

МЕХАНИКА

УДК 539.3
MSC 74D10, 74R20

**СТАРЕНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ
СЖИМАЕМЫХ УПРУГО-ВЯЗКИХ СРЕД***

А. Р. Арутюнян, Р. А. Арутюнян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для описания процессов старения и разрушения упруго-вязкой среды используется модифицированный вариант уравнения Максвелла, записанный в шкале эффективного времени, и уравнение для параметра поврежденности. Показано, что предложенные уравнения описывают хорошо кривые ползучести и релаксации напряжений, в частности, в отличие от формулы Максвелла, решение для релаксации напряжений имеет не нулевую асимптоту. Уравнение наследственной упруго-вязкой среды Больцмана—Вольтерра применяется для описания деформации ползучести и длительной прочности сжимаемой упруго-вязкой среды. С учетом этого уравнения получено аналитическое решение для параметра сплошности и сформулирован критерий длительной прочности. По полученным решениям построены теоретические кривые для параметра сплошности и критерия длительной прочности. Получено качественное, а для кривых ползучести и количественное согласие с соответствующими экспериментальными результатами. Библиогр. 12 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: эффективное время, упруго-вязкая среда Максвелла, упруго-вязкая среда Больцмана—Вольтерра, климатическое и деформационное старение, параметр поврежденности, ползучесть, релаксация напряжений, критерий длительной прочности.

Введение. При длительном воздействии механических напряжений и умеренных температур происходят взаимосвязанные процессы деформирования и поврежденности полимерных материалов. Эти процессы приводят к деструктивным эффектам, состоящим из термической и механической стадий. В случае композиционных материалов из хрупких компонент поврежденность определяется следующими процессами: потерей сплошности зоны контакта волокно-матрица, разрушением волокон в дефектных объемах, образованием трещин или пустот в матрице и др. Эти процессы сопровождаются химическими реакциями, которые усиливают изменения структуры и свойств рассматриваемых материалов. Соответственно, можно выделить два типа разрушения полимерных материалов в процессе длительных механических

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00823, № 15-01-03159).
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

и тепловых воздействий. Первый тип (механический) реализуется в условиях активного нагружения и в опытах на ползучесть при умеренных температурах. Второй тип разрыва (химический) связан с накоплением структурной поврежденности в процессе длительного старения при отсутствии внешнего напряжения (статическая усталость). Как показывают опыты, эти процессы способствуют охрупчиванию и хрупкому разрушению полимерных материалов. На практике имеет место чередование длительного механического воздействия и статической усталости. Наши опыты, выполненные над образцами из полиуретана, при различных программах нагружения (растяжение, сжатие, циклическое нагружение) и старения подтверждают эффект значительного изменения механических свойств материала. При этом деградация материала в значительной степени определяется процессами старения. В случае стабильных полимеров, в частности композиционных материалов, когда процессы старения не являются определяющими, разрушения связаны с механической поврежденностью. В работе рассматриваются оба случая. В случае стареющих сред используется уравнение Максвелла, записанное в шкале эффективного времени и кинетическое уравнение, основанное на концепции поврежденности. Параметр поврежденности определяется величиной относительного изменения плотности материала, являющегося интегральной мерой накопления структурных микродефектов в процессе старения и длительного нагружения. Для описания поведения стабильной, сжимаемой упруго-вязкой среды привлекается уравнение наследственной среды Больцмана—Вольтерра. Получены аналитические соотношения для деформации ползучести, релаксации напряжений, параметра сплошности и критерии длительной прочности. Построены соответствующие теоретические кривые. Рассмотрены релаксационные эффекты в стареющей упруго-вязкой среде Максвелла.

В концепции рассеянного повреждения и хрупкого разрушения Качанова—Работнова [1, 2] вводятся параметры сплошности и поврежденности без придания им определенного физического содержания. В данной работе в качестве параметра сплошности (поврежденности) ψ ($1 \geq \psi \geq 0$) рассматривается относительное изменение объема (разрыхление по терминологии Новожилова [3]) или плотности $\psi = \rho/\rho_0$ [4] (ρ_0 — начальная, ρ — текущая плотность). Таким образом, параметр сплошности является интегральной мерой накопления структурных микродефектов в процессе длительных механических и климатических воздействий. В начальном состоянии $t = 0$, $\rho = \rho_0$, $\psi = 1$. В момент разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$.

1. Поврежденность и длительная прочность для стареющей среды Максвелла. Рассмотрим задачу о растяжении образца из упруго-вязкого стареющего материала под воздействием постоянной нагрузки P . В качестве реологического уравнения воспользуемся модифицированным уравнением Максвелла, записанным в шкале эффективного времени α [4],

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (1)$$

$$d\alpha = f_1(\alpha, \varepsilon, T, t)dt + f_2(\alpha, \varepsilon, T, t)d\varepsilon, \quad (2)$$

где ε — деформация, σ — истинное напряжение, T — температура, E — модуль упругости, η — коэффициент вязкости.

Параметр α рассматривается как эффективное время, с помощью которого возможно описание процессов климатического и деформационного старения. Согласно уравнению (2) при мгновенных, активных нагружениях параметр α соответствует

деформационному времени ε . В состоянии разгрузки этот параметр описывает кинетику химических процессов старения и сводится к обычному времени t . При такой трактовке можно ввести понятие химического времени. Таким образом, параметр эффективного времени в общем случае способен описать взаимосвязанные деформационные и физико-химические процессы и описывать их развитие в шкале деформационного и химического времени. В этом отличие данного параметра от известных температурно-временных и полимеризационных параметров, используемых в механике полимеров [5–8].

Принимая закон сохранения массы $\rho_0 l_0 F_0 = \rho l F$ (l_0, F_0 — начальные, l, F — текущие длина и площадь поперечного сечения стержня), с учетом которого следует соотношение $\sigma = \sigma_0 \psi e^\varepsilon$, уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{\sigma_0}{E} \frac{d(\psi e^\varepsilon)}{d\alpha} + \frac{\sigma_0 \psi e^\varepsilon}{\eta}, \quad (3)$$

где $\sigma_0 = P/F_0$ — условное напряжение, $\varepsilon = \ln(l/l_0)$ — деформация.

Кинетическое уравнение для параметра сплошности (поврежденности) ψ определяется следующим соотношением [9–10]:

$$\psi^a \frac{d\psi}{dt} = -A \sigma_0^n \psi^n e^{n\varepsilon}, \quad (4)$$

где a, A, n — постоянные.

Таким образом, проблема ползучести и длительной прочности стареющей полимерной среды сводится к решению взаимосвязанных уравнений (3), (4). В общем виде не представляется возможным получение аналитического решения этой системы. Далее рассматриваются некоторые приближенные решения.

При расчетах по формуле (2) параметр эффективного времени задается в виде

$$d\alpha = k(\alpha_\infty - \alpha)t^m dt, \quad (5)$$

где k, α_∞, m — постоянные, α — параметр дегградации материала ($\alpha = N/N_0$, N_0 — начальное число химических связей, N — текущее число разрушенных химических связей). Таким образом, уравнение (5) может рассматриваться как уравнение химической реакции, а параметр α имеет смысл химического времени.

При решении уравнения (3) принимается предположение о независимости процесса ползучести от поврежденности, согласно условию $\psi e^\varepsilon \approx 1$. Тогда решение уравнения (3) при начальных условиях $t = 0, \alpha = \alpha_0, \varepsilon = \sigma_0/E_0$ может быть записано в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\tau} \left(1 - \exp \left(-\frac{k}{m+1} t^{m+1} \right) \right) \right], \quad (6)$$

где τ — время релаксации.

Теоретические кривые ползучести согласно (6) показаны на рис. 1. Использованы следующие значения коэффициентов: $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = 0, k = 0,021 \text{ сек}^{-1}, \sigma_0 = 1 \text{ МПа}$, времена релаксации и модули упругости $\tau_1 = 1 \text{ сек}, E_0 = 25 \text{ МПа}$ (кривая 1) и $\tau_2 = 30 \text{ сек}, E_0 = 30 \text{ МПа}$ (кривая 2). Экспериментальные результаты отмечены кружочками и крестиками. Теоретические кривые на рис. 1 хорошо согласуются с результатами экспериментов [11] по ползучести и старению полиэтиленовых пленок. Верхняя кривая получена в экспериментах над образцами без старения, нижняя кривая — после старения. Образцы старились в течение 7 дней при температуре 353 К.

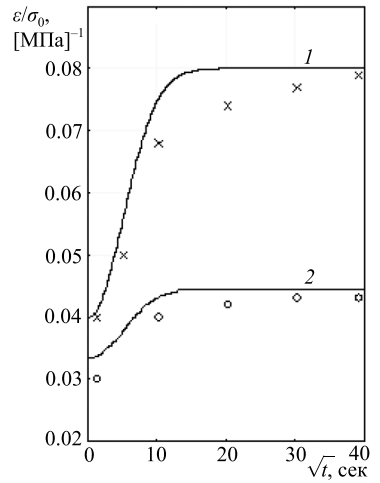


Рис. 1. Теоретические кривые ползучести согласно соотношению (6) и экспериментальные результаты по ползучести и старению полиэтиленовых пленок [11].

Согласно расчетам наиболее простое решение, качественно описывающее экспериментальные кривые поврежденности, может быть получено при следующих приближениях:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{(\alpha_\infty - \alpha_0)k}{\tau(m+1)} t^{m+1} \right], \quad (7)$$

$$\psi^a \frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^n (1 + n\varepsilon). \quad (8)$$

Внося (7) в (8) и решая его при начальном условии $t = 0, \psi = 1$, получим

$$\psi = \left[1 - (a - n + 1)A\sigma_0^n \left(\frac{n\sigma_0(\alpha_\infty - \alpha_0)k}{E_0\tau(m+1)(m+2)} t^{m+2} + \left(\frac{n\sigma_0}{E_0} + 1 \right) t \right) \right]^{\frac{1}{a-n+1}}. \quad (9)$$

На рис. 2 показаны кривые изменения параметра сплошности согласно уравнению (9) для различных значений постоянных ($a = 6$ — кривая 1, $a = 4$ — кривая 2, $a = 2$ — кривая 3).

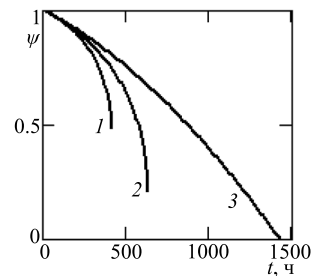


Рис. 2. Кривые для параметра сплошности ψ согласно уравнению (9) для различных значений постоянных: $a = 6$ — кривая 1, $a = 4$ — кривая 2, $a = 2$ — кривая 3.

При расчетах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2, A = 10^{-7} [\text{МПа}]^{-2}, \alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, \sigma_0 = 60 \text{ МПа}, m = 0, k = 0,021 \text{ сек}^{-1}, \tau = 1 \text{ сек}, E_0 = 2000 \text{ МПа}$.

Принимая условия разрушения в виде $t = t_f$, $\psi = 0$, из (9) при $m = 0$ следует критерий длительной прочности

$$t_f = \frac{E_0 \tau}{n \sigma_0 (\alpha_\infty - \alpha_0) k} \left[- \left(\frac{n \sigma_0}{E_0} + 1 \right) + \left(\left(\frac{n \sigma_0}{E_0} + 1 \right)^2 + \frac{n (\alpha_\infty - \alpha_0) k}{E_0 \tau (a - n + 1) A \sigma_0^{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (10)$$

На рис. 3 в двойных логарифмических координатах показаны кривые длительной прочности согласно формуле (10) для различных значений коэффициентов ($a = 6$ — кривая 1, $a = 4$ — кривая 2, $a = 2$ — кривая 3). При расчетах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $A = 10^{-7} [\text{МПа}]^{-2}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_\infty = 1$, $m = 0$, $k = 0,021 \text{ сек}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ сек}$, $E_0 = 2000 \text{ МПа}$.

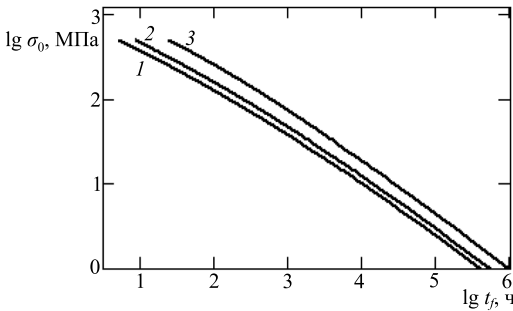


Рис. 3. Кривые длительной прочности согласно формуле (10) для различных значений коэффициентов: $a = 6$ — кривая 1, $a = 4$ — кривая 2, $a = 2$ — кривая 3.

2. Релаксация напряжений. Рассмотрим случай релаксации напряжений. Принимая в (1) $\varepsilon = \text{const}$, получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\eta} = 0. \quad (11)$$

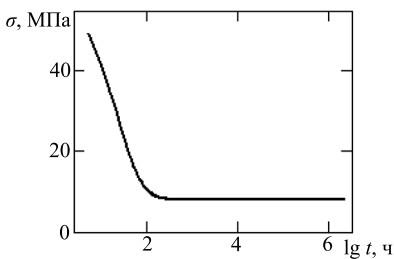


Рис. 4. Кривая релаксации напряжений согласно формуле (13).

Учитывая соотношение (5) и решая уравнение (11) при начальном условии $t = 0$, $\sigma = \sigma_0$, получим

$$\sigma = \sigma_0 \exp \left[\frac{1}{\tau} (\alpha_\infty - \alpha_0) (e^{-kt} - 1) \right]. \quad (12)$$

На рис. 4 показана теоретическая кривая релаксации напряжений согласно формуле (12). При расчетах были приняты следующие значения коэффициентов: $\sigma_0 = 60 \text{ МПа}$, $\tau_0 = 0,5 \text{ ч}$, $k = 0,021 \text{ сек}^{-1}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_\infty = 1$.

При $t \rightarrow \infty$ из (12) следует

$$\sigma = \sigma_* = \sigma_0 \exp \left[-\frac{1}{\tau} (\alpha_\infty - \alpha_0) \right], \quad (13)$$

где σ_* — предельная величина напряжения.

Релаксация напряжений по модели Максвелла определяется в виде соотношения $\sigma = \sigma_0 \exp(-t/\tau)$, из которого следует $\sigma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что не согласуется с результатами опытов.

3. Поврежденность и разрушение наследственной упруго-вязкой среды Больцмана—Вольтерра. В случае стабильных полимеров, когда процессы старения не являются определяющими, разрушения связаны с механической поврежденностью. Например [12], в случае композиционных материалов параметр сплошности достигает 15% в опытах на ползучесть. Поврежденность определяется потерей сплошности зоны контакта волокно-матрица, разрушением волокон в дефектных объемах, образованием трещин или пустот в матрице и др. Для описания этих процессов и формулировки соответствующих критериев длительной прочности далее используется уравнение наследственной вязко-упругой среды Больцмана—Вольтерра

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (14)$$

где $R(t-\tau)$ — некоторая убывающая функция аргумента $(t-\tau)$ (ядро ползучести).

Рассмотрим наиболее простую формулу ядра ползучести в виде модифицированного соотношения Больцмана

$$R(t-\tau) = \frac{c}{t-\tau+\tau_0}, \quad (15)$$

где c, τ_0 — постоянные.

Как будет показано далее, при таком выборе ядра ползучести удастся получить аналитическое решение уравнения поврежденности и сформулировать соответствующий критерий длительной прочности.

В случае ползучести, когда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, из решения уравнения (14) с учетом (15) и начального условия $t = 0, \varepsilon = 0$ имеем соотношение для деформации ползучести [2]

$$\varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + c \ln \left(\frac{t+\tau_0}{\tau_0} \right) \right). \quad (16)$$

Внося (16) в уравнение для параметра сплошности (8) и решая это уравнение при начальном условии $t = 0, \psi = 1$, получим

$$\psi = \left[1 - (1-n)A\sigma_0^n e^{\frac{n\sigma_0}{E}} \frac{\tau_0}{n\sigma_0 c + 1} \left(1 - \left(\frac{t+\tau_0}{\tau_0} \right)^{n\sigma_0 c + 1} \right) \right]^{\frac{1}{1-n}}. \quad (17)$$

На рис. 5 представлена кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (17).

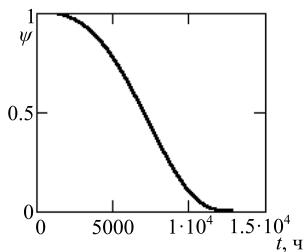


Рис. 5. Кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (17).

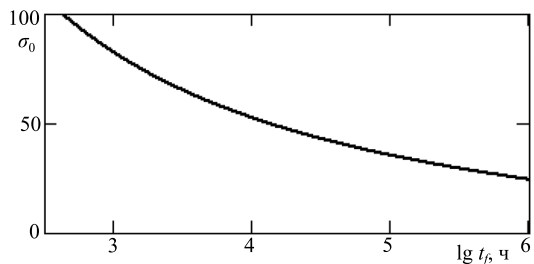


Рис. 6. Кривая длительной прочности согласно критерию (18).

Принимая условие разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$, из (17) получим критерий длительной прочности

$$t_f = \tau_0 \left[\left(1 - \frac{n\sigma_0 c + 1}{(1-n)A\sigma_0^n \tau_0 e^{\frac{n\sigma_0}{E}}} \right)^{\frac{1}{n\sigma_0 c + 1}} - 1 \right]. \quad (18)$$

Кривая длительной прочности согласно формуле (18) представлена на рис. 6.

При расчетах по формулам (17) и (18) были приняты следующие значения коэффициентов: $\sigma_0 = 50$ МПа, $E = 4000$ МПа, $\tau_0 = 2$ ч, $n = 0.7$, $C = 5 \cdot 10^{-2}$ [МПа] $^{-1}$, $A = 1 \cdot 10^{-11}$ [МПа] $^{-0.7}$.

Литература

1. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Новожилов В. В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. № 4. С. 681–689.
4. Арутюнян Р. А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. 252 с.
5. Гуль В. Е. Структура и прочность полимеров. М.: Химия, 1971. 344 с.
6. Бартенев Г. М., Зуев Ю. С. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов. М.; Л.: Химия, 1964. 387 с.
7. Москвитин В. В. Сопроотивление вязко-упругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
8. Valanis K. C. On the foundation of the endochronic theory of viscoplasticity // Archiwum mechaniki stosowanej. 1975. Vol. 27, N 5–6. P. 857–868.
9. Арутюнян Р. А. Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 96–104.
10. Арутюнян Р. А. Проблема высокотемпературной ползучести и длительной прочности металлических материалов // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 6(53). С. 76–80.
11. Пестриков В. М. Об определяющих соотношениях стареющих материалов с учетом протекающих физико-химических процессов // Известия РАН. Мех. тверд. тела. 1999. № 4. С. 134–140.
12. Кузнецов Г. Б., Ковров В. Н. Учет эффектов разрыхления высоконаполненного полимера в уравнениях наследственной вязкоупругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1994. № 4. С. 110–115.

Статья поступила в редакцию 3 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Арутюнян Александр Робертович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; agutalr@rambler.ru

Арутюнян Роберт Ашотович — доктор физико-математических наук, профессор; r.agutyunyan@spbu.ru

AGING AND FRACTURE OF COMPRESSIBLE ELASTIC-VISCOUS MEDIA

Alexander R. Arutyunyan, Robert A. Arutyunyan

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; arutralr@rambler.ru, r.arutyunyan@spbu.ru

During the prolonged action of mechanical stresses and moderate temperatures the interrelated processes of deformation and damage in polymer materials are occurred. These processes lead to destructive effects and are accompanied by chemical reactions, which increase the structure changes and properties of the considered materials. Accordingly, it is possible to distinguish two types of fracture of polymeric materials during long-term mechanical and thermal effects. The first type (mechanical) is implemented in the condition of active loading, and in experiments on creep at moderate temperatures. The second type of fracture (chemical) is associated with the accumulation of structural damage in the long process of aging in the absence of external stress (static fatigue). The modified version of Maxwell's equation and the equation for the damage parameter are formulated. The analytical solutions for the creep and stress relaxation are derived. Unlike Maxwell formula, the stress relaxation ratio has not zero asymptote. To describe the creep deformation and fracture of a compressible elastic-viscous medium the Boltzmann–Volterra equation is used. An analytical solution for the continuity parameter and the long-term strength criterion is received. The theoretical curves for the continuity parameter and the long-term strength criterion are plotted. Quantitative and for creep curves qualitative agreement with the corresponding experimental curves are observed. Refs 12. Figs 6.

Keywords: effective time, elastic-viscous Maxwell's media, elastic-viscous media of Boltzmann–Volterra, climatic and strain aging, damage parameter, creep, stress relaxation, long-term strength criterion.

References

1. Kachanov L. M., "On the time of fracture under creep conditions", *Izv. USSR Academy of Science. OTN* (8), 26–31 (1958) [in Russian].
2. Rabotnov Yu. N., "The creep of structural elements" (Nauka, Moscow, 1966, 752 p.) [in Russian].
3. Novozhilov V. V., "About plastic loosening", *Journal of applied mathematics and mechanics* (4), 681–689 (1965) [in Russian].
4. Arutyunyan R. A., "The problem of deformation aging and prolonged fracture in mechanics of materials" (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2004, 252 p.) [in Russian].
5. Gul V. E., "Structure and strength of polymers" (Chemistry, Moscow, 1971, 344 p.) [in Russian].
6. Bartenev G. M., Zuev Yu. S., "Strength and fracture of highly elastic materials" (Chemistry, Moscow, Leningrad, 1964, 387 p.) [in Russian].
7. Moskvitin V. V., "Resistance of viscoelastic materials" (Nauka, Moscow, 1972, 327 p.) [in Russian].
8. Valanis K. C., "On the foundation of the endochronic theory of viscoplasticity", *Archiwum mechaniki stosowanej* **27**(5–6), 857–868 (1975).
9. Arutyunyan R. A., "The embrittlement and high temperature long-term strength of metallic materials", *Mechanics of solids* (2), 96–104 (2015).
10. Arutyunyan R. A., "The problem of high-temperature creep and long-term strength of metallic materials", *Bulletin of civil engineers* **6**(53), 76–80 (2015) [in Russian].
11. Pestrikov V. M., "About the defining relations of aging materials with consideration the occurring physical-chemical processes", *Izvestiya RAN. Mech. of solid body* **4**, 134–140 (1999) [in Russian].
12. Kuznetsov B. G., Kovrov V. N., "Account of the effects of loosening of the highly filled polymer in the equations of hereditary viscoelasticity", *Izvestiya RAN. Mech. of solid body* **4**, 110–115 (1994) [in Russian].

Для цитирования: Арутюнян А. Р., Арутюнян Р. А. Старение и разрушение сжимаемых упруго-вязких сред // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 258–265. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.209

For citation: Arutyunyan A. R., Arutyunyan R. A. Aging and fracture of compressible elastic-viscous media. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 258–265. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.209