МАТЕМАТИКА

УДК 517.925
MSC 34C20

ДВУМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КЛАССИФИКАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — III

В. В. Басов, А. С. Чермных

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Данная статья является третьей в цикле работ, посвященном двумерным однородным кубическим системам. В ней рассматривается случай, когда однородный векторный многочлен в правой части системы имеет квадратичный общий множитель с вещественными нулями. Множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых на основании определенным образом введенных структурных и нормировочных принципов выделяется простейшая система — нормальная форма третьего порядка. Фактически, нормальная форма задается матрицей коэффициентов своей правой части, которая называется канонической формой (КФ). Каждая КФ имеет свою структуру расположения ненулевых элементов, их определенную нормировку и каноническое множество допустимых значений для ненормированных элементов, гарантирующее принадлежность КФ к выбранному классу эквивалентности. Дополнительно для каждой КФ приводятся: а) условия на коэффициенты исходной системы, б) линейные неособые замены, преобразующие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, в) получаемые значения ненормированных элементов КФ. Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Введение. Статья посвящена нахождению канонических форм вещественных однородных кубических систем, имеющих общий множитель второй степени с вещественными нулями, и состоит из трех разделов.

В первом разделе правая часть исходной системы, определяемая восемью коэффициентами, однозначно раскладывается в произведение общего множителя $P_0^2(x)$ и вектора Hx, где H — некая неособая матрица. При этом, как было установлено в [1], знак дискриминанта D ее характеристического полинома инвариантен. Для каждого из случаев $D > 0, D = 0, D < 0$ осуществляется первичное упрощение системы путем сведения матрицы H к жордановой форме и выделением нового общего множителя. Именно для полученных сравнительно простых систем будут подбираться условия, позволяющие сводить их соответствующими линейными заменами к различным КФ.

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.201

Во втором и третьем разделах статьи с учетом инвариантности знака дискриминанта D_0 общего множителя P_0^2 рассматриваются случаи $D_0 = 0$ и $D_0 > 0$. Для каждого из этих случаев приводятся списки канонических форм со своими каноническими и минимальными каноническими семействами допустимых значений параметров, введенными в [2]. Доказываются теоремы, подтверждающие линейную неэквивалентность приведенных КФ и демонстрирующие для каждой КФ в явном виде: а) все системы, относящиеся к классу линейной эквивалентности, порожденному данной КФ, б) линейную замену, сводящую любую такую систему к выбранной КФ, в) получаемые в результате замены значения параметров КФ из ее канонического семейства.

Эта работа является непосредственным продолжением работ [1] и [2], поэтому в ней сохраняются все введенные ранее обозначения. В связи с большим количеством ссылок на формулы, полученные в [1], будем для краткости отмечать их номера сверху символом «1». Например, систему (2.1) из [1] будем обозначать $(2.1)^1$.

1. Первичное упрощение системы при $\boldsymbol{l = 2}$. Рассмотрим систему $(2.1)^1$ $\dot{x} = A\,q^{[3]}(x)$, которая при $l = 2$ однозначно записывается в виде $(2.14)^1$:

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{matrix} P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \\ D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma, \end{matrix} \quad H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \ \delta_{pq} = \det H \neq 0, \tag{1.1}$$

где $\alpha = 1$ или $\alpha, \gamma = 0$, $2\beta = 1$.

По теореме 2.2 из [1] любая линейная неособая замена (замена $(2.2)^1$)

$$\begin{cases} x_1 = r_1 y_1 + s_1 y_2, \\ x_2 = r_2 y_1 + s_2 y_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = Ly, \quad L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}, \ \delta = \det L \neq 0 \tag{1.2}$$

преобразует систему (1.1) в систему $(2.17)^1$ $\dot{y} = (\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})\,q^{[2]}(y)\,\widetilde{H}y$, у которой строка $(\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ и матрица $\widetilde{H}$ с $\delta_{\tilde{p}\tilde{q}} \neq 0$ описаны в $(2.18)^1$.

Отметим, что система $(2.17)^1$ с учетом обозначений $(2.3)^1$ записывается в виде

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{p}_1 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_1 + 2\tilde{\beta}\tilde{p}_1 & 2\tilde{\beta}\tilde{q}_1 + \tilde{\gamma}\tilde{p}_1 & \tilde{\gamma}\tilde{q}_1 \\ \tilde{\alpha}\tilde{p}_2 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_2 + 2\tilde{\beta}\tilde{p}_2 & 2\tilde{\beta}\tilde{q}_2 + \tilde{\gamma}\tilde{p}_2 & \tilde{\gamma}\tilde{q}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Приводить систему (1.1) к различным каноническим формам будем в два этапа.

На первом этапе выберем такую замену (1.2), которая сводит матрицу H системы (1.1) к жордановой форме $\widetilde{H}$ в получаемой системе $(2.17)^1$. Вид замены будет, конечно, зависеть от знака дискриминанта $D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq}$ из формулы $(2.16)^1$ (см. [3, прил. 3.3, с. 112]).

Здесь и далее любая ссылка на приложение работы [3] позволяет в пакете программ, размещенном в этом приложении, найти необходимую программу, символьными вычислениями в Maple подтверждающую приводимые ниже результаты.

1) Пусть $D > 0$, тогда согласно $(2.16)^1$ матрица H имеет вещественные различные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Точнее говоря, пусть

$$\lambda_1 = \frac{p_1 + q_2 + \sigma_0\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{p_1 + q_2 - \sigma_0\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_* = p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D} \neq 0, \tag{1.4}$$

где $\sigma_0 = \{1 \text{ при } p_1 \geq q_2, \ -1 \text{ при } p_1 < q_2\}$, тогда $\sigma_0 = \operatorname{sign}\lambda_*$ и $\sigma_0\sqrt{D} = \lambda_1 - \lambda_2$.

Замена $J_1^2 = \begin{pmatrix} \lambda_* & -2q_1 \\ 2p_2 & \lambda_* \end{pmatrix}$ $(\delta = 2\sigma_0 \sqrt{D}\,\lambda_*)$ с учетом формул для $\widetilde{P}_0$ из $(2.18)^1$ сводит систему (1.1) к системе, записанной в виде (1.3) или $(2.17)^1$. При этом

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde\alpha\lambda_1 & 2\tilde\beta\lambda_1 & \tilde\gamma\lambda_1 & 0 \\ 0 & \tilde\alpha\lambda_2 & 2\tilde\beta\lambda_2 & \tilde\gamma\lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde\alpha = \alpha\lambda_*^2 + 4\beta p_2\lambda_* + 4\gamma p_2^2,$$
$$\tilde\beta = \beta\lambda_*^2 - 2(\alpha q_1 - \gamma p_2)\lambda_* - 4\beta p_2 q_1, \quad \tilde\gamma = \gamma\lambda_*^2 - 4\beta q_1\lambda_* + 4\alpha q_1^2. \tag{1.5}$$

2) Пусть $D = 0$, тогда в формуле $(2.16)^1$ будем иметь $\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1 + q_2)/2 \neq 0$, иначе $\det H = 0$.

2_1) Замена $J_{2a}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2q_1 \\ 2 & q_2 - p_1 \end{pmatrix}$ для $q_1 \neq 0$ (случай *а*), нормировка $J_{2b}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$ для $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ $(p_1, q_2 = \nu)$ (случай *б*) сводят систему (1.1) к (1.3) или $(2.17)^1$. При этом

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde\alpha\nu & 2\tilde\beta\nu & \tilde\gamma\nu & 0 \\ \tilde\alpha & \tilde\alpha\nu + 2\tilde\beta & 2\tilde\beta\nu + \tilde\gamma & \tilde\gamma\nu \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 1 & \nu \end{pmatrix},$$
$$a: \ \ \tilde\alpha = 4\gamma, \ \ \tilde\beta = 4\beta q_1 - 2\gamma(p_1 - q_2), \ \ \tilde\gamma = 4\alpha q_1^2 - 4\beta q_1(p_1 - q_2) + \gamma(p_1 - q_2)^2,$$
$$б: \ \ \tilde\alpha = \alpha, \ \tilde\beta = \beta p_2, \ \tilde\gamma = \gamma p_2^2 \quad (\nu = p_1). \tag{1.6}$$

2_2) Если q_1, $p_2 = 0$, то в системе (1.1) матрица H — диагональная и $p_1, q_2 = \nu \neq 0$.

3) Пусть $D < 0$ $\ (\delta_{pq} > 0, \ p_2 q_1 < 0)$, тогда в $(2.16)^1$ числа λ_1, λ_2 — комплексно-сопряженные.

Замена $J_3^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-D} & p_1 - q_2 \\ 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$ $(\delta = 2p_2\sqrt{-D})$ с учетом формул для $\widetilde{P}_0$ из $(2.18)^1$ сводит (1.1) к системе, записанной в виде (1.3) или $(2.17)^1$. При этом

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde\alpha\nu & 2\tilde\beta\nu - \tilde\alpha\mu & \tilde\gamma\nu - 2\tilde\beta\mu & -\tilde\gamma\mu \\ \tilde\alpha\mu & \tilde\alpha\nu + 2\tilde\beta\mu & 2\tilde\beta\nu + \tilde\gamma\mu & \tilde\gamma\nu \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \nu & -\mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad \tilde\alpha = -\alpha D,$$
$$\tilde\beta = \sqrt{-D}(\alpha(p_1 - q_2) + 2\beta p_2), \quad \tilde\gamma = \alpha(p_1 - q_2)^2 + 4\beta p_2(p_1 - q_2) + 4\gamma p_2^2, \tag{1.7}$$

где $\nu = (p_1 + q_2)/2\,(= \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2})$, $\mu = \sqrt{-D}/2\,(= |\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2}|) > 0$, причем $\nu^2 + \mu^2 = \delta_{pq}$.

На втором этапе в линейно неэквивалентных системах (1.5)–(1.7) сделаем произвольную замену (1.2), сводящую каждую из них к системе $(2.17)^1$, все составляющие которой вместо символа $\sim$ будем сверху отмечать символом $\smile$.

В результате, учитывая $(2.18)^1$, по аналогии с (1.3) получим систему

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve a_1 & \breve b_1 & \breve c_1 & \breve d_1 \\ \breve a_2 & \breve b_2 & \breve c_2 & \breve d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve\alpha\breve p_1 & \breve\alpha\breve q_1 + 2\breve\beta\breve p_1 & 2\breve\beta\breve q_1 + \breve\gamma\breve p_1 & \breve\gamma\breve q_1 \\ \breve\alpha\breve p_2 & \breve\alpha\breve q_2 + 2\breve\beta\breve p_2 & 2\breve\beta\breve q_2 + \breve\gamma\breve p_2 & \breve\gamma\breve q_2 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

где $\breve\alpha = \tilde\alpha r_1^2 + 2\tilde\beta r_1 r_2 + \tilde\gamma r_2^2$, $\breve\beta = (\tilde\alpha s_1 + \tilde\beta s_2)r_1 + (\tilde\beta s_1 + \tilde\gamma s_2)r_2$, $\breve\gamma = \tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2$,
$\breve H = \begin{pmatrix} \breve p_1 & \breve q_1 \\ \breve p_2 & \breve q_2 \end{pmatrix} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix}$ $\quad (\det\breve H = \delta_{\breve p\breve q} = \delta_{\tilde p\tilde q} = \delta_{pq})$.

Остается подобрать коэффициенты замены (1.2) так, чтобы система (1.8) оказалась наиболее простой в соответствии с СП и НП [2, разделы 1.1 и 1.2].

Реализация указанного плана будет проводиться отдельно для каждого из трех классов систем, на которые разбивается (1.1) в соответствии со знаком дискриминанта D_0 общего множителя P_0^2, инвариантного согласно $(2.19)^1$ относительно замен (1.2).

Таким образом, фактическое нахождение канонических форм будет осуществляться отдельно в каждом из девяти линейно неэквивалентных классов, разделяемых знаками дискриминантов D_0 и D системы (1.1) (см. [2, следствие 1.1]).

В этой работе будут рассмотрены сравнительно простые случаи $D_0 = 0$ и $D_0 > 0$.

Набор 1.1. Константы и замены, используемые в дальнейшем:
$D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$, $\sigma_0 = \{1$ при $p_1 \geq q_2$, -1 при $p_1 < q_2\}$,
$\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sigma_0\sqrt{D})/2$, $\lambda_* = p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D}$;
$\nu = (p_1 + q_2)/2$, $\mu = \sqrt{-D}/2$; $\tilde{\tau} = (\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma})^{1/2}$, $\tilde{\phi} = (2\tilde{\tau})^{-1/2}$,
$\sigma_\alpha = \operatorname{sign}\tilde{\alpha}$, $\sigma_\beta = \{1$ при $\tilde{\beta} \geq 0$, -1 при $\tilde{\beta} < 0\}$, $\sigma_\gamma = \operatorname{sign}\tilde{\gamma}$,
$\tilde{\eta} = \tilde{\beta} + \sigma_\beta\tilde{\tau}$; $\tilde{\varsigma} = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}^2)^{1/2}$;
$J^2_1 = \{r_1, s_2 = \lambda_*,\ s_1 = -2q_1,\ r_2 = 2p_2\}$, $J^2_{2a} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2q_1,\ s_2 = 2,\ r_2 = q_2 - p_1\}$,
$J^2_{2b} = \{r_1 = 1,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = p_2\}$, $J^2_3 = \{r_1 = \sqrt{-D},\ s_1 = p_1 - q_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = 2p_2\}$.

2. Построение $CF^{m,2}$ при нулевом дискриминанте P^2_0. Система (1.1), у которой $P^2_0(x)$ является полным квадратом, имеет вид

$$\dot{x} = P^2_0(x)Hx, \quad P^2_0 = (x_1 + \beta x_2)^2 \quad (\gamma = \beta^2 \Leftrightarrow D_0 = 0,\ \det H = \delta_{pq} \neq 0). \qquad (1.1^=)$$

Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы до $SF^{3,2}_{13}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 2$, $D_0 = 0$ (см. [2, утверждение 1.2]), таких форм 5. Нормируем их заменой $(2.6)^1$ согласно введенным НП, получая при этом $NSF^{m,2,=}$ (см. [2, определение 1.6]).

Докажем, что приведенный ниже список содержит все возможные канонические формы системы $(1.1^=)$ и описанные в нем множества являются каноническими множествами из определения 1.10 работы [2].

Список 2.1. Пять $CF^{m,2,=}_i$ и их $cs^{m,2,=}_i$ с указанием матрицы H и дискриминанта D из $(2.16)^1$ $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u \neq 0,\ (\alpha, 2\beta, \gamma) = (1, 0, 0))$:

$CF^{2,2,=,\gtreqless}_3 = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(u-1)^2$, $cs^{2,2,=,>}_3 = \{u \neq 1\}$, $cs^{2,2,=,=}_3 = \{u = 1\}$;

$CF^{2,2,=,\gtrless}_{7,\kappa} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 4κ, $cs^{2,2,=,>}_{7,\kappa} = \{\kappa = 1\}$, $cs^{2,2,=,<}_{7,\kappa} = \{\kappa = -1\}$;

$CF^{3,2,=,\gtreqless}_7 = \sigma\begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(u-1)^2$, $cs^{3,2,=,>}_7 = \{u \neq \pm 1\}$, $cs^{3,2,=,=}_7 = \{u = 1\}$;

$CF^{3,2,=,<}_{12} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $4u + 1$, $cs^{3,2,=,<}_{12} = \{u < -1/4\}$;

$CF^{3,2,=,=}_{a,13} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & u \end{pmatrix}$, $(u-1)^2$, $cs^{3,2,=,=}_{13} = \{u = 1\}$.

Утверждение 2.1. *Только следующие формы из списка 2.1 при указанных значениях параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам:*
$NSF^{3,2,=,>}_7$ *при* $u = -1$ *заменой* (1.2) *с* $r_1 = r_2$, $s_1 = 0$ *сводится к* $SF^{2,2}_7$;
$NSF^{3,2,=,>}_{12}$ $(u > -1/4)$ *и* $NSF^{3,2,=,=}_{12}$ $(u = -1/4)$ *заменой* (1.2) *с* $s_1 = 0$ *и* $r_1 = (1 + \sqrt{1 + 4u})r_2/2$ *сводятся к* $SF^{3,2}_7$;
$NSF^{3,2,=,>}_{13}$ $(u \neq 1)$ *заменой* (1.2) *с* $r_2 = (1 - u)r_1$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{2,2}_3$.

Набор 2.1. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2:
$\varpi_1 = 2p_2\beta + \lambda_*$, $\varpi_2 = 2q_1 - \lambda_*\beta$, $\varpi_3 = (p_1 - q_2)\beta - 2q_1$,
$\varpi_4 = p_2\beta^2 + 2p_1\beta - q_1$, $\varpi_5 = p_2\beta^2 + (p_1 - q_2)\beta - q_1$, $\varpi_6 = p_1 - q_2 + 2p_2\beta$;
$L^{2,2,=,>}_3 = \{r_1 = [\,0 \vee |\varpi^2_1\lambda_2|^{-1/2}\,],\ s_1 = [\,1 \vee 0\,],\ r_2 = [\,|\varpi^2_2\lambda_1|^{-1/2} \vee 0\,],\ s_2 = [\,0 \vee 1\,]\}$;
$L^{2,2,=,>}_{7,+1} = \{r_1, -s_1 = \varpi^{-1}_1\varpi_2 r_2,\ r_2, s_2 = |4\varpi^2_2\lambda_2|^{-1/2}\}$;
$L^{3,2,=,>}_7 = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\varpi^{-1}_1\varpi_2 s_2,\ r_2 = |\varpi^2_2\lambda_1|^{-1/2},\ s_2 = \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}r_2\}$;

$L_3^{2,2,=,=} = \{r_1 = |p_1|^{-1/2},\ s_1 = -\beta,\ r_2 = 0,\ s_2 = 1\}$;
$L_7^{3,2,=,=} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \nu r_2,\ r_2 = [\,|\varpi_3^2\nu|^{-1/2} \vee |(\beta p_2)^2\nu|^{-1/2}\,]$,
$s_2 = [\,2\beta\varpi_3^{-1}\nu r_2 \vee -(\beta p_2)^{-1} r_2\,]\}$;
$L_{13}^{3,2,=,=} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = [\,|4\beta^2\nu|^{-1/2} \vee |\nu|^{-1/2}\,],\ r_2 = \nu^{-1}s_1\}$;
$L_{7,-1}^{3,2,=,<} = \{r_1, s_2 = (-D)^{1/4}(2^{3/2}p_2\varpi_4)^{-1},\ -s_1, r_2 = (p_1 + \beta p_2)(-D)^{-1/4}(\sqrt{2}p_2\varpi_4)^{-1}\}$;
$L_{12}^{3,2,=,<} = \{r_1 = (\delta_{pq} + \nu(\beta p_2 - q_2)(-D)^{-1/2}\rho^{-1},\ s_1 = \delta_{pq}\varpi_6(-D)^{-1/2}(4\nu\rho)^{-1}$,
$r_2 = (\beta p_2 - q_2)(2\rho)^{-1},\ s_2 = \delta_{pq}(4\nu\rho)^{-1}\}$, где $\rho = p_2\varpi_5|2\nu|^{1/2}$.

Теорема 2.1. *Любая система* $(2.1)^1$ *с* $l = 2$, *записанная в виде* $(1.1^=)$ *согласно* $(2.15)^1$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.1. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,=,*}$ *приведены: a) условия на* P_0^2 *и* H *системы* $(1.1^=)$, *b) замены* (1.2), *преобразующие правую часть системы* $(1.1^=)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметра* u *из* $cs_i^{m,2,=,*}$:

$CF_3^{2,2,=,>}$: *a)* $D > 0,\ [\,\varpi_1 = 0 \vee \varpi_2 = 0\,]$, *b)* J_1^2, $L_3^{2,2,=,>}$, *c)* $\sigma = [\,\operatorname{sign}\lambda_1 \vee \operatorname{sign}\lambda_2\,]$, $u = [\,\lambda_1^{-1}\lambda_2 \vee \lambda_1\lambda_2^{-1}\,]$;

$CF_{7,+1}^{2,2,=,>}$: *a)* $D > 0,\ \varpi_1, \varpi_2 \neq 0,\ \lambda_1 = -\lambda_2$, *b)* J_1^2, $L_{7,+1}^{2,2,=,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$;

$CF_7^{3,2,=,>}$: *a)* $D > 0,\ \varpi_1, \varpi_2 \neq 0,\ \lambda_1 \neq -\lambda_2$, *b)* J_1^2, $L_7^{3,2,=,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2$;

$CF_3^{2,2,=,=}$: *a)* $D = 0,\ q_1 = 0,\ p_2 = 0$, *b)* $L_3^{2,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} p_1$;

$CF_7^{3,2,=,=}$: *a)* $D = 0,\ [\,q_1 \neq 0,\ \varpi_3 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0,\ \beta \neq 0\,]$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L_7^{3,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$;

$CF_{13}^{3,2,=,=}$: *a)* $D = 0,\ [\,q_1 \neq 0, \beta \neq 0, \varpi_3 = 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0, \beta = 0\,]$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L_{13}^{3,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$;

$CF_{7,-1}^{2,2,=,<}$: *a)* $D < 0,\ q_2 = -p_1$, *b)* J_3^2, $L_{7,-1}^{3,2,=,<}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF_{12}^{3,2,=,<}$: *a)* $D < 0,\ \nu \neq 0$, *b)* J_3^2, $L_{12}^{3,2,=,<}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = -\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$.

Доказательство. В зависимости от знака дискриминанта D из $(2.16)^1$ система $(1.1^=)$ с $\gamma = \beta^2$ одной из замен J_1^2, J_{2a}^2 или J_{2b}^2, J_3^2 сведена соответственно к одной из систем (1.5), (1.6) или (1.7) с жордановой матрицей $\widetilde{H}$ и общим множителем $\widetilde{P}_0^2$. При этом $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} \geq 0$, $\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} > 0$, $\tilde{\beta}^2 = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$ в силу $(2.18)^1, (2.19)^1$.

Далее в каждой из полученных систем сделана произвольная замена (1.2), преобразующая ее в систему (1.8), из которой и будут выделяться канонические формы.

В системе (1.8) общий множитель $\breve{P}_0^2$ имеет следующие коэффициенты:

$$\tilde{\alpha} > 0: \quad \breve{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}r_1 + \tilde{\beta}r_2)^2, \quad \breve{\beta} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}r_1 + \tilde{\beta}r_2)(\tilde{\alpha}s_1 + \tilde{\beta}s_2), \quad \breve{\gamma} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}s_1 + \tilde{\beta}s_2)^2;$$
$$\tilde{\alpha} = 0 \ \ (\tilde{\beta} = 0, \tilde{\gamma} > 0): \quad \breve{\alpha} = \tilde{\gamma}r_2^2, \quad \breve{\beta} = \tilde{\gamma}r_2s_2, \quad \breve{\gamma} = \tilde{\gamma}s_2^2. \tag{2.9}$$

В формуле (2.9) всегда можно получить, например, $\breve{\beta} = 0, \breve{\gamma} = 0$. Для этого в замене (1.2) достаточно зафиксировать следующую связь между s_1 и s_2 :

$$\tilde{\alpha} \neq 0: \ s_1 = -\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}s_2, \qquad \tilde{\alpha} = 0: \ s_2 = 0, \tag{2.10}$$

в результате которой в системе (1.8) два правых столбца $\breve{A}$ будут нулевыми.

1) Рассмотрим $D > 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sigma_0\sqrt{D} \neq 0)$. Из системы $(1.1^=)$ заменой J_1^2 получена система (1.5), у которой в $\widetilde{P}_0^2$ имеем $\tilde{\alpha} = \varpi_1^2$, $\tilde{\beta} = \varpi_1\varpi_2$, $\tilde{\gamma} = \varpi_2^2$.

Пусть замена (1.2) при условии (2.10) сводит систему (1.5) к системе (1.8), коэффициенты $\breve{P}_0^2$ которой определены в (2.9) (см. [3, прил. 3.4.1, с. 114]).

1_1) Пусть $\tilde\alpha=0$ $(\tilde\gamma>0,\ s_2=0)$. Тогда система (1.8) принимает следующий вид: $\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_2)r_1s_1^{-1} & \lambda_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=0,\ s_1=1,\ r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ это — $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq 1$.

1_2) Пусть $\tilde\alpha>0$. Тогда система (1.8) имеет вид

$$\breve A=(r_1+\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda_1r_1+\tilde\beta\lambda_2r_2 & \tilde\beta(\lambda_2-\lambda_1)s_2 & 0 & 0\\ \tilde\alpha(\lambda_2-\lambda_1)r_1r_2s_2^{-1} & \tilde\alpha\lambda_2r_1+\tilde\beta\lambda_1r_2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

1_2^1) Пусть $\tilde\beta=0$ $(\tilde\gamma=0,\ s_1=0)$. Тогда систему (2.11) можно записать в виде $\tilde\alpha r_1^2\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ (\lambda_2-\lambda_1)r_2s_2^{-1} & \lambda_2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2=0,\ s_2=1,\ r_1=(\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2}$ это — $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq 1$.

1_2^2) Пусть $\tilde\beta\neq 0$.

1_2^{2a}) $\lambda_1=-\lambda_2$ $\Leftrightarrow p_1+q_2=0$. Тогда при $r_1=\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2$ система (2.11) выглядит следующим образом: $4\tilde\gamma r_2^2\lambda_2\begin{pmatrix}0 & r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ r_2s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2,s_2=(4\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}$ это — $CF_{7,+1}^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$.

1_2^{2b}) Пусть $\lambda_1\neq-\lambda_2$. Тогда при $r_1=0$ система (2.11) имеет вид $\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\lambda_2 & (\lambda_2-\lambda_1)r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2},\ s_2=\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ эта система — $NSF_7^{3,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq\pm1$.

В системе (2.11) можно еще сделать $\breve b_2=0$ или $\breve a_1=0$, получая $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,>}$ предшествует согласно СП2.

2) Рассмотрим $D=(p_1-q_2)^2+4p_2q_1=0$, т. е. в $(2.16)^1$ $\lambda_1,\lambda_2=\nu=(p_1+q_2)/2\neq 0$.

2_1) Из системы $(1.1^=)$ с $\gamma=\beta^2$ при $q_1\neq 0$ заменой J_{2a}^2 получена система (1.6) с $\tilde\alpha=4\beta^2,\ \tilde\beta=-2\beta((p_1-q_2)\beta-2q_1),\ \tilde\gamma=((p_1-q_2)\beta-2q_1)^2$ согласно (1.6_a), а при $q_1=0,\ p_2\neq 0$ $(q_2,p_1=\nu)$ заменой J_{2b}^2 — (1.6) с $\tilde\alpha=1,\ \tilde\beta=\beta p_2,\ \tilde\gamma=(\beta p_2)^2$ согласно (1.6_b).

Пусть замена (1.2) при условии (2.10) сводит (1.6) к системе (1.8), коэффициенты $\breve P_0$ которой определены в (2.9) (см. [3, прил. 3.4.2, с. 116]).

2_1^1) Пусть $\tilde\alpha=0$ $(\tilde\gamma>0)$. Тогда система (1.8) примет следующий вид: $\tilde\gamma r_2\begin{pmatrix}r_1+\nu r_2 & s_1 & 0 & 0\\ -r_1^2s_1^{-1} & \nu r_2-r_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=0,\ r_2=(\tilde\gamma|\nu|)^{-1/2},\ s_1=\nu r_2$ $(s_2=0)$ это — $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\nu,\ u=1$.

В системе (1.8) помимо $\breve a_2=0$ можно получить $\breve b_2=0$ или $\breve a_1=0$, что превратит ее в $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,=}$ предшествует согласно СП2.

2_1^2) Пусть $\tilde\alpha=[\,4\beta^2\vee 1\,]>0$. Тогда система (1.8) имеет вид

$$\breve A=(r_1+\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix}(\tilde\alpha\nu r_1+\tilde\beta)r_1+\tilde\beta\nu r_2 & -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2s_2 & 0 & 0\\ \tilde\alpha r_1^2s_2^{-1} & (\tilde\alpha\nu r_1-\tilde\beta)r_1+\tilde\beta\nu r_2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

2_1^{2a}) Пусть $\tilde\beta=0$ $(s_1=0)\Leftrightarrow[\,\varpi_3=0\vee\beta=0\,]$. Тогда (2.12) будет иметь вид $\tilde\alpha r_1^2\begin{pmatrix}\nu & 0 & 0 & 0\\ r_1s_2^{-1} & \nu & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=(\tilde\alpha|\nu|)^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=\nu^{-1}r_1$ это — $CF_{a,13}^{3,2,=,=}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\nu$. Далее делается перенумерация $(2.7)^1$.

2_1^{2b}) Пусть $\tilde\beta \neq 0$ ($\tilde\gamma > 0$). Тогда при $r_1 = 0$ система (2.12) выглядит следующим образом: $\tilde\gamma r_2^2 \begin{pmatrix} \nu & -\tilde\beta^{-1}\tilde\gamma r_2^{-1}s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_2 = (\tilde\gamma|\nu|)^{-1/2}$, $s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\nu r_2$ ($s_1 = \nu r_2$) это — $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = 1$.

Случаи 2_1^1) и 2_1^{2b}) для $q_1 \neq 0$ ($\beta = 0$ и $\beta \neq 0$) объединены в формулировке теоремы.

Из системы (2.12) можно получить также последующие $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$.

2_2) Пусть $q_1 = 0$, $p_2 = 0$ ($q_2 = p_1$), т. е. в самой системе ($1.1^=$) H — диагональная матрица. Замена (1.2) с $r_1 = |p_1|^{-1/2}$, $s_1 = -\beta$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ сводит ($1.1^=$) к $CF_3^{2,2,=,=}$ ($u = 1$) с $\sigma = \operatorname{sign} p_1$.

3) Рассмотрим $D < 0$ ($p_2 q_1 < 0$). Из системы ($1.1^=$) заменой J_3^2 получена система (1.7) с $\tilde\alpha = -D$, $\tilde\beta = \sqrt{-D}\varpi_6$, $\tilde\gamma = \varpi_6^2$.

Пусть замена (1.2) при условии (2.10) сводит (1.7) к системе (1.8), коэффициенты $\breve P_0$ которой определены в (2.9) (см. [3, прил. 3.4.3, с. 118]).

Иными словами, система (1.8) имеет вид

$$(r_1 + \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix} (\tilde\alpha\nu + \tilde\beta\mu)r_1 + (\tilde\beta\nu - \tilde\alpha\mu)r_2 & -\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)\mu s_2 & 0 & 0 \\ \mu(r_1^2 + r_2^2)s_2^{-1} & (\tilde\alpha\nu - \tilde\beta\mu)r_1 + (\tilde\beta\nu + \tilde\alpha\mu)r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

3_1) Пусть $\nu = 0 \Leftrightarrow q_2 = -p_1$, при этом $\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2 = -4Dp_2\varpi_4 \neq 0$, так как дискриминант ϖ_4 равен D, а $D = 4(p_1^2 + p_2 q_1)$. Тогда при $r_2 = \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_1$ система (2.13) принимает вид $\tilde\alpha^{-3}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^2\mu r_1^2 \begin{pmatrix} 0 & -r_1^{-1}s_2 & 0 & 0 \\ r_1 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde\alpha^{3/2}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^{-1}\mu^{-1/2}$ это — $CF_{7,-1}^{2,2,=,<}$ с $\sigma = 1$.

3_2) Пусть $\nu \neq 0 \Leftrightarrow p_1 + q_2 \neq 0$, при этом $\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2 = -4Dp_2\varpi_5 \neq 0$, так как дискриминант ϖ_5 равен D. Тогда в системе (2.13) при $r_1 = \tilde\alpha^{1/2}(\tilde\alpha\mu + \tilde\beta\nu)\rho$, $r_2 = \tilde\alpha^{1/2}(\tilde\beta\mu - \tilde\alpha\nu)\rho$, $s_2 = \tilde\alpha^{3/2}(\nu^2 + \mu^2)(2\nu)^{-1}\rho$, где $\rho = |2\nu|^{-1/2}\mu^{-1}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^{-1}$, элемент $\breve b_2 = 0$. Система (2.13) — это $CF_{12}^{3,2,=,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = -(\nu^2 + \mu^2)(2\nu)^{-2} < -1/4$.

В (2.13) можно еще сделать $\breve a_1 = 0$, получая SF с бóльшим индексом. $\square$

В результате оказалась доказанной полнота списка 2.1 $CF_i^{m,2,=}$ при нулевом дискриминанте общего множителя P_0^2 и их линейная неэквивалентность друг другу.

Приведем линейные неособые замены, которые для CF из списка 2.1 позволят выделить минимальные канонические множества, введенные в определении 1.11 из [2].

Утверждение 2.2. *Только в $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}$ и $CF_7^{3,2,=,>}$ из списка 2.1 удается ограничить значения параметров $cs_7^{m,2,=,}$: в $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}$ нормировка* $(2.6)^1$ *с $r_1, -s_2 = 1$ изменяет знак σ; в $CF_7^{3,2,=,>}$ при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ и замена с $r_1 = |\tilde u|^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = (1 - \tilde u)|\tilde u|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde u|\tilde u|^{-1/2}$ дает $\sigma = \tilde\sigma \operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$.*

Следствие 2.1. *Согласно определению 1.12 из [2] имеем $acs_{7,\kappa}^{2,2,=} = \{\sigma = -1\}$, $acs_7^{3,2,=,>} = \{|u| > 1\}$; для остальных форм из списка 2.1 — $mcs^{m,2,=,*} = cs^{m,2,=,*}$.*

3. Построение $CF^{m,2}$ при положительном дискриминанте P_0^2. Система (1.1) с положительным дискриминантом многочлена $P_0^2(x)$ имеет вид

$$\dot x = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{matrix} P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, & D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma > 0, \\ \alpha = 1 \text{ или } \alpha, \gamma = 0,\ 2\beta = 1; & (\det H = \delta_{pq} \neq 0). \end{matrix} \tag{$1.1^>$}$$

Выделим из списка 1.1 в [2] структурные формы до $SF_{23}^{4,2}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 2$, $D_0 > 0$ (см. [2, утверждение 1.2]), таких форм 9. Нормируем их согласно НП и выясним, какие $NSF^{m,2,>}$ оказываются каноническими формами.

Докажем, что приведенный ниже список содержит все канонические формы системы $(1.1^{>})$ со своими каноническими множествами из определения 1.10 из [2].

Список 3.1. Семь $CF_i^{m,2,>}$ и их $cs_i^{m,2,>}$ с указанием строки $(\alpha, 2\beta, \gamma)$, матрицы H и дискриминантов D_0 и D из $(2.16)^1$ $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u, v \neq 0)$:

$$CF_4^{2,2,>,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0,1,0), \quad \sigma\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{8,\kappa}^{2,2,>,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0,1,0), \quad \sigma\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4, \\ 4\kappa; \end{matrix}$$

$$CF_{10}^{3,2,>,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0,1,0), \quad \sigma\begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{16}^{3,2,>,\gtreqless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0,1,0), \quad \sigma\begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4, \\ 4u+1; \end{matrix}$$

$$CF_{8,-1}^{4,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1,0,-1), \quad \sigma\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{a,14,-1}^{4,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & u & 0 \end{pmatrix}, \quad (1,1,0), \quad \sigma\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4, \\ (u+1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{23}^{4,2,>,\gtreqless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0,1,0), \quad \sigma\begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4, \\ (u-1)^2+4v. \end{matrix}$$

$cs_4^{2,2,>,>} = \{u \neq 1\}$, $cs_4^{2,2,>,=} = \{u = 1\}$; $cs_{8,\kappa}^{2,2,>,>} = \{\kappa = 1\}$, $cs_{8,\kappa}^{2,2,>,<} = \{\kappa = -1\}$;
$cs_{10}^{3,2,>,>} = \{u \neq 1\}$, $cs_{10}^{3,2,>,=} = \{u = 1\}$;
$cs_{16}^{3,2,>,>} = \{u > -1/4\}$, $cs_{16}^{3,2,>,=} = \{u = -1/4\}$, $cs_{16}^{3,2,>,<} = \{u < -1/4\}$;
$cs_{8,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq \pm 1\}$; $cs_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq -1, -2, -3\}$;
$cs_{23}^{4,2,>,>} = \{u \neq 1,\ v > -(1-u)^2/4,\ v \neq u,\ (2u-1)/4,\ u(2-u)/4\}$,
$cs_{23}^{4,2,>,=} = \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\}$, $cs_{23}^{4,2,>,<} = \{v < -(1-u)^2/4\}$.

Утверждение 3.1. *$NSF_7^{4,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $NSF_{12}^{4,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ из списка 3.1 не являются $CF^{4,2,>}$.*

Доказательство. $NSF_7^{4,2,>}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = 0$ сводится к $CF_{10}^{3,2,>,>}$ или $CF_4^{2,2,>,=}$, а $NSF_{12}^{4,2,>}$ той же заменой сводится к $CF_{10}^{3,2,>,>}$ или $CF_4^{2,2,>,>}$. □

Набор 3.1. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 3:
$\varphi_1 = \tilde\eta^2\lambda_1 - \tilde\alpha\tilde\gamma\lambda_2$, $\varphi_2 = \tilde\eta^2\lambda_2 - \tilde\alpha\tilde\gamma\lambda_1$, $\varphi_3{}^{\pm} = 2\tilde\tau\nu\,\sigma_\beta \pm \tilde\gamma$, $\varphi_4{}^{\pm} = 2\tilde\tau\nu\,\sigma_\beta \pm (\tilde\alpha + \tilde\gamma)\mu$;
$L_4^{2,2,>,>} = \{r_1 = 1,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\}$;
$L1_{10}^{3,2,>,>} = \{r_1 = -|\tilde\gamma|^{1/2}D^{1/4}(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\gamma,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = 0,$
$s_2 = |\tilde\gamma|^{-1/2}D^{-1/4}\}$,
$L2_{10}^{3,2,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = |\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ r_2 = |\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}(2\tilde\beta\lambda_1)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L_{8,+1}^{2,2,>,>} = \{r_1 = |4\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = |4\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}\}$;
$L_{8,-1}^{4,2,>,>} = \{-r_1, s_1 = v^{1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2},\ r_2, s_2 = v^{-1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2}\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,>} = \{r_1 = \tilde\phi^2\tilde\eta|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}r_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,>} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-1}r_2,\ r_2 = \tilde\phi^2\tilde\eta|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L1_{23}^{4,2,>,>} = \{r_1 = |2\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,$
$s_2 = -|\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(2\nu)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\}$,
$L2_{23}^{4,2,>,>} = \{r_1 = \tilde\phi|\tilde\eta|^{1/2}|\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,$
$s_2 = \tilde\phi|\tilde\eta|^{3/2}|\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}\varphi_2^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\sigma_\beta\}$;
$L1_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{r_1, s_1 = 1,\ r_2 = 0,\ s_2 = -2\}$,
$L2_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = (\tilde u - 2)s_2/2,\ r_2, s_2 = 2|\tilde u(\tilde u - 2)|^{-1/2}\}$;
$L_4^{2,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\eta,\ s_1 = \tilde\phi^4\tilde\gamma(p_1\tilde\eta)^{-1},\ r_2 = -\tilde\alpha,\ s_2 = \tilde\phi^4 p_1^{-1}\}$;
$L_{10}^{3,2,>,=} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = |2\tilde\beta|^{-1/2},\ r_2 = \nu^{-1}s_1,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;

$L1_{16}^{3,2,>,=} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = -\tilde\phi/2,\ r_2 = -\tilde\phi\tilde\eta\tilde\gamma^{-1}\,\sigma_\beta,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\phi,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(2\tilde\gamma)^{-1}\,\sigma_\beta\}$;
$L_{23}^{4,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\phi,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(\varphi_3^-)^{-1}\,\sigma_\beta\}$;
$L_{8,-1}^{2,2,>,=} = \{r_1, s_2 = |\tilde\eta|^{1/2}(\tilde\alpha^2+\tilde\beta^2)^{-1}\mu^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,<} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde\phi(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}$,
$r_2 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,<} = \{r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2$,
$r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi(\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}\}$;
$L_{23}^{4,2,>,<} = \{r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1$,
$s_2 = \tilde\phi((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{1/2}/\varphi_4^-\}$.

Утверждение 3.2. *Только следующие формы из списка 3.1 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим в силу СП структурным формам:*

1) $NSF_{8,-1}^{4,2,>,>}$: *a) при* $u=-1$ *заменой с* $r_2=-r_1$ $s_1=s_2$ *сводится к* $SF_8^{2,2}$;
b) $NSF_{8,-1}^{4,2,>,=}$ $(u=1)$ *той же заменой сводится к* $SF_4^{2,2}$;

2) $NSF_{14,-1}^{4,2,>,>}$: *a) при* $u=-3$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=-2s_2$ *сводится к* $SF_{8,-1}^{4,2}$;
b) при $u=-2$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_{10}^{3,2}$;
c) $NSF_{14,-1}^{4,2,>,=}$ $(u=-1)$ *той же заменой сводится к* $SF_{16}^{3,2}$;

3) $NSF_{23}^{4,2,>,>}$: *a) при* $\tilde\sigma=\sigma,\ u=1\ (v>0,\ v\neq 1)$ *заменой* $L_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $\sigma=-\tilde\sigma,\ u=(1-v^{1/2})(1+v^{1/2})^{-1}\in(-1,1)$ $(|u|<1)$;
b) при $\tilde u = u\neq 1,\ v=(2\tilde u-1)/4\ (\tilde u\neq\pm 1/2)$ *заменой* $L1_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $u=-2\tilde u-1\ (u\neq -1,-2,-3)$;
c) при $\tilde\sigma=\sigma,\ \tilde u=u\neq 1,\ v=\tilde u(2-\tilde u)/4\ (\tilde u\neq\pm 2)$ *заменой* $L2_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $\sigma=-\tilde\sigma\,\mathrm{sign}(\tilde u(\tilde u-2)),\ u=-(\tilde u+2)\tilde u^{-1}\ (u\neq -1,-2,-3)$.

Теорема 3.1. *Любая система* $(2.1)^1$ *с* $l=2$, *записанная в виде* $(1.1^>)$ *согласно* $(2.15)^1$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 3.1. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,>,*}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(1.1^>)$, *b) замены* (1.2), *преобразующие правую часть системы* $(1.1^>)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров* u,v *из* $cs_i^{m,2,>,*}$:

$CF_4^{2,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $\tilde\alpha=0,\ \tilde\gamma=0$, *b)* J_1^2, $L_4^{2,2,>,>}$, *c)* $\sigma=1,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF_{10}^{3,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $[\,\tilde\alpha=0,\ \tilde\gamma\neq 0\vee\tilde\alpha\neq 0,\ \tilde\gamma=0\,]$, *b)* J_1^2, $[\,L1_{10}^{3,2,>,>}\vee L2_{10}^{3,2,>,>}\,]$, *c)* $\sigma=[\,-\sigma_0\sigma_\gamma\vee\sigma_0\sigma_\alpha\,]$, $u=[\,\lambda_1\lambda_2^{-1}\vee\lambda_1^{-1}\lambda_2\,]$;

$CF_{8,+1}^{2,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $\tilde\beta=0,\ \nu=0$, *b)* J_1^2, $L_{8,+1}^{2,2,>,>}$, *c)* $\sigma=\sigma_0\sigma_\alpha$;

$CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $\tilde\beta=0,\ \nu\neq 0$, *b)* J_1^2, $L1_{23}^{4,2,>,>}$, $L_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $v=D(2\nu)^{-2}$, *c)* $\sigma=-\sigma_0\sigma_\alpha,\ u=(|2\nu|-D^{1/2})(|2\nu|+D^{1/2})^{-1}$;

$CF_{16}^{3,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma\neq 0$, $2\tilde\tau\nu=[\,\sigma_0D^{1/2}|\tilde\beta|\vee-\sigma_0D^{1/2}|\tilde\beta|\,]$, *b)* J_1^2, $[\,L1_{16}^{3,2,>,>}\vee L2_{16}^{3,2,>,>}\,]$, *c)* $\sigma=[\,\sigma_\alpha\mathrm{sign}\,\lambda_1\vee\sigma_\gamma\mathrm{sign}\,\lambda_2\,]$, $u=-\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;

$CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma\neq 0$, $2\tilde\tau\nu\neq\pm D^{1/2}|\tilde\beta|$, $4\tilde v=[\,2\tilde u-1\vee\tilde u(2-\tilde u)\,]$, *где* $\tilde u=\varphi_1\varphi_2^{-1}$, $\tilde v=-D\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2\varphi_2^{-2}$, *b)* J_1^2, $L2_{23}^{4,2,>,>}$, $[\,L1_{14,-1}^{4,2,>,>}\vee L2_{14,-1}^{4,2,>,>}\,]$, *c)* $\sigma=[\,\sigma_0\sigma_\alpha\vee\sigma_0\sigma_\alpha\mathrm{sign}(\tilde u(2-\tilde u))\,]$, $u=[\,-(1+2\tilde u)^{-1}\vee-\tilde u(\tilde u+2)^{-1}\,]$;

$CF_{23}^{4,2,>,>}$: *a)* $D>0$, *в* (1.5) $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma\neq 0$, $2\tilde\tau\nu\neq\pm D^{1/2}|\tilde\beta|$, $4\tilde v\neq\tilde u(2-\tilde u),(2\tilde u-1)$, *где* $\tilde u=\varphi_1\varphi_2^{-1}$, $\tilde v=-D\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2\varphi_2^{-2}$, *b)* J_1^2, $L2_{23}^{4,2,>,>}$, *c)* $\sigma=\sigma_0\sigma_\alpha,\ u=\tilde u,\ v=\tilde v$;

$CF_4^{2,2,>,=}$: *a)* $D=0$, $q_1,p_2=0$, *b)* $L_4^{2,2,>,=}$, *c)* $\sigma=1$;

$CF_{10}^{3,2,>,=}$: $(1.1^>)$ *при* $D=0$, $[\,q_1\neq 0\vee q_1=0,\ p_2\neq 0\,]$, *в* $[\,(1.6_a)\vee(1.6_b)\,]$ $\tilde\gamma=0$ *заменами* $[\,J_{2a}^2\vee J_{2b}^2\,]$, $L_{10}^{3,2,>,=}$ *сводится к* $CF_{10}^{3,2,>,=}$ *с* $\sigma=\sigma_\beta$;

$CF_{16}^{3,2,>,=}$: 1) *a)* $D=0$, $[\,q_1\neq 0 \vee q_1=0,\ p_2\neq 0\,]$, *в* $[\,(1.6_a)\vee(1.6_b)\,]$ $\tilde\gamma\neq 0$, $\varphi_3^+=0$, *b)* $[\,J_{2a}^2\vee J_{2b}^2\,]$, $L1_{16}^{3,2,>,=}$, *c)* $\sigma=-\sigma_\beta$;
2) *a)* $D=0$, $[\,q_1\neq 0\vee q_1=0,\ p_2\neq 0\,]$, *в* $[\,(1.6_a)\vee(1.6_b)\,]$ $\tilde\gamma\neq 0$, $\varphi_3^-=0$, *b)* $[\,J_{2a}^2\vee J_{2b}^2\,]$, $L2_{16}^{3,2,>,=}$, *c)* $\sigma=\sigma_\beta$;

$CF_{23}^{4,2,>,=}$: *a)* $D=0$, $[\,q_1\neq 0\vee q_1=0,\ p_2\neq 0\,]$, *в* $[\,(1.6_a)\vee(1.6_b)\,]$ $\tilde\gamma\neq 0$, $\varphi_3^\pm\neq 0$, *b)* $[\,J_{2a}^2\vee J_{2b}^2\,]$, $L_{23}^{4,2,>,=}$, *c)* $\sigma=\sigma_\beta$, $u=\varphi_3^+(\varphi_3^-)^{-1}$, $v=-\tilde\gamma^2(\varphi_3^-)^{-2}$;

$CF_{8,-1}^{2,2,>,<}$: *a)* $D<0$, $\nu=0$, *в* (1.7) $\tilde\alpha+\tilde\gamma=0$, *b)* J_3^2, $L_{8,-1}^{2,2,>,<}$, *c)* $\sigma=\sigma_\beta$;

$CF_{16}^{3,2,>,<}$: *a)* $D<0$, $\nu\neq 0$, *в* (1.7) $[\,\varphi_4^+=0\vee\varphi_4^-=0\,]$, *b)* J_3^2, $[\,L1_{16}^{3,2,>,<}\vee L2_{16}^{3,2,>,<}\,]$, *c)* $\sigma=[\,-\sigma_\beta\vee\sigma_\beta\,]$;

$CF_{23}^{4,2,>,<}$: *a)* $D<0$, *в* (1.7) $\nu^2+(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^2\neq 0$, $\varphi_4^\pm\neq 0$, *b)* J_3^2, $L_{23}^{4,2,>,<}$, *c)* $\sigma=\sigma_\beta$, $u=\varphi_4^+(\varphi_4^-)^{-1}$, $v=-\mu^2(\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\tilde\eta^{-2}(\varphi_4^-)^{-2}$.

Доказательство. В зависимости от знака дискриминанта D из $(2.16)^1$ система $(1.1^>)$ с $\beta^2>\alpha\gamma$ одной из замен J_1^2, J_{2a}^2 или J_{2b}^2, J_3^2 сведена соответственно к одной из систем (1.5), (1.6) или (1.7) с жордановой матрицей $\widetilde H$ и общим множителем $\widetilde P_0^2$, причем $\tilde\tau,|\tilde\eta|>0$, так как $\widetilde D_0=\delta^2 D_0$ в силу $(2.19)^1$.

Далее в каждой из полученных систем сделана произвольная замена (1.2), преобразующая ее в систему (1.8), из которой и будут выделяться канонические формы.

В системе (1.8) коэффициенты $\breve\alpha$, $\breve\gamma$ общего множителя $\breve P_0^2$ всегда можно сделать нулевыми, в результате чего $\breve A$ из (1.8) будет иметь элементы $\breve a_1,\breve a_2=0$ и $\breve d_1,\breve d_2=0$.

Для этого в замене (1.2) достаточно зафиксировать следующие две связи:

$$s_1=-\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\quad r_2=-\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1\quad(\,\tilde\tau=(\tilde\beta^2-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2},\ \ \tilde\eta=\tilde\beta+\sigma_\beta\tilde\tau,\ \ \operatorname{sign}0=1),\tag{3.14}$$

при выполнении которых имеем $\delta=r_1s_2-r_2s_1=2\tilde\tau\tilde\eta^{-1}\sigma_\beta r_1s_2$, в системе (1.8) — $\breve\beta=2\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1}\,r_1s_2$. Если $\tilde\alpha\tilde\gamma=0$, то $\tilde\tau=|\tilde\beta|\neq 0$, а если $\tilde\beta=0$, то $\tilde\tau=\tilde\eta=(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}>0$.

Однако никакими заменами при условии (3.14) не получить $NSF_{8,-1}^{4,2,>}$, $NSF_{a,14,-1}^{4,2,>}$ из списка 3.1. Но эти формы предшествуют только $NSF_{23}^{4,2,>}$ и именно из нее будут получены согласно утверждению 3.2_3 в п.п. 1_2^{1b} и 1_2^{2c} соответственно.

1) Рассмотрим $D>0$ $\ (\lambda_1,\lambda_2\neq 0,\ \lambda_1-\lambda_2=\sigma_0\sqrt{D}\neq 0)$. Из системы $(1.1^>)$ заменой J_1^2 получена система (1.5) (см. [3, прил. 3.5.1, с. 119]).

Произвольная замена (1.2) при условии (3.14) сводит (1.5) к системе (1.8) вида

$$2\tilde\tau\,\sigma_\beta\begin{pmatrix}0 & (\lambda_1-\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_2)r_1s_2 & -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0\\ 0 & \tilde\alpha\tilde\eta^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & (\lambda_2-\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_1)r_1s_2 & 0\end{pmatrix}.\tag{3.15}$$

1_1) Рассмотрим случай $\tilde\alpha\tilde\gamma=0$ $\ (\tilde\beta\neq 0,\ \tilde\tau=|\tilde\beta|,\ \tilde\eta=2\tilde\beta)$.

1_1^1) Пусть $\tilde\alpha,\tilde\gamma=0$ $\ (r_1,s_2=0)$. Тогда система (3.15) приобретает вид $\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=1$, $s_2=(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}$ это — $CF_4^{2,2,>,>}$ с $\sigma=1$, $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq 1$.

1_1^2) Пусть $\tilde\alpha=0$, $\tilde\gamma\neq 0$. Тогда система (3.15) примет следующий вид: $\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & -\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0\\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=-|\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\gamma$, $s_2=|\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ это — $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с $\sigma=-\sigma_0\operatorname{sign}\tilde\gamma$, $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq 1$.

1_1^3) Пусть $\tilde\gamma=0$, $\tilde\alpha\neq 0$. Тогда система (3.15) будет иметь вид $\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & 0 & 0\\ 0 & \tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde\alpha(\lambda_1-$

$\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_1)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha$ это — $CF^{3,2,>,>}_{a,10}$ с $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq 1$, $\sigma=\sigma_0\sigma_\alpha$. Перенумерация $(2.7)^1$ сведет ее к $CF^{3,2,>,>}_{10}$ с теми же $\sigma,\ u$.

1_2) Рассмотрим случай $\tilde\alpha\neq 0$, $\tilde\gamma\neq 0$ $(\tilde\tau\neq|\tilde\beta|)$. Тогда в (3.15) имеем $\breve c_1\breve b_2\neq 0$.

1_2^1) $\tilde\beta=0$, тогда $\tilde\alpha\tilde\gamma<0$ и $\tilde\eta,\tilde\tau=(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}$. Поэтому система (3.15) имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1s_2 & -2\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0\\ 0 & 2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1s_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

1_2^{1a}) Пусть $\lambda_2=-\lambda_1\Leftrightarrow q_2=-p_1$. Тогда система (3.16) при $r_1=|4\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=|4\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF^{2,2,>,>}_{8,+1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde\alpha\lambda_1)\,(=\sigma_\alpha\sigma_0=\sigma_\alpha\operatorname{sign}p_1=-\sigma_0\sigma_\gamma)$.

1_2^{1b}) Пусть $\lambda_2\neq-\lambda_1$. Тогда (3.16) при $s_2=-|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha$, $r_1=|2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ — это $NSF^{4,2,>,>}_{23}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2))\,(=\sigma_0\sigma_\alpha)$, $u=1$, $v=D(\lambda_1+\lambda_2)^{-2}$ $(v>0\ ,v\neq 1)$. По утверждению 3.2_3 она не является канонической, так как сводится к $CF^{4,2,>,>}_{8,-1}$.

1_2^2) Пусть $\tilde\beta\neq 0$. Тогда $\breve b_1^2+\breve c_2^2\neq 0$.

1_2^{2a}) $\breve c_2=0\Leftrightarrow\lambda_2=\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_1\Leftrightarrow\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)=|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2)$, так как $\tilde\alpha\tilde\gamma=(\tilde\beta-\sigma_\beta\tilde\tau)\tilde\eta$. Тогда (3.15) — это система $\begin{pmatrix}0 & 8\tilde\beta\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_1r_1s_2 & -4\tilde\gamma\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_1s_2^2 & 0\\ 0 & 4\tilde\alpha\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_1r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=\tilde\eta(2\tilde\tau)^{-1}|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=\tilde\eta\tilde\alpha(4\tilde\beta\tilde\tau)^{-1}|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$ это — $CF^{3,2,>,>}_{16}$ с $\sigma=\sigma_\alpha\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=-\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}>-1/4$.

1_2^{2b}) $\breve b_1=0\Leftrightarrow\lambda_1=\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_2\Leftrightarrow\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)=-|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2)$. Тогда система (3.15) имеет вид $4\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 0 & \tilde\gamma s_2^2 & 0\\ 0 & -\tilde\alpha r_1^2 & 2\tilde\beta r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=\tilde\eta\tilde\gamma(4\tilde\beta\tilde\tau)^{-1}|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2}$, $s_2=\tilde\eta(2\tilde\tau)^{-1}|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2}$ это — $CF^{3,2,>,>}_{a,16}$ с $\sigma=\sigma_\gamma\operatorname{sign}\lambda_2$, $u=-\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$. Далее делается перенумерация $(2.7)^1$.

1_2^{2c}) $\breve b_1,\breve c_2\neq 0\Leftrightarrow\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)\pm|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$. Тогда система (3.15) при $r_1=|\tilde\eta|^{1/2}|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}\tilde\phi$, $s_2=|\tilde\eta|^{3/2}|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}\tilde\phi\varphi_2^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\sigma_\beta$ — это $NSF^{4,2,>,>}_{23}$ с $\sigma=\sigma_0\sigma_\alpha$, $u=\varphi_1\varphi_2^{-1}$ $(u\neq 1)$, $v=-\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2(\lambda_1-\lambda_2)^2\varphi_2^{-2}$ $(v\neq u,\ 4v>-(1-u)^2)$.

Теперь при $v=(2u-1)/4$ или $v=u(2-u)/4$ полученная $NSF^{4,2,>,>}_{23}$ не является канонической, так как согласно утверждению 3.2_3 сводится к $CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$.

А если $v\neq(2u-1)/4,\ u(2-u)/4$, то $NSF^{4,2,>,>}_{23}=CF^{4,2,>,>}_{23}$.

2) Рассмотрим $D=0$ $(\lambda_1,\lambda_2=\nu=(p_1+q_2)/2\neq 0)$ (см. [3, прил. 3.5.2, с. 128]).

2_1) Пусть $q_1\neq 0$ или $q_1=0$, $p_2\neq 0$ $(q_2=p_1=\nu)$. Из $(1.1^>)$ заменой J^2_{2a} или J^2_{2b} получена система (1.6), которую любая замена (1.2) при условии (3.14) сводит к (1.8) вида

$$2\tilde\tau\begin{pmatrix}0 & \varphi_3^+\tilde\eta^{-1}r_1s_2 & -\tilde\gamma^2\tilde\eta^{-2}\,\sigma_\beta s_2^2 & 0\\ 0 & \sigma_\beta r_1^2 & \varphi_3^-\tilde\eta^{-1}r_1s_2 & 0\end{pmatrix}\quad(\varphi_3^\pm=2\tilde\tau\nu\,\sigma_\beta\pm\tilde\gamma). \tag{3.17}$$

2_1^1) Пусть $\tilde\gamma=0$ $(\tilde\tau=|\tilde\beta|,\ \tilde\eta=2\tilde\beta)$. Тогда система (3.17) принимает вид $2\tilde\beta\begin{pmatrix}0 & \nu r_1s_2 & 0 & 0\\ 0 & r_1^2 & \nu r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=|2\tilde\beta|^{-1/2}$, $s_2=\nu^{-1}r_1$ это — $CF^{3,2,>,=}_{a,10}$ с $\sigma=\sigma_\beta$, $u=1$. И далее осуществляется перенумерация $(2.7)^1$.

2_1^2) Пусть $\tilde\gamma\neq 0$. Тогда в системе (3.17) $\breve b_2\breve c_1\neq 0$, $\breve b_1^2+\breve c_2^2\neq 0$.

2_1^{2a}) $\breve b_1=0\Leftrightarrow\varphi_3^+=0$. Тогда (3.17) можно записать в виде $\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\tilde\tau\tilde\gamma^2\tilde\eta^{-2}\,\sigma_\beta\,s_2^2 & 0\\ 0 & 2\tilde\tau\,\sigma_\beta\,r_1^2 & -4\tilde\tau\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=-\tilde\phi/2$, $s_2=-\tilde\phi\tilde\eta\tilde\gamma^{-1}\,\sigma_\beta$ это — $CF^{3,2,>,=}_{a,16}$ с $\sigma=-\sigma_\beta$, $u=-1/4$ и соответствует $(2.7)^1$.

2_1^{2b}) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_3^- = 0$. Тогда (3.17) будет выглядеть следующим образом: $\begin{pmatrix} 0 & 4\tilde\tau\tilde\gamma\tilde\eta^{-1} r_1 s_2 & -2\tilde\tau\tilde\gamma^2\tilde\eta^{-2}\,\sigma_\beta\, s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde\tau\,\sigma_\beta\, r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde\phi$, $s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(2\tilde\gamma)^{-1}\,\sigma_\beta$ это — $CF_{16}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = -1/4$.

2_1^{2c}) $\breve{b}_1\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_3^\pm \neq 0$. При $r_1 = \tilde\phi$, $s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(\varphi_3^-)^{-1}\sigma_\beta$ система (3.17) — это $CF_{23}^{4,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_3^+(\varphi_3^-)^{-1}$, $v = -\tilde\gamma^2(\varphi_3^-)^{-2}$ ($u \neq \pm 1$, $4v = -(1-u)^2$), так как по утверждению 3.2 $NSF_{23}^{4,2,>,=}$ не может быть сведена к $NSF_{8,-1}^{4,2,>,=}$ или $NSF_{14,-1}^{4,2,>,=}$.

2_2) Пусть $q_1 = 0$, $p_2 = 0$, т. е. в самой системе ($1.1^>$) H — диагональная матрица с диагональю (p_1, p_1). Тогда замена (1.2) с $r_1 = \tilde\eta$, $s_1 = \tilde\phi^4\tilde\gamma(p_1\tilde\eta)^{-1}$, $r_2 = -\tilde\alpha$, $s_2 = \tilde\phi^4 p_1^{-1}$ сводит ($1.1^>$) к $CF_4^{2,2,>,=}$ с $\sigma = 1$ ($u = 1$).

3) Рассмотрим $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 < 0$ ($p_2q_1 < 0$). Из ($1.1^>$) получена система (1.7) (см. [3, прил. 3.5.3, с. 135]).

Произвольная замена (1.2) при условии (3.14) сводит (1.7) к системе (1.8) вида

$$\frac{2\tilde\tau\sigma_\beta}{\tilde\eta^2}\begin{pmatrix} 0 & \tilde\eta\varphi_4^+ r_1 s_2 & -(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\mu s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu r_1^2 & \tilde\eta\varphi_4^- r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\varphi_4^\pm = 2\tilde\tau\nu\sigma_\beta + (\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu). \tag{3.18}$$

3_1) Пусть $\nu = 0$ ($\Leftrightarrow p_1 + q_2 = 0$), $\tilde\alpha + \tilde\gamma = 0$. Тогда $\tilde\tau = (\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^{1/2}$ и (3.18) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1}\mu\, s_2^2 & 0 \\ 0 & 4\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1}\mu\, r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde\phi^2|\tilde\eta|^{1/2}\mu^{-1/2}$ получаем $CF_{8,-1}^{2,2,>,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde\beta$.

3_2) Пусть $\nu^2 + (\tilde\alpha + \tilde\gamma)^2 \neq 0$, тогда $\breve{b}_1^2 + \breve{c}_2^2 \neq 0$.

3_2^1) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^+ = 0$ ($\nu(\tilde\alpha + \tilde\gamma) \neq 0$). Тогда система (3.18) имеет вид

$$\frac{2\tilde\tau\mu\sigma_\beta}{\tilde\eta^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)r_1^2 & -2\tilde\eta(\tilde\alpha+\tilde\gamma)r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $r_1 = \tilde\phi(\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha + \tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}$ это — $CF_{a,16}^{3,2,>,<}$ с $\sigma = -\sigma_\beta$, $u = -(\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)(2\tilde\eta(\tilde\alpha + \tilde\gamma))^{-2} < -1/4$. И далее делается перенумерация $(2.7)^1$.

3_2^2) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^- = 0$ ($\nu(\tilde\alpha + \tilde\gamma) \neq 0$). Тогда система (3.18) примет вид

$$\frac{2\tilde\tau\mu\sigma_\beta}{\tilde\eta^2}\begin{pmatrix} 0 & 2\tilde\eta(\tilde\alpha+\tilde\gamma)r_1 s_2 & -(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $s_2 = \tilde\phi(\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha + \tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}$, $r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}$ это — $CF_{16}^{3,2,>,<}$ с $\sigma = \sigma_\beta$ и u из 3_2^1).

3_2^3) $\breve{b}_1\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_4^\pm \neq 0$. При $r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde\phi((\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{1/2}(\varphi_4^-)^{-1}$ система (3.18) — это $CF_{23}^{4,2,>,<}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_4^+(\varphi_4^-)^{-1}$, $v = -\mu^2(\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)\tilde\eta^{-2}(\varphi_4^-)^{-2}$ ($4v < -(1-u)^2$), так как по утверждению 3.2 $NSF_{23}^{4,2,>,<}$ не сводится к $NSF_{8,-1}^{4,2,>,<}$ и $NSF_{14,-1}^{4,2,>,<}$. □

Приведем линейные неособые замены, которые для CF из списка 3.1 позволят выделить канонические минимальные множества, введенные в определении 1.11 из [2].

Утверждение 3.3. *Только для следующих $CF^{m,2,>}$ из списка 3.1 удается ограничить значения параметров в $cs^{m,2,>}$, а именно:*
1) в $CF_4^{2,2,>}$ нормировка $(2.6)^1$ с $r_1, -s_2 = 1$ изменяет знак σ; при $\tilde u = u$, $|\tilde u| > 1$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = 1$, $r_2 = \tilde u^{-1}$ дает $u = \tilde u^{-1}$;

2) в $CF^{2,2,>}_{8,-1}$ *перенумерация* $(2.7)^1$*, а в* $CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$ *при* $u = 1$ *замена с* $-r_1, r_2, s_2 = 3^{-1/2}$, $s_1 = 2s_2$ *изменяют знак* σ;
3) в $CF^{4,2,>,>}_{8,-1}$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $|\tilde u| > 1$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = -\tilde\sigma \operatorname{sign} \tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$;
4) в $CF^{4,2,>,>}_{23}$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $|\tilde u| > 1$, $\tilde v = v$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |\tilde v|^{3/2}(\tilde u \tilde v)^{-1}$, $r_2 = |\tilde v|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = \tilde\sigma \operatorname{sign} v$, $u = \tilde u^{-1}$, $v = \tilde u^{-2}\tilde v$.

Следствие 3.1. *Согласно определению 1.12 из [2] имеем*
$acs^{2,2,>,>}_4 = \{|u| > 1,\ \sigma = -1\}$, $acs^{2,2,>,=}_4 = \{\sigma = -1\}$, $acs^{2,2,>,<}_{8,-1} = \{\sigma = -1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{8,-1} = \{|u| > 1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{14,-1} = \{\sigma = -1 \text{ при } u = 1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{23} = \{|u| > 1\}$; *для остальных канонических форм из списка 3.1* — $mcs^{m,2,>,*} = cs^{m,2,>,*}$.

Дополнение. В работах А. П. Маркеева [4, 5] на основе линейных вещественных канонических преобразований осуществлена классификация невозмущенных автономных гамильтонианов третьего и четвертого порядков и выделены согласно нашей терминологии канонические формы таких гамильтонианов. Тем самым, для гамильтоновых систем получены все гамильтоновы нормальные формы второго и третьего порядков. Их интересно сравнить с нормальными формами второго порядка, впервые полученными К. С. Сибирским в [6] и позднее, на основе иных принципов выделения, В. В. Басовым с соавторами (см. в библиографии к работе [1] статьи [12, 13]), а также с нормальными формами третьего порядка, получаемыми в настоящем цикле. И в случае совпадения, а такие совпадения имеются, интересно сравнить структуры получаемых гамильтоновых и негамильтоновых обобщенных нормальных форм.

Отметим также, что в [5] отдельные канонические гамильтонианы третьего порядка были использованы в качестве невозмущенных для последующей нормализации гамильтоновых возмущений любого конечного порядка, после чего был получен ряд результатов по устойчивости или неустойчивости положения равновесия, определяемой условиями, накладываемыми на соответствующие члены нормальных форм.

Литература

1. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61). Вып. 2. С. 181–195.

2. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 355–371.

3. *Басов В. В., Чермных А. С.* Канонические формы двумерных однородных кубических систем с квадратичным общим множителем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 66–190. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovch.pdf (дата обращения: 03.03.17).

4. *Маркеев А. П.* Упрощение структуры форм третьей и четвертой степеней в разложении функции Гамильтона при помощи линейного преобразования // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 447–464.

5. *Маркеев А. П.* О преобразовании Биркгофа в случае полного вырождения квадратичной части функции Гамильтона // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 343–352.

6. *Сибирский К. С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев: «Штиинца», 1982. 168 с.

Статья поступила в редакцию 6 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Басов Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; vlvlbasov@rambler.ru

Чермных Александр Сергеевич — магистрант; achermnykh@yandex.ru

TWO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS CUBIC SYSTEMS: CLASSIFICATION AND NORMAL FORMS — III

Vladimir V. Basov, Aleksander S. Chermnykh

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vlvlbasov@rambler.ru, achermnykh@yandex.ru

This article is the third in a series of works devoted to the two-dimensional cubic homogeneous systems. It is considered a case when a homogeneous polynomial vector in the right-hand part of the system has a square common factor with real zeros. The set of such systems is divided into classes of linear equivalence, in each of them on the basis of properly introduced structural and normalization principles the simplest system is distinguished — the normal form of the third order. In fact, the normal form is defined by the coefficient matrix of the right-hand part, which is called the canonical form (CF). Each CF has its own arrangement of nonzero elements, their specific normalization and canonical set of permissible values for the non-normalized elements, which guarantees CF's belonging to the selected class of equivalence. In addition, for each CF are given: a) the conditions on the coefficients of the initial system, b) non-singular linear substitution reducing the right-hand part of the system under these conditions to the selected CF, c) obtained values of CF's non-normalized elements. Refs 6.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

References

1. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — I", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(2), 99–110 (2016).

2. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — II", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(3), 204–218 (2016).

3. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Canonical Forms of Two-dimensional Homogeneous Cubic Systems with a Common Square Factor", *Differential Equations and Control Processes* (3), 66–190 (2016). Available at: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/EN/numbers/2016.3/article.1.7.html (accessed 03.03.17) [in Russian].

4. Markeev A. P., "Simplifying the structure of the third and fourth degree forms in the expansion of the Hamiltonian with a linear transformation", *Nonlinear Dynamics* **10**(4), 447–464 (2014) [in Russian].

5. Markeev A. P., "On the Birkhoff transformation in the case of complete degeneracy of the quadratic part of the Hamiltonian", *Regular and Chaotic Dynamics* **20**(3), 309–316 (2015).

6. Sibirskii K. S., *An introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations* (Izd. Shtiintsa, Kishinev, 1982, 168 p.) [in Russian].

Для цитирования: Басов В. В., Чермных А. С. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — III // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 179–192. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.201

For citation: Basov V. V., Chermnykh A. S. Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — III. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 179–192. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.201