УДК 517.925.53 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 2
MSC 37C29, 37C75, 34C37

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК ТРЕХМЕРНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматриваются диффеоморфизмы трехмерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предполагается, что матрица Якоби исходного диффеоморфизма имеет комплексные собственные числа в начале координат. Показано, что при определенных условиях, наложенных, прежде всего, на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Библиогр. 8 назв.

Ключевые слова: трехмерный диффеоморфизм, гиперболическая точка, нетрансверсальная гомоклиническая точка, устойчивость.

Рассматривается C^r-гладкий диффеоморфизм ($r \geq 1$) трехмерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой, предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической к ней точки. Из статей [1–3] следует, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий окрестность гомоклинической точки может содержать счетное множество устойчивых периодических точек, но, по крайней мере, один из характеристических показателей таких точек стремится к нулю с ростом периода. В работе [4] показано, что диффеоморфизм плоскости может иметь счетное множество устойчивых периодических точек с характеристическими показателями, отделенными от нуля. Пример такого диффеоморфизма плоскости приведен в книге [5]. Диффеоморфизм многомерного пространства в себя рассматривался в работах [6, 7], в которых предполагалось, что матрица Якоби указанного диффеоморфизма в неподвижной точке 0 имеет только действительные собственные числа.

Предлагаемая работа является продолжением работ [6, 7] для случая наличия у матрицы Якоби комплексных собственных чисел. Основная цель работы — показать, что диффеоморфизм трехмерного пространства произвольного класса гладкости может иметь счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля, если матрица Якоби имеет комплексные собственные числа.

Пусть f — диффеоморфизм трехмерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, а именно $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(0) = 0$. Предположим, что f линеен в некоторой ограниченной окрестности начала координат V, точнее

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu\cos(2\pi\theta) & -\mu\sin(2\pi\theta) \\ 0 & \mu\sin(2\pi\theta) & \mu\cos(2\pi\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

для любых $(x, y, z) \in V$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

Предположим, что справедливы неравенства

$$0 < \lambda < 1 < \mu, \quad 0 < \theta < 1, \quad \lambda\mu^2 < 1. \tag{2}$$

Известно, что *устойчивое* $W^s(0)$ и *неустойчивое* $W^u(0)$ *многообразия* гиперболической точки диффеоморфизма f определяются, как

$$W^s(0) = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} \|f^k(w)\| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} \|f^{-k}(w)\| = 0 \right\}.$$

Предполагается наличие гомоклинической точки, а именно: в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий лежит отличная от нуля точка u, причем эта точка является точкой касания данных многообразий.

Из определения гомоклинической точки следуют равенства

$$\lim_{k\to\infty} \|f^k(u)\| = \lim_{k\to\infty} \|f^{-k}(u)\| = 0.$$

Пусть u_1 и u_2 — две такие точки из орбиты гомоклинической точки, что $u_1 \in V$, $u_2 \in V$, их координаты имеют вид $u_1 = (0, y^0, z^0)$, $u_2 = (x^0, 0, 0)$, и для них справедливо включение

$$V_1 = \big\{ (x, y, z) : \, |x| < \lambda^{-1}|x^0|, \; |y| < \mu(|y^0| + |z^0|), \; |z| < \mu(|y^0| + |z^0|) \big\} \subset V. \tag{3}$$

Предположим, что

$$x^0 > 0, \quad y^0 > 0, \quad z^0 > 0. \tag{4}$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число τ такое, что $f^\tau(u_1) = u_2$. Пусть U — окрестность точки u_1 такая, что $U \subset V_1$, $f^\tau(U) \subset V_1$, и множества U, $f(U)$, $f^2(U)$, $\dots$, $f^\tau(U)$ попарно не пересекаются. Обозначим через L сужение $f^\tau\,|_U$. Ясно, что L — отображение класса C^r ($r \geq 1$), а матрица $DL(0)$ — невырожденная.

Из (1) следует, что λ, $\mu e^{\pm i2\pi\theta}$ — собственные числа матрицы $Df(0)$. В работах [6, 7] показано, что произвольно малая окрестность точки u_1 может содержать бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями при условии, что все собственные числа матрицы $Df(0)$ действительны. В данной работе предполагается, что среди собственных чисел матрицы $Df(0)$ имеется пара комплексно сопряженных.

Предположим также, что величина θ такова, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел m_k такая, что при некотором действительном $\eta > 1$ и любом k справедливо неравенство

$$|\mu^{m_k} \sin(2\pi m_k \theta)| \leq (\eta)^{-m_k}. \tag{5}$$

Пусть θ рационально, тогда существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел m_k, что

$$\mu^{m_k} \sin(2\pi m_k \theta) = 0.$$

Очевидно, что условия (5) в этом случае выполняются. В противном случае, а именно, если θ иррационально, неравенства (5) могут и не выполняться.

Известно, что иррациональные числа делятся на лиувиллевы и диофантовы (свойства лиувиллевых чисел приведены в [8]).

Определение. Число γ называется *лиувиллевым числом*, если для любого натурального k существуют целые p, $m\,(m > 1)$ такие, что

$$0 < \left|\gamma - \frac{p}{m}\right| < \frac{1}{m^k}.$$

Иррациональные числа, которые не являются лиувиллевыми, называются *диофантовыми числами.*

Любое лиувиллево число можно представить как

$$\gamma = \frac{p_k}{m_k} + \delta_k, \quad 0 < |\delta_k| < (m_k)^{-k}, \tag{6}$$

где p_k, m_k — последовательности целых чисел, причем последовательность m_k возрастает.

Следующая лемма показывает, что существуют лиувиллевы числа, для которых справедливы неравенства (5).

Лемма 1. *Пусть $\xi > \mu$ — натуральное число, а последовательность натуральных чисел j_k такова, что $j_{k+1} > \xi^{j_k} + j_k k$ для любого k, тогда сумма ряда*

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{-j_k}$$

является лиувиллевым числом, для которого справедливы неравенства (5), где

$$m_k = \xi^{j_k}, \quad p_k = m_k \sum_{n=1}^{k} \xi^{-j_n}.$$

Доказательство. Определим $\delta_k = \theta - p_k/m_k$. Имеют место соотношения

$$0 < \delta_k = \theta - \frac{p_k}{m_k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \xi^{-j_n} = \xi^{-j_{k+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \xi^{-(j_{k+l+1} - j_{k+1})} <$$

$$< \xi^{-j_{k+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \xi^{-l} = \xi^{-j_{k+1}} \frac{\xi}{\xi - 1}$$

или

$$0 < \delta_k < \frac{\xi}{\xi - 1} \xi^{-m_k} (m_k)^{-k}.$$

Таким образом, θ — лиувиллево число.

Из (6) имеем

$$\mu^{m_k} \sin(2\pi m_k \theta) = \mu^{m_k} \sin\left(2\pi m_k \left(\frac{p_k}{m_k} + \delta_k\right)\right) = \mu^{m_k} \sin(2\pi m_k \delta_k),$$

неравенства (5) следуют из последних соотношений. Лемма доказана.

Пусть отображение L, определенное ранее, имеет вид

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=f^{\tau}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^0+a_1x+a_2(y-y^0)+a_3(z-z^0)+\varphi_1(x,y-y^0,z-z^0)\\bx+h(y-y^0,z-z^0)+\varphi_2(x)\\c_1x+c_2(y-y^0)+g(z-z^0)+\varphi_3(x,y-y^0)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2 — действительные числа такие, что

$$a_3bc_2>0, \tag{8}$$

φ_1, φ_2, φ_3, h, g — функции класса C^r $(r\geq 1)$ в окрестности начала координат, равные нулю вместе со своими производными первого порядка в начале координат. Предположим, что производные первого порядка функций φ_1, φ_2, φ_3 ограничены в окрестности U положительной постоянной M. При этом будем иметь

$$DL(0)=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b&0&0\\c_1&c_2&0\end{pmatrix}.$$

Последние предположения означают, что u_2 является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Так же, как в работах [6, 7], характер касания $W^s(0)$, $W^u(0)$ в точке u_2 определяется свойствами функций h, g. Для того чтобы сформулировать эти свойства, введем в рассмотрение следующие последовательности. Пусть σ_k, ε_k — положительные, стремящиеся к нулю последовательности, причем последовательность σ_k убывает.

Предположим, что для любого k выполняется неравенство

$$\sigma_k-\varepsilon_k-\sigma_{k+1}-\varepsilon_{k+1}>0. \tag{9}$$

Считаем, что последовательность m_k, введенная в (5), такова, что

$$\left(\lambda\mu^2\right)^{m_k}<\varepsilon_k \tag{10}$$

для любого k.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&x_k=\lambda^{m_k}(x^0+a_2\lambda^{m_k}+a_3\sigma_k)(1-a_1\lambda^{m_k})^{-1},\\&y_k=y^0+\lambda^{m_k},\quad z_k=z^0+\sigma_k,\quad \Delta_k=\varepsilon_k\mu^{-m_k},\\&\delta_k=\max[\lambda^{m_k}\sigma_k,4(M+|a_3|)\lambda^{m_k}\varepsilon_k],\\&d=\min\left[1,\,0.25(|c_2|+M)^{-1}\right].\end{aligned}$$

Предположим, что C^r-гладкие $(r\geq 1)$ функции g, h и их производные первого порядка удовлетворяют при любом k нижеперечисленным условиям:

$$\begin{gathered}\left|h(\lambda^{m_k},\sigma_k)+bx_k-\mu^{-m_k}[y_k\cos(2\pi m_k\theta)+z_k\sin(2\pi m_k\theta)]\right|<0.25d\lambda^{m_k},\\\left|g(\sigma_k)+c_1x_k+c_2\lambda^{m_k}-\mu^{-m_k}[-y_k\sin(2\pi m_k\theta)+z_k\cos(2\pi m_k\theta)]\right|<0.25\Delta_k.\end{gathered} \tag{11}$$

Кроме того, предположим, что существует такое $\alpha>1$, что производные функций g, h удовлетворяют при любом k неравенствам

$$\left|\frac{\partial h(s,t)}{\partial s}\right|<\mu^{-2\alpha m_k},\qquad\left|\frac{\partial h(s,t)}{\partial t}\right|<\mu^{-2\alpha m_k}, \tag{12}$$

где $s \in [\lambda^{m_k} - d\Delta_k, \lambda^{m_k} + d\Delta_k]$, $t \in [\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k]$, и неравенству

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| < \mu^{-2\alpha m_k}, \tag{13}$$

где $t \in [\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k]$.

Условия (5), (11)–(13) показывают, что последовательность m_k должна стремиться к бесконечности достаточно быстро.

Определим последовательность множеств

$$U_k = \{(x, y, z) : |x - x_k| < \delta_k, \quad |y - y_k| < d\Delta_k, \quad |z - z_k| < \varepsilon_k\}.$$

Ясно, что $U_k \subset U$ при достаточно больших k.

Теорема. *Пусть дан диффеоморфизм f трехмерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой u_1. Пусть выполнены условия* (1)–(5), (7)–(13), *тогда произвольная окрестность точки u_1 содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы, тогда справедливы следующие включения:*

$$f^{m_k} L(\bar{U}_k) \subset U_k, \tag{14}$$

где $\bar{U}_k$ — замыкание U_k.

Доказательство леммы для случая двумерного диффеоморфизма приведено в [4], в рассматриваемом случае доказательство проводится аналогично.

Доказательство теоремы. Из (14) следует, что при любом k (может быть, начиная с некоторого номера) окрестность U_k содержит неподвижную точку отображения $f^{m_k} L$, которая является периодической точкой диффеоморфизма f с периодом $\tau + m_k$. Обозначим эти точки и их координаты следующим образом:

$$w_k = (\bar{x}_k, y^0 + \bar{y}_k, z^0 + \bar{z}_k).$$

Для того чтобы оценить характеристические показатели точек w_k, надо оценить собственные числа матрицы $Df^{m_k} L(w_k) = \{\omega_{ij}\}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

Введем обозначения:

$$\begin{array}{lll} a_1(k) = a_1 + \frac{\partial \varphi_1(w_k)}{\partial x}, & a_2(k) = a_2 + \frac{\partial \varphi_1(w_k)}{\partial y}, & a_3(k) = a_3 + \frac{\partial \varphi_1(w_k)}{\partial z}, \\ b(k) = b + \frac{d\varphi_2(\bar{x}_k)}{dx}, & c_1(k) = c_1 + \frac{\partial \varphi_3(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{\partial x}, & c_2(k) = c_2 + \frac{\partial \varphi_3(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{\partial y}, \\ h_1(k) = \frac{\partial h(\bar{y}_k, \bar{z}_k)}{\partial y}, & h_2(k) = \frac{\partial h(\bar{y}_k, \bar{z}_k)}{\partial z}, & g(k) = \frac{dg(\bar{z}_k)}{dz}. \end{array}$$

Из условий (12), (13) следуют соотношения

$$\lim_{k\to\infty} a_i(k) = a_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \lim_{k\to\infty} b(k) = b; \quad \lim_{k\to\infty} c_i(k) = c_i, \quad i = 1, 2;$$
$$|h_i(k)| < \mu^{-2\alpha m_k}, \quad i = 1, 2; \quad |g(k)| < \mu^{-2\alpha m_k}.$$

Таким образом, элементы матриц $Df^{m_k}L(w_k) = \{\omega_{ij}\}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$, имеют вид

$$
\begin{array}{l}
\omega_{11} = \lambda^{m_k} a_1(k), \quad \omega_{12} = \lambda^{m_k} a_2(k), \quad \omega_{13} = \lambda^{m_k} a_3(k), \\
\omega_{21} = \mu^{m_k} \left(b(k)\cos(2\pi m_k\theta) - c_1(k)\sin(2\pi m_k\theta)\right), \\
\omega_{22} = \mu^{m_k} \left(h_1(k)\cos(2\pi m_k\theta) - c_2(k)\sin(2\pi m_k\theta)\right), \\
\omega_{23} = \mu^{m_k} \left(h_2(k)\cos(2\pi m_k\theta) - g(k)\sin(2\pi m_k\theta)\right), \\
\omega_{31} = \mu^{m_k} \left(b(k)\sin(2\pi m_k\theta) + c_1(k)\cos(2\pi m_k\theta)\right), \\
\omega_{32} = \mu^{m_k} \left(h_1(k)\sin(2\pi m_k\theta) + c_2(k)\cos(2\pi m_k\theta)\right), \\
\omega_{33} = \mu^{m_k} \left(h_2(k)\sin(2\pi m_k\theta) + g(k)\cos(2\pi m_k\theta)\right).
\end{array}
\tag{15}
$$

Обозначим через $\Theta_i(k)$ $(i = 1,2,3)$ главные миноры второго порядка матрицы $Df^{m_k}L(w_k)$. (Напомним, что *главным минором матрицы* называется такой минор, номера выбранных строк которого совпадают с номерами столбцов.) Тогда имеем

$$
\begin{array}{l}
\Theta_1(k) = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}, \\
\Theta_2(k) = \omega_{11}\omega_{33} - \omega_{13}\omega_{31}, \\
\Theta_3(k) = \omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}\omega_{32}.
\end{array}
\tag{16}
$$

Пусть $P(\rho)$ — характеристический многочлен матрицы $Df^{m_k}L(w_k)$, а именно

$$P(\rho) = \sum_{i=0}^{3} P_i(k)\,\rho^{3-i}.$$

Коэффициенты этого многочлена имеют вид

$$
\begin{array}{l}
P_0(k) = -1, \quad P_1(k) = \mathrm{Tr} Df^{m_k}L(w_k), \\
P_2(k) = -\sum\limits_{i=1}^{3} \Theta_i(k), \quad P_3(k) = \det Df^{m_k}(w_k).
\end{array}
$$

С другой стороны, $P(\rho)$ можно представить как

$$P(\rho) = -\prod_{i=1}^{3}(\rho - \rho_i(k)),$$

где $\rho_i(k)$, $i = 1,2,3,$ — корни характеристического многочлена. Отсюда получаем

$$
\begin{array}{l}
P_1(k) = \rho_1(k) + \rho_2(k) + \rho_3(k), \\
P_2(k) = -\rho_1(k)\rho_2(k) - \rho_1(k)\rho_3(k) - \rho_2(k)\rho_3(k), \\
P_3(k) = \rho_1(k)\rho_2(k)\rho_3(k).
\end{array}
$$

Применяя методы, описанные в [6, 7], с учетом условий (5), (12), (13), (15), (16) легко получить, что существуют положительные β и T такие, что

$$|\rho_i(k)| \le T\mu^{-\beta m_k}, \quad i = 1,2,3.$$

Последние неравенства справедливы при достаточно больших номерах k.

Известно, что характеристические показатели периодических точек w_k диффеоморфизма f определяются как

$$v_i(k) = (\tau + m_k)^{-1}\ln|\rho_i(k)|, \quad i = 1,2,3.$$

Отсюда получим

$$v_i(k) \leq (\tau + m_k)^{-1} (\ln T - \beta m_k \ln \mu) \leq -0.5\beta \ln \mu, \quad i = 1, 2, 3.$$

Последние неравенства справедливы для всех номеров k, начиная с некоторого номера. Теорема доказана.

Литература

1. *Иванов Б. Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.
2. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Доклады академии наук. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
3. *Newhouse Sh.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. Vol. 12. P. 9–18.
4. *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 20–26.
5. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
6. *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 3–13.
7. *Васильева Е. В.* Гладкие диффеоморфизмы трехмерного пространства с устойчивыми периодическими точками // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 4. С. 25–29.
8. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974. 158 с.

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторе

Васильева Екатерина Викторовна — доктор физико-математических наук, доцент;
ekvas1962@mail.ru

TO THE QUESTION OF STABILITY OF PERIODIC POINTS OF THREE-DIMENSIONAL DIFFEOMORPHISMS

Ekaterina V. Vasilieva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
ekvas1962@mail.ru

We consider diffeomorphism of three-dimensional space with a hyperbolic fixed point at the origin and nontransversal homoclinic point to it. It is follows from the works of Sh. Newhouse, L. P. Shil'nikov, B. F. Ivanov and others that under certain conditions a neighborhood of the homoclinic point contains a countable set of stable periodic points, but at least one of the characteristic exponents at these points tends to zero with increasing period. Earlier, in the author's work was considered a three-dimensional diffeomorphism and it was assumed that all the eigenvalues of the Jacobi matrix at the origin are real. It was shown that for a certain type of tangency of the stable and unstable manifolds, a neighborhood homoclinic point contains a countable set of stable periodic points with characteristic exponents bounded away from zero. In the present paper we consider the diffeomorphism a three-dimensional space and it is assumed that the Jacobi matrix at the origin has complex eigenvalues. It is shown that in this case the neighborhood nontransversal homoclinic point can contain an infinite number of stable periodic points with characteristic exponents bounded away from zero. Refs 8.

Keywords: three-dimensional diffeomorphism, hyperbolic point, nontransversal homoclinic point, stability.

References

1. Ivanov B. F., "Stability of the Trajectories That Do Not Leave the Neighborhood of a Homoclinic Curve", *Differ. Uravn.* **15**(8), 1411–1419 (1979) [in Russian].

2. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P., "Dynamical Phenomena in Mutidimensional Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Poincare' Curve", *Doklady Mathematics* **17**(3), 410–415 (1993).

3. Newhouse Sh., "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks", *Topology* **12**, 9–18 (1973).

4. Vasileva E. V., "Stable Periodic Points of Two-dimensinal Diffeomorphisms", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **40**(2), 107–113 (2007).

5. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977, 304 p.) [in Russian].

6. Vasileva E. V., "Diffeomorphisms of Multidimensinal Space with Infinite Set of Stable Periodic Points", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **45**(3), 115–124 (2012).

7. Vasileva E. V., "Smooth Diffeomorphisms of Three-dimensinal Space with Stable Periodic Points", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **46**(4), 25–29 (2013).

8. Oxtoby J., *Measure and Category* (New-York, Heidelberg; Berlin, Springer-Verlag, 1971, 160 p.).

Для цитирования: Васильева Е. В. К вопросу устойчивости периодических точек трехмерных диффеморфизмов // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 193–200. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.202

For citation: Vasilieva E. V. To the question of stability of periodic points of three-dimensional diffeomorphisms. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 193–200. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.202