

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВОЙ ВСТАВКОЙ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

С. М. Бауэр, С. В. Каштанова, Н. Ф. Морозов, Б. Н. Семенов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Решается задача о потере плоской формы равновесия бесконечной пластины с круговой вставкой из другого материала, находящейся под действием одноосного растяжения. Исследуется влияние модуля упругости вставки на значение критической нагрузки. Для нахождения минимального собственного числа, соответствующего первой критической нагрузке, применяется вариационный принцип.

Расчеты проводятся в пакете Maple и сравниваются с результатами, полученными методом конечных элементов в пакете ANSYS 13.1.

Проведенные расчеты показывают, что потеря устойчивости при вставке более мягкой, чем пластина, и при вставке более жесткой, чем пластина происходят по разным формам. При приближении значения модуля Юнга вставки к значению модуля Юнга пластины критическая нагрузка существенно увеличивается. При совпадении модулей упругости пластины и вставки потеря устойчивости невозможна. Библиогр. 10 назв. Ил. 5. Табл. 1.

Ключевые слова: потеря устойчивости пластины, энергетический метод.

Введение. Задачам устойчивости тонких пластин с отверстиями и трещинами посвящена монография [1]. Отмечено, что сжимающие напряжения могут возникать не только при сжатии пластин, что очевидно, но около границы отверстий и при растяжении. При определенной величине растягивающих внешних усилий данные напряжения могут вызвать локальную потерю устойчивости пластин, существенно влияющую на их несущую способность. Потеря плоской формы деформирования пластин с различными типами вырезов при одноосном растяжении исследовалась в работах [2–4].

Известно, что сжимающие напряжения наблюдаются также в пластинах с включениями. Исследованию возможной потери плоской формы деформирования при одноосном растяжении таких пластин и посвящена эта работа. В качестве простейшей рассматривается задача о возможной потере устойчивости плоской формы равновесия при одноосном растяжении напряжениями σ пластинки со вставленной круговой шайбой из другого материала.

Деформация пластины со вставкой. Решение задачи о деформации растягиваемой пластинки со вставленной круговой шайбой из другого материала в полярных координатах r, φ с центром, совпадающим с центром круговой вставки, приведено в [5, 6].

Согласно теореме Эшелби поле напряжений внутри эллиптической вставки является однородным и симметричным по отношению к оси растяжения. Таким образом, при задании однородного растягивающего напряжения σ , направленного вдоль оси y , внутри вставки реализуется однородное поле напряжений, пропорциональное этому напряжению [7, 8]:

$$\sigma_y = k_y \sigma, \quad \sigma_x = k_x \sigma, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (1)$$

Компоненты поля напряжений вне вставки имеют следующий вид [9]:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_y}{\sigma} &= 1 + \frac{(1-k_y+k_x)R^2}{2r^2} \left[1 + \frac{3R^2+10y^2}{r^2} - F + G \right] - \frac{k_x R^2}{r^2} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right), \\ \frac{\sigma_x}{\sigma} &= \frac{(1-k_y+k_x)R^2}{2r^2} \left[3 - \frac{3R^2+18y^2}{r^2} + F - G \right] + \frac{k_x R^2}{r^2} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right), \\ \frac{\sigma_{xy}}{\sigma} &= \frac{(1-k_y+k_x)R^2 xy}{r^4} \left[3 - \frac{2(3R^2+4y^2)}{r^2} + \frac{12R^2 y^2}{r^4} \right] - \frac{2k_x R^2 xy}{r^4},\end{aligned}\quad (2)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $F = 8y^2(3R^2 + 2y^2)/r^4$, $G = 24R^2y^4/r^6$, R — радиус вставки, h — толщина и пластины, и вставки.

Коэффициенты k_y и k_x в (1), (2) зависят от упругих параметров пластины и вставки и получаются из равенства деформаций на границе пластины и включения:

$$\begin{aligned}k_y &= \frac{E_2[(3-\nu_2)E_1+(5+\nu_1)E_2]}{(E_1+2E_2)^2-[\nu_2E_1+(1-\nu_1)E_2]^2}, \\ k_x &= \frac{E_2[(3\nu_2-1)E_1+(1-3\nu_1)E_2]}{(E_1+2E_2)^2-[\nu_2E_1+(1-\nu_1)E_2]^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь E_1, ν_1 и E_2, ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона, соответственно, пластины и вставки.

В предельных случаях, если вставка отсутствует ($E_2=0, \nu_2=0$), соотношения (2) дают известное решение задачи Кирша [6]. В случае, если вставка является абсолютно жесткой, соотношения (3) имеют более простой вид [9]:

$$k_y = \frac{5 + \nu_1}{3 + 2\nu_1 - \nu_1^2}, \quad k_x = \frac{1 - 3\nu_1}{3 + 2\nu_1 - \nu_1^2}.$$

Из (2) следует, что напряжения σ_y/σ в основном положительны (отрицательные зоны возникают при стремлении к предельным случаям: абсолютно «жесткой» вставке и ее отсутствию). Напряжения σ_x/σ могут принимать отрицательные значения, причем и область, в которой эти напряжения принимают отрицательные значения, и абсолютная величина этих значений тем меньше, чем жестче вставка. В случае, когда материал вставки совпадает с материалом пластины, отрицательные напряжения отсутствуют. В случае, когда вставка становится более жесткой, чем пластина, опять возникает область отрицательных напряжений, и, значит, опять возможна потеря плоской формы равновесия пластины. Отметим, что область отрицательных напряжений σ_x/σ в случае со вставкой, которая жестче пластины, смещается на 90 градусов. Аналогичные результаты получаются, если задачу решать методом конечных элементов в пакете ANSYS 13.1 (см. рис. 1, 2).

Задача об устойчивости плоской формы деформирования пластины решается энергетическим методом. Потенциальная энергия и работа усилий срединной поверхности системы представляется как сумма энергии пластины и вставки:

$$\Delta V = U_2 + U_1 + \lambda(W_2 + W_1).\quad (4)$$

Минимальное собственное число $\lambda = \sigma^* \cdot 2hR^2/D_1$ соответствует первой критической нагрузке. Выражения для U_1 и W_1 отличаются от выражений для U_2 и W_2 пределами интегрирования по ρ : от 1 до бесконечности в первом случае, и от 0 до 1 во втором (единица в безразмерном виде представляет собой границу раздела вставки и пластины, т. е. отношение $\rho = r/R = 1$). Для $i = 1, 2$ имеем

$$U_i = \frac{D_i}{2}(U_{i1} - 2(1 - \nu_i)U_{i2}),$$

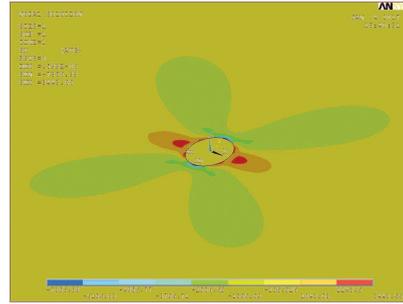
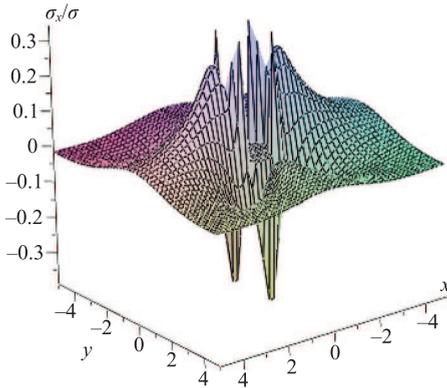


Рис. 1. Напряжения σ_x/σ при $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$ и $E_2 = E_1/10$, $\sigma_x^{\max}/\sigma = 0.42$, $\sigma_x^{\min}/\sigma = -0.75$.

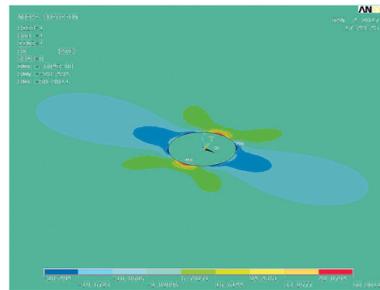
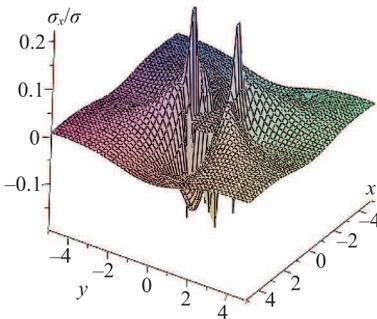


Рис. 2. Напряжения σ_x/σ при $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$ и $E_2 = 10E_1$, $\sigma_x^{\max}/\sigma = 0.43$, $\sigma_x^{\min}/\sigma = -0.24$.

где

$$D_i = \frac{E_i}{12(1 - \nu_i^2)},$$

$$U_{i1} = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \right)^2 \rho d\rho d\varphi,$$

$$U_{i2} = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} \frac{\partial w_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho \partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\rho d\varphi,$$

$$W_i = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int \left(\sigma_{i,\rho\rho}^0 \left(\frac{\partial w_i}{\partial \rho} \right)^2 + \sigma_{i,\varphi\varphi}^0 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{i,\rho\varphi}^0 \frac{\partial w_i}{\partial \rho} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) d\rho d\varphi.$$

В полярных координатах безразмерные напряжения в пластине до потери устойчивости имеют вид

$$\sigma_{1,\rho\rho}^0 = \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 - k_1}{\rho^2} + \left(1 - 4 \frac{1 - k_2}{\rho^2} + 3 \frac{1 - k_2}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right],$$

$$\sigma_{1,\varphi\varphi}^0 = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1-k_1}{\rho^2} - \left(1 + 3\frac{1-k_2}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right], \quad (5)$$

$$\tau_{1,\rho\varphi}^0 = \frac{\tau_{\rho\varphi}}{\sigma} = -\frac{1}{2} \left(1 + 2\frac{1-k_2}{\rho^2} - 3\frac{1-k_2}{\rho^4} \right) \sin(2\varphi),$$

а внутри вставки —

$$\sigma_{2,\rho\rho}^0 = \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\sigma} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 \cos(2\varphi)),$$

$$\sigma_{2,\varphi\varphi}^0 = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 \cos(2\varphi)), \quad (6)$$

$$\tau_{2,\rho\varphi}^0 = \frac{\tau_{\rho\varphi}}{\sigma} = -\frac{1}{2}k_2 \sin(2\varphi),$$

$$k_1 = k_y + k_x, \quad k_2 = k_y - k_x.$$

Соотношения (5), (6) при подстановке k_y и k_x по соотношениям (3) совпадают с формулами, полученными Мусхелишвили [5, 6].

Учитывая симметричность первой формы потери устойчивости [3, 10], будем искать нормальный прогиб пластины в виде

$$w_1(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{k,2l-2} \frac{\cos((2l-2)\varphi)}{\rho^k}, \quad (7)$$

а на вставке в виде

$$w_2(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{k,2l-2} \cos((2l-2)\varphi) \rho^{k+1}. \quad (8)$$

С дополнительными условиями непрерывности прогиба и производной от прогиба

$$w_2(\rho, \varphi)|_{\rho=1} = w_1(\rho, \varphi)|_{\rho=1}, \quad \left. \frac{\partial w_2(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \left. \frac{\partial w_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} \quad (9)$$

коэффициенты $B_{k,2l-2}$ можно выразить через коэффициенты $A_{k,2l-2}$.

После подстановки выражений (7) и (8) в соотношения (4) получим квадратичный функционал относительно обобщенных координат $A_{k,2l-2}$.

Минимум потенциальной энергии по принципу возможных перемещений находится из равенства нулю частных производных приращения потенциальной энергии по обобщенным координатам. Собирая коэффициенты при $A_{k,2l-2}$ в $\partial U/\partial A_{m,2l-2}$ и $\partial W/\partial A_{m,2l-2}$ соответственно в матрицы U и W и решая задачу $U + \lambda W = 0$ на собственные числа, находим искомую первую критическую нагрузку σ^* , соответствующую выходу пластины из плоской формы равновесия и минимальному положительному значению собственного числа λ .

Численные результаты. При расчетах в соотношениях (7), (8) берется K членов разложения по ρ и L членов разложения по φ . Некоторые результаты расчетов приведены в таблице.

E_2/E_1		0	1/5	1	10
K	L				
5	3	2,9673	<0	—	<0
7	4	1,9879	<0	—	64,1885
9	5	1,8627	19,8423	—	31,9927
11	6	1,8319	13,1289	—	25,8331
13	7	1,8195	11,8354	—	23,5583
17	9	1,8194	11,0629	—	22,7894

При небольшом числе членов ряда нет положительных вещественных собственных чисел. При увеличении числа членов ряда итерационный процесс определения минимального положительного собственного числа сходится.

Численные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в пакете ANSYS 13.1 [10]. Построены формы потери устойчивости и определены соответствующие им критические нагрузки. Получено хорошее совпадение первых критических нагрузок, построенных методом конечных элементов и описанным выше аналитическим методом. На рис. 3 и 4 приведены формы потери устойчивости растягиваемой вдоль оси Y пластины со вставками.

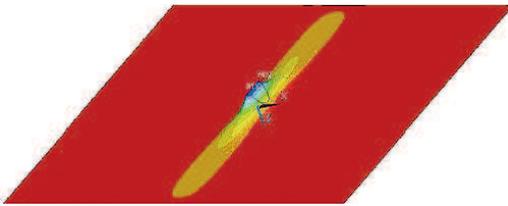


Рис. 3. Потеря устойчивости при материале вставки в 10 раз мягче материала пластины.

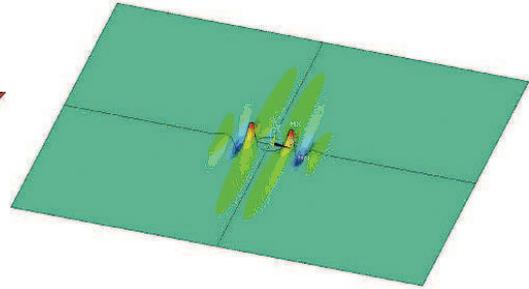


Рис. 4. Потеря устойчивости при материале вставки в 10 раз жестче материала пластины.

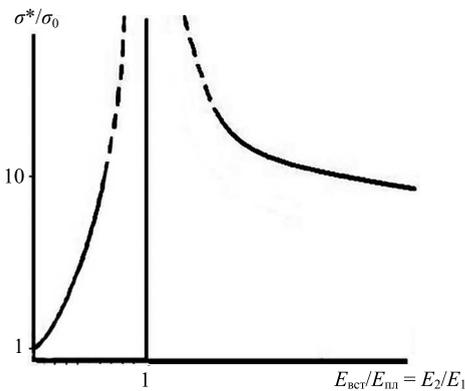


Рис. 5. Зависимость критической нагрузки от отношения модуля вставки к модулю пластины.

На рис. 3 представлены результаты расчетов в случае, когда вставка в 10 раз мягче, чем пластина ($E_2/E_1 = 1/10$). Чем вставка мягче (модуль Юнга вставки $E_2 \rightarrow 0$), тем λ ближе к минимальному собственному числу, соответствующему задаче о потере устойчивости пластины с отверстием [1]. При равных модулях упругости вставки

и пластины, т. е. в случае однородной изотропной пластины, потери устойчивости не происходит.

На рис. 4 представлены результаты расчетов, когда вставка в 10 раз жестче, чем пластина. В этом случае области зоны сжимающих напряжений, как уже отмечалось, расположены вдоль оси x (на 90 градусов смещены по сравнению со случаем, когда вставка мягче пластины). На рис. 5 представлена зависимость критической нагрузки от отношения модуля вставки к модулю пластины (σ_0 — критическая нагрузка, соответствующая пластине с отверстием радиуса R). Чем вставка жестче, тем быстрее наступает потеря устойчивости (правая ветвь графика рис. 5). Стоит отметить, что с увеличением жесткости вставки сходимость решения происходит при большем количестве членов.

Исследования проведены с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Вычислительный центр».

Литература

1. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г., Милованова О. Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев: Наук. Думка, 1981.
2. Седаева Е. М. Устойчивость бесконечных пластин, ослабленных круговыми отверстиями // Тр. научн.-исслед. ин-та мат. Воронеж. ун-та. Вып. 8. Воронеж, 1973. С. 32–36.
3. Бочкарев А. О., Греков М. А. Локальная устойчивость пластины с круговым нанотвердием при одноосном растяжении // Докл. РАН. 2014. Т. 457, № 3. С. 282–287.
4. Bauer S., Kashtanova S., Morozov N., Semenov B. Stability of a Nanoscale-Thickness Plate Weakened by a Circular Hole // ISSN 1028 3358, Doklady Physics, 2014. Vol. 59, N 9. P. 416–418.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
6. Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. Handbook of Elasticity Solutions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2003.
7. Eshelby D. E. Definition of the Stress Field, which was Creating by Elliptical Inclusion // Proceedings of the Royal Society A. 1957. Vol. 241, N 1226. P. 376.
8. Eshelby D. E. Elastic Field outside the Elliptical Inclusion // Proceedings of the Royal Society A. 1959. Vol. 252, N 1271. P. 561.
9. Deryugin Ye. Ye., Lasko G. V. Field of Stresses in an Isotropic Plane with Circular Inclusion under Tensile Stresses // Engineering, 2012. Vol. 4. P. 583–589.
10. Бауэр С. М., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н. Задача Кирша и смежные проблемы // Упругость и неупругость. С. 27–33. Москва, МГУ. 2016 г. труды Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 105-й годовщине со дня рождения А. А. Ильюшина, 2016.

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор; s.bauer@spbu.ru

Каштанова Станислава Викторовна — аспирант; kastasya@yandex.ru

Морозов Никита Федорович — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор; morozov@nm1016.spb.edu

Семенов Борис Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент; semenov@bs1892.spb.edu

STABILITY LOSS OF AN INFINITE PLATE WITH A CIRCULAR INCLUSION UNDER UNIAXIAL TENSION

Svetlana M. Bauer, Stanislava V. Kashtanova, Nikita F. Morozov, Boris N. Semenov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
s.bauer@spbu.ru, kastasya@yandex.ru, morozov@nm1016.spb.edu, semenov@bs1892.spb.edu

The problem of the stability loss of an infinite plate with a circular insert with another material exposed to uniaxial tension is considered. The influence of elastic modulus of the insert to the value of the critical load is defined. For finding the minimum eigenvalue corresponds to the first critical load is applied variational principle.

The calculations are performed in the programm “Maple” and compared with the results obtained by the method of finite elements in ANSYS.

The calculations show that the loss of stability in the case when the inclusion softer than the plate, and when the inclusion more firm than plate occurs in different forms, and at the approach of the Young’s modulus of the inclusion to the Young’s modulus of the plate critical load essentially increases. In the case of the coincidence of elastic modulus of the plate and inclusion stability loss is impossible. Refs 10. Figs 5. Table 1.

Keywords: stability loss, plates, energy method.

References

1. Guz A. N., Dishel’ M. Sh., Kuliev G. G., Milovanova O. B., *Fracture and Stability of Thin Bodies with Cracks* (Kiev, 1981) [in Russian].
2. Sedaeva E. M., “The stability of an infinite plate weakened by circular holes”, *Proceedings of Voronezh Univeristy* **8**, 32–36 (1973).
3. Bochkarev A. O., Grekov M. A., “Local instability of a plate with a circular nanohole under uniaxial tension”, *Doklady Physics* **59**(7), 330–334 (2014).
4. Bauer S., Kashtanova S., Morozov N., Semenov B., “Stability of a Nanoscale-Thickness Plate Weakened by a Circular Hole”, *Doklady Physics* **59**(9), 416–418 (2014).
5. Muskhelishvili N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Noordhoff, Groningen, 1963).
6. Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I., *Handbook of Elasticity Solutions* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2003).
7. Eshelby D. E., “Definition of the Stress Field, which was Creating by Elliptical Inclusion”, *Proceedings of the Royal Society A* **241**(1226), 376 (1957).
8. Eshelby D. E., “Elastic Field outside the Elliptical Inclusion”, *Proceedings of the Royal Society A* **252**(1271), 561 (1959).
9. Deryugin Ye. Ye., Lasko G. V., “Field of Stresses in an Isotropic Plane with Circular Inclusion under Tensile Stresses”, *Engineering* **4**, 583–589 (2012).
10. Bauer S., Morozov N., Semenov B., “The Kirsch problem and related problems”, *The conference proceedings of International Scientific Symposium on problems of mechanics of deformable solids, dedicated to the 105th anniversary since the birth of A. A. Ilyushin* (Moscow, 2016, section “Elasticity and Inelasticity”, 27–33).

Для цитирования: Бауэр С. М., Каштанова С. В., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н. Потеря устойчивости плоской формы равновесия пластины с круговой вставкой при одноосном растяжении // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 266–272. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.210

For citation: Bauer S. M., Kashtanova S. V., Morozov N. F., Semenov B. N. Stability loss of an infinite plate with a circular inclusion under uniaxial tension. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 266–272. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.210