R) \left(\mathcal{L}^1 + \sum_{n=2}^{N_{\max}} \mathcal{L}^n \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{n-1} \right) dA,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= -a_0(\mathcal{R}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}}); & \mathcal{L}^2 &= \frac{1}{2}a_2\mathcal{L}_A^2; & \mathcal{L}^3 &= \frac{1}{2} \left(-a_1\mathcal{L}_B^3 - 2a_3\mathcal{L}_A^3 - B_1a_2\mathcal{L}_A^3 \right); \\ \mathcal{L}^n &= \frac{1}{2} \left(-B_{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - (-1)^n}{2} a_2\mathcal{L}_A^n + B_{\frac{n-2}{2}} \frac{1 + (-1)^n}{2} (a_1\mathcal{L}_B^n + 2a_3\mathcal{L}_A^n) \right), & n &> 3. \end{aligned}$$

Проинтегрируем выражения (8) и (4) по всей поверхности и введем следующие обозначения:

$$\mathcal{I}^n = \int_A \mathcal{J}^n dA; \quad \mathcal{K}^n = \int_A \mathcal{L}^n dA, \quad n \geq 1.$$

Получим выражения для главного вектора и главного момента сил светового давления на произвольное оптически выпуклое тело:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= P(R) \left(\mathcal{I}^1 + \sum_{n=2}^{N_{\max}} \mathcal{I}^n \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{n-1} \right); & (10) \\ \mathbf{M} &= P(R) \left(\mathcal{K}^1 + \sum_{n=2}^{N_{\max}} \mathcal{K}^n \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{s}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{s}}}_{n-1} \right). \end{aligned}$$

5. Сила светового давления на плоский двусторонний солнечный парус. Рассмотрим плоскую пластину бесконечно малой толщины бесконечно большой теплопроводности, отражающую излучение только зеркально, при этом температура пластины T поддерживается постоянной с помощью некоторого устройства. Площадь пластины равна A , пластина лежит в плоскости Ox_1x_2 . Коэффициент отражения верхней части пластины — ρ_1 , коэффициент отражения нижней части пластины — ρ_2 . Степень черноты верхней и нижней частей одинакова. Положительное направление нормали для верхней части пластины зададим вектором $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)^T$. Для обратной стороны пластины вектор нормали соответственно равен $\hat{\mathbf{n}}_2 = (0, 0, -1)^T = -\hat{\mathbf{n}}$.

Так как степень черноты обеих сторон пластины одинакова, все компоненты тензора \mathcal{I}^1 равны нулю. Так как диффузное отражение отсутствует, имеем $a_2 = 0$, поэтому пренебрегаем всеми частями соотношений, где бы участвовал данный параметр. В частности, отсюда следует равенство $\mathcal{I}^2 = 0$.

Соотношения между тензорами \mathcal{J}_A и \mathcal{J}_B для верхней и нижней сторон соответственно возможно записать следующим образом:

$$\mathcal{J}_{A2}^n = (-1)^n \mathcal{J}_{A1}^n = (-1)^n \mathcal{J}_A^n; \quad \mathcal{J}_{B2}^n = (-1)^{n-2} \mathcal{J}_{B1}^n = (-1)^n \mathcal{J}_B^n.$$

Сначала рассмотрим вариант ориентации падающего излучения относительно пластины, когда оно падает перпендикулярно на верхнюю сторону, то есть когда вектор ориентации равен $\hat{s} = (0, 0, -1)^T$. В таком случае в выражении (10) нам необходимо записать лишь некоторые компоненты тензоров \mathcal{I} :

$$I_{333}^3 = -\frac{1}{2}A(\rho_1 - \rho_2); \quad \underbrace{I_{3\dots 3}^{2n}}_{2n} = \frac{1}{2}B_{n-1}(2 + \rho_1 + \rho_2).$$

Легко показать, что $F_1 = F_2 = 0$, а третья компонента главного вектора будет определяться следующим соотношением:

$$F_3 = P(R)A \left(-\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) - \frac{1}{2}(2 + \rho_1 + \rho_2) \sum_{n=2}^{N_{\max}} B_{n-1} \right) \approx -P(R)A(1 + \rho_1),$$

что совпадает с общеизвестным классическим выражением для светового давления на зеркальную пластину, в том числе с приведенным в соотношении для силы светового давления на зеркальный солнечный парус [4, 5, 12].

Задавая вектор ориентации $\hat{s} = (0, 0, 1)^T$, получим $F_1 = F_2 = 0$ и

$$F_3 = P(R)A \left(-\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) + \frac{1}{2}(2 + \rho_1 + \rho_2) \sum_{n=2}^{N_{\max}} B_{n-1} \right) \approx P(R)A(1 + \rho_2),$$

что также совпадает с известным решением.

6. Заключение. Мы получили выражения, в которых описание геометрии и свойств поверхности конструкции явным образом отделено от описания ориентации конструкции относительно падающего излучения. Приведенные выражения позволяют, вычислив компоненты тензоров \mathcal{I} и \mathcal{K} один раз, далее, например в расчетах баллистики или в расчетах динамики КА вокруг центра масс, использовать лишь простое скалярное произведение тензоров \mathcal{I} и \mathcal{K} на вектор ориентации необходимое число раз. Следует отметить, что в рамках приведенного подхода также возможно получить параметризованные соотношения для \mathbf{F} и \mathbf{M} , например, в целях решения ряда оптимизационных задач. Запись выражений для главного вектора и главного момента светового давления в виде рядов по многочленам Чебышёва первого рода, которые можно представить в виде рядов по тензорам возрастающего ранга, ранее в литературе автору не встречалась. Д. Ширс [28] представил разложение главного вектора и главного момента в рядах Фурье как функцию ориентации, однако разработанный им подход требует значительных вычислительных ресурсов при расчете функции освещенности, тогда как в излагаемом в данной работе подходе вопрос с освещенностью отдельного элемента решается естественным образом ввиду использования разложения по многочленам Чебышёва. Подобный подход к описанию свойств объекта с помощью тензорных параметров высокого ранга можно встретить в других областях механики, например при анализе меры анизотропной поврежденности материала [41]. Данные соотношения позволяют путем перехода в выражениях для определения \mathcal{I} и \mathcal{K} от интегралов к конечным суммам по плоским элементам получить универсальный расчетный метод для определения главного вектора и главного момента светового давления на оптически выпуклую космическую конструкцию.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору технических наук, старшему научному сотруднику кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители (СМ-1)» МГТУ им. Н. Э. Баумана Владимиру Николаевичу Зимину за помощь в проведении данного исследования, аспиранту кафедры «Аэрокосмические системы (СМ-2)» Олегу Сергеевичу Коцуру и аспиранту кафедры «Теоретическая механика (ФН-3)» Дмитрию Александровичу Гончарову за ценные советы и дискуссии, приведшие к появлению этого метода.

Литература

1. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism. Oxford: Clarendon Press, 1873. Vol. 2. 496 p.
2. *Lebedew P.* Untersuchungen uber die Druckkräfte des Lichtes // *Annalen der Physik.* 1901. Bd. 311, H. 11. S. 433–458.
3. *Лебедев П. Н.* Собрание сочинений / ред. и примеч. чл.-кор. АН СССР Т. П. Кравца, проф. Н. А. Капцова, доц. А. А. Елисеева; ст. Т. П. Кравца и Н. А. Капцова. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 435 с. (Классики науки).
4. *Цандер Ф. А.* Об использовании силы давления света для полетов в межпланетном пространстве (на основе рукописей «О применении тончайших листов для полетов в межпланетном пространстве» 1924 г. и «О давлении света на комбинированные зеркала» 1925 г.) // Сб. статей / под ред. Л. К. Корнеева. М.: ОБОРОНГИЗ, 1961.
5. *McInnes C. R.* Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications. Springer Science & Business Media, 2004. ISBN: 978-3-540-21062-7.
6. *Эльясберг П. Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. 540 с.
7. *Балж М. Б.* Элементы динамики космического полета. М.: Наука, 1965. 340 с.
8. *Скопцов А. П.* Вариационная задача о выходе космического аппарата с солнечным парусом из сферы притяжения Земли // Проблемы механики управляемого движения. Пермь, 1971. С. 216–234.
9. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 432 с.
10. *Левантовский В. И.* Механика космического полета в элементарном изложении. 3-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
11. *Полякова Е. Н.* Космический полет с солнечным парусом. 2-е изд. М.: URSS, 2011. 320 с.
12. *Полякова Е. Н., Коблик В. В.* Солнечный парус. Фантастика или реальность космоплавания? М.: URSS, 2016. 220 с.
13. *Карымов А. А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // Прикладная математика и механика. 1962. Т. XXVI, № 5. С. 867–876.
14. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 600 с.
15. *Попов В. И.* Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1986. 184 с.
16. *Комаров М. М., Климович Д. Н., Сазонов В. В.* Расчет сил и моментов светового давления, действующих на роторный солнечный парус // Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. 1995. № 59.
17. *Лихачев В. Н., Сазонов В. В., Ульяшин А. И.* Режим одноосной солнечной ориентации искусственного спутника Земли // Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. 2001. № 15.
18. *Лихачев В. Н., Сазонов В. В., Ульяшин А. И.* Исследование режима одноосной солнечной ориентации искусственного спутника // Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. 2001. № 65.
19. *Лихачев В. Н., Сазонов В. В., Ульяшин А. И.* Одноосная солнечная ориентация искусственного спутника Земли // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 2. С. 174–185.
20. *Лихачев В. Н., Сазонов В. В., Ульяшин А. И.* Эволюция орбиты искусственного спутника Земли с солнечным парусом // Космические исследования. 2004. Т. 42, № 1. С. 83–87.

21. Сазонов В. В., Сазонов В. В. Расчет главного вектора и главного момента сил светового давления, действующих на космический аппарат с солнечным парусом // Космические исследования. 2011. Т. 49, № 1. С. 59–67.
22. Сапуников Я. Г., Челмоков Ю. Н. Построение оптимальных управлений и траекторий движения центра масс космического аппарата, снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с использованием кватернионов и переменных Кустаанхеймо–Штифеля // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 489–499.
23. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Леценко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. 308 с.
24. Rios-Reyes L., Scheeres D. J. Applications of the generalized model for solar sails // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. 2004. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2004-5434> (дата обращения: 18.12.2016).
25. Rios-Reyes L., Scheeres D. J. Generalized Model for Solar Sails // Journal of Spacecraft and Rockets. 2005. Vol. 42, N 1. P. 182–185. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.9054> (дата обращения: 18.12.2016).
26. Rios-Reyes L. Solar Sails: Modeling, Estimation, and Trajectory Control: Ph.D. thesis / University of Michigan. 2006. 148 p.
27. Rios-Reyes L., Scheeres D. J. Solar-Sail Navigation: Estimation of Force, Moments, and Optical Parameters // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2007. Vol. 30, N 3. P. 660–668. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.24340> (дата обращения: 18.12.2016).
28. Scheeres D. J. The dynamical evolution of uniformly rotating asteroids subject to YORP // Icarus. 2007. Vol. 188, N 2. P. 430–450. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103506004441> (дата обращения: 18.12.2016).
29. McMahon J. W., Scheeres D. J. New Solar Radiation Pressure Force Model for Navigation // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33, N 5. P. 1418–1428. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.48434> (дата обращения: 18.12.2016).
30. McMahon J., Scheeres D. J. General Solar Radiation Pressure Model for Global Positioning System Orbit Determination // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2014. Vol. 37, N 1. P. 325–330. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.61113> (дата обращения: 18.12.2016).
31. McMahon J. W., Scheeres D. J. Improving Space Object Catalog Maintenance Through Advances in Solar Radiation Pressure Modeling // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. P. 1–16. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.G000666> (дата обращения: 18.12.2016).
32. Jing H., ShengPing G., JunFeng L. A curved surface solar radiation pressure force model for solar sail deformation // Science China Physics, Mechanics and Astronomy. 2012. Vol. 55, N 1. P. 141–155. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11433-011-4575-7> (дата обращения: 18.12.2016).
33. Jing H., Shengping G., Junfeng L., Yufei L. The Solar Radiation Pressure Force Models for a General Sail Surface Shape. In Ser. Springer Praxis Books. Advances in Solar Sailing / ed. by M. Macdonald. Berlin; Heidelberg: Springer, 2014. P. 469–488. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-34907-2_30 (дата обращения: 18.12.2016).
34. Неровный Н. А., Зимин В. Н. Об определении силы светового давления на солнечный парус с учетом зависимости оптических характеристик материала паруса от механических напряжений // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2014. Т. 96, № 3. С. 61–78.
35. Зимин В. Н., Неровный Н. А. Анализ влияния зависимости коэффициента отражения материала лопасти роторного солнечного паруса от механических напряжений на его деформированную форму // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2015. Т. 658, № 1. С. 18–23.
36. Зимин В. Н., Неровный Н. А. К расчету главного вектора и главного момента сил светового давления на солнечный парус // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2016. Т. 106, № 1. С. 17–28.
37. Васильев Л. Определение давления света на космические летательные аппараты. М.: Машиностроение, 1985. 208 с.
38. Джуманалиев Н., Киселев М. Введение в прикладную радиационную небесную механику. Фрунзе: Изд-во Илим, 1986. 201 с.
39. Белецкий В., Яншин А. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 с.
40. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. Функции математической физики. М.: Физматлит, 1963. 102 с.
41. Радаев Ю. Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник СамГУ. 1998. Т. 8, № 2. С. 79–105.

Статья поступила в редакцию 19 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

THE RESULTANT VECTOR AND PRINCIPAL MOMENT OF LIGHT RADIATION PRESSURE UPON AN OPTICALLY CONVEX SPACE STRUCTURE

Nikolay A. Nerovny

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005, Russian Federation; nick.nerovny@bmstu.ru

In this paper we discuss the questions related to determination of light radiation pressure upon a space structures of optically convex shape. The equation for force from light pressure acting upon an space optically convex structure's surface infinitesimal element is given with assumption that the surface may be shadowed partly. We derive the infinitesimal light radiation force as a series based on representation of absolute value function as a series of Chebyshev polynomials of first kind. We also obtain the tensor equations which describe the shape and the optical properties of a surface independently from its attitude. For these tensor equations we presented the equations for resultant vector and principal moment of light radiation pressure on the space structure. We also provide an example equations for flat two-sided solar sail. These results can be used for the analysis of dynamics of a center of gravity and around center of mass of a space structures, and also for the development of adaptive control systems of satellites which can take solar pressure into account. Refs 41. Figs 1.

Keywords: solar sail, light pressure, resultant vector, principal moment.

References

1. Maxwell J. C., *A treatise on electricity and magnetism* **2** (Clarendon Press, Oxford, 1873, 496 p.).
2. Lebedev P., “Untersuchungen uber die Druckkräfte des Lichtes”, *Annalen der Physik* **311**(11), 433–458 (1901) [in German].
3. Lebedev P. N., *Collected works*. In Ser. *Klassiki nauki* (AN SSSR Press, Moscow, 1963, 435 p.) [in Russian].
4. Tsander F. A., *The use of light pressure forces for operations in the interplanetary space*, (Collected works, ed. L. K. Korneev, OBORONGIZ, Moscow, 1961) [in Russian].
5. McInnes C. R. *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications* (Springer Science & Business Media, 2004) ISBN: 978-3-540-21062-7.
6. El'yasberg P. E., *Introduction to the theory of flight of artificial satellites* (Nauka, Moscow, 1965, 540 p.) [in Russian].
7. Balk M. B., *Elements of space flight dynamics* (Nauka, Moscow, 1965, 340 p.) [in Russian].
8. Skoptsov A. P., “The variational problem of withdrawal of the spacecraft with a solar sail from the sphere of attraction of the Earth”, *Problemy mekhaniki upravlyаемого dvizheniya*, 216–234 (1971) [in Russian].
9. Beletskii V. V., *Essays about the movement of celestial bodies* (Nauka, Moscow, 1977, 432 p.) [in Russian].
10. Levantovskii V. I. *Space flight mechanics in elementary exposition* (Nauka, Moscow, 1980, 512 p.) [in Russian].
11. Polyakhova E. N., *Space flight with a solar sail* (URSS, Moscow, 2011, 320 p.) ISBN: 978-5-397-01565-3 [in Russian].
12. Polyakhova E. N., Koblik V. V., *Solar sail. Fiction or reality of spaceflight?* (URSS, Moscow, 2016, 220 p.) [in Russian].
13. Karymov A. A. “Determination of forces and moments of forces of radiation pressure acting on the body when moving in space”, *Prikl. mat. mekh.* **26**(5), 867–876 (1962) [in Russian].
14. Raushenbakh B. V., Tokar' E. N. *Introduction to the theory of flight of artificial satellites* (Nauka, Moscow, 1974, 600 p.) [in Russian].
15. Popov V. I., *Spacecraft orientation and stabilization systems* (Mashinostroenie, Moscow, 1986, 184 p.) [in Russian].
16. Komarov M. M., Klimovich D. N., Sazonov V. V., “Calculation of forces and moments of light pressure acting on the rotary solar sail”, *Preprint Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN* (59) (1995) [in Russian].
17. Likhachev V. N., Sazonov V. V., Ul'yashin A. I. “Mode of single-axis solar orientation of earth satellite”, *Preprint Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN* (15) (2001) [in Russian].

18. Likhachev V. N., Sazonov V. V., Ul'yashin A. I., "Study of mode of single-axis solar orientation of an artificial satellite", *Preprint Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN* (65) (2001) [in Russian].
19. Likhachev V. N., Sazonov V. V., Ul'yashin A. I. "Single-axis solar orientation of artificial satellite", *Kosmicheskie issledovaniya* **41**(2), 174–185 (2003) [in Russian].
20. Likhachev V. N., Sazonov V. V., Ul'yashin A. I. "Evolution of the Earth's orbit of an artificial satellite with a solar sail", *Kosmicheskie issledovaniya* **42**(1), 83–87 (2004) [in Russian].
21. Sazonov V. V., Sazonov V. V., "The calculation of the principal vector and principal moment of light forces the pressure acting on the spacecraft with a solar sail", *Kosmicheskie issledovaniya* **49**(1), 59–67 (2011) [in Russian].
22. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N., "Construction of optimum controls and trajectories of motion of the center of masses of a spacecraft equipped with the solar sail and low-thrust engine, using quaternions and Kustaanheimo-Stiefel variables", *Kosmicheskie issledovaniya* **52**(6), 489–499 (2014) [in Russian].
23. Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D., *Evolution of rigid body motion about center of mass* (Izhevskii institut komp'yuternykh issledovaniy, Izhevsk, 2015, 308 p.) [in Russian].
24. Rios-Reyes L., Scheeres D. J., "Applications of the generalized model for solar sails", *ATAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (2004). Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2004-5434> (accessed: December, 18, 2016).
25. Rios-Reyes L., Scheeres D. J., "Generalized Model for Solar Sails", *Journal of Spacecraft and Rockets* **42**(1), 182–185 (2005). Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.9054> (accessed: December, 18, 2016).
26. Rios-Reyes L., *Solar Sails: Modeling, Estimation, and Trajectory Control* (Ph.D. thesis, University of Michigan, 2006, 148 p.).
27. Rios-Reyes L., Scheeres D. J., "Solar-Sail Navigation: Estimation of Force, Moments, and Optical Parameters", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **30**(3), 660–668 (2007). Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.24340> (accessed: December, 18, 2016).
28. Scheeres D. J. "The dynamical evolution of uniformly rotating asteroids subject to YORP", *Icarus* **188**(2), 430–450 (2007). Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103506004441> (accessed: December, 18, 2016).
29. McMahon J. W., Scheeres D. J., "New Solar Radiation Pressure Force Model for Navigation", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **33**(5), 1418–1428 (2010). Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.48434> (accessed: December, 18, 2016).
30. McMahon J., Scheeres D. J., "General Solar Radiation Pressure Model for Global Positioning System Orbit Determination", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **37**(1), 325–330 (2014). Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.61113> (accessed: December, 18, 2016).
31. McMahon J. W., Scheeres D. J. "Improving Space Object Catalog Maintenance Through Advances in Solar Radiation Pressure Modeling", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1–16 (2015). Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.G000666> (accessed: December, 18, 2016).
32. Jing H., ShengPing G., JunFeng L., "A curved surface solar radiation pressure force model for solar sail deformation", *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* **55**(1), 141–155 (2012). Available at: <http://link.springer.com/10.1007/s11433-011-4575-7> (accessed: December, 18, 2016).
33. Jing H., Shengping G., Junfeng L., Yufei L., *The Solar Radiation Pressure Force Models for a General Sail Surface Shape, Advances in Solar Sailing*, 469–488 (Ed. M. Macdonald, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014). Available at: http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-34907-2_30 (accessed: December, 18, 2016).
34. Nerovnyi N. A., Zimin V. N., "Determination of light radiation pressure on the solar sail considering dependency of optical parameters from mechanical stress", *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. "Mashinostroenie"* **96**(3), 61–78 (2014) [in Russian].
35. Zimin V. N., Nerovnyi N. A., "Analysis of the deformed shape of a heliogyro solar sail blade taking into account stress-dependent reflectivity of the material", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* **658**(1), 18–23 (2015) [in Russian].
36. Zimin V. N., Nerovnyi N. A., "Determination of resultant vector and principal moment of light radiation pressure on the solar sail considering the dependency of sail material's optical parameters from its strain state", *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. "Mashinostroenie"* **106**(1), 17–28 (2016) [in Russian].
37. Vasil'ev L., *Determination of light pressure on the spacecraft* (Mashinostroenie, Moscow, 1985, 208 p.) [in Russian].
38. Dzhumanaliev N., Kiselev M., *Introduction to applied radiation celestial mechanics* (Izd-vo Ilim, Frunze, 1986, 201 p.) [in Russian].

39. Beletskii V., Yanshin A., *Effect of the aerodynamic forces on the rotary motion of satellites* (Naukova Dumka, Kiev, 1984, 187 p.) [in Russian].

40. Kampe de Fer'e Zh., Kempbell R., Pet'o G., Fogel' T., *Functions of Mathematical Physics* (Fizmatlit, Moscow, 1963, 102 p.) [in Russian].

41. Radaev Yu. N. "Tensor measures and harmonical analysis of three-dimensional damage state", *Vestnik SamGU* **8**(2), 79–105 (1998) [in Russian].

Для цитирования: Неровный Н. А. Главный вектор и главный момент светового давления на оптически выпуклую космическую конструкцию // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 146–158. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.117

For citation: Nerovny N. A. The resultant vector and principal moment of light radiation pressure upon an optically convex space structure. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 146–158. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.117