

КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ С МОМЕНТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Д. А. Индейцев, А. Д. Сергеев

Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Рассматривается цепочка из N твердых тел с упругими связями, передающими моментное воздействие. Однотипные индивидуальные инерционные элементы цепочки имеют одну степень свободы. Для такой цепочки строится точное аналитическое решение задачи о частотах и формах свободных колебаний при произвольном значении N . Свойства частот и форм такой цепочки сравниваются со свойствами частот и форм канонической цепочки Ньютона. Установлено, что корреляция между собственными частотами и свойствами отвечающих им форм собственных колебаний такой цепочки принципиально отличается от аналогичных свойств канонической цепочки Ньютона. Низшим частотам собственных колебаний твердотельной цепочки с безынерционными моментными связями отвечают наиболее знакопеременные формы, высшим частотам — наиболее плавные. Атипичная корреляция между частотами и формами свободных колебаний, обнаруженная на основе точного аналитического решения задачи о свободных колебаниях цепочки N вращающихся твердых тел, входит в противоречие с положениями, лежащими в основе теоретических исследований в областях физики твердого тела, посвященных моделированию механических и тепловых динамических процессов в кристаллических решетках. Библиогр. 8 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: твердотельные цепочки, формы колебаний.

1. Канонические цепочечные объекты. 1.1. Цепочка Ньютона. Цепочка имеющих одну степень свободы одинаковых масс, соединенных однотипными безынерционными упругими элементами типа пружин (рис. 1), называется *цепочкой Ньютона*. Для такой цепочки задача об определении частот собственных колебаний имеет аналитическое решение при любом количестве ее инерционных элементов [1]. Протекающие в ней динамические процессы, связанные с распространением волн, к настоящему времени изучены достаточно глубоко [2]. Обнаруженные при этом эффекты легли в основу построения теорий, описывающих распространение волн в разного рода кристаллических решетках [3, 4]. В связи с этим данный объект в настоящее время можно отнести к каноническим линейным цепочечным объектам механики.

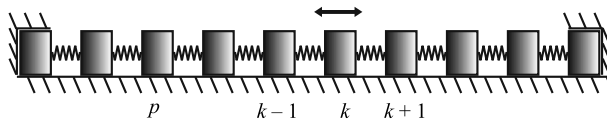


Рис. 1. Цепочка Ньютона с указанием степени свободы инерционного элемента.

Задача об определении частот и форм свободных колебаний цепочки частиц одинаковой массы, соединенных однотипными безынерционными упругими элементами, решена аналитически [1]. В силу полного совпадения дифференциальных уравнений движения с уравнениями движения цепочки Ньютона аналогичные решения имеют

задачи об определении частот и форм свободных колебаний для цепочечных систем, представленных на рис. 2.

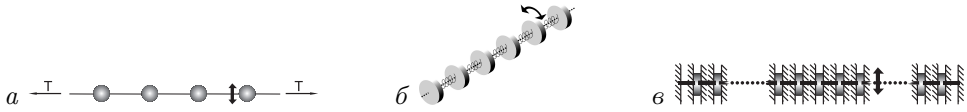


Рис. 2. Безынерционная струна с закрепленными на ней материальными точками (а); цепочка насаженных на одну ось и связанных безынерционными упругими элементами одинаковых дисков, каждый из которых имеет возможность вращаться вокруг общей оси (б); цепочка стесненных твердых тел, связанных безынерционными балками Бернулли—Эйлера (в).

Приведем известные решения задачи об определении собственных (безразмерных) частот Ω_K^2 [1] так называемых канонических цепочек (рис. 1 и 2) для случая, когда такие цепочки имеют пять инерционных элементов:

K	1	2	3	4	5
Ω_K^2	$4 \sin^2 \pi/12$	$4 \sin^2 2\pi/12$	$4 \sin^2 3\pi/12$	$4 \sin^2 4\pi/12$	$4 \sin^2 5\pi/12$

(1)

Соответствующие данным частотам формы колебаний приведены на рис. 3, а.

В точных решениях (1) отметим такой факт: формы, отвечающие низшим частотам регулярной дискретной системы, являются наиболее «плавными». В них число узлов растет с ростом порядкового номера частоты собственных колебаний. Форма становится все более «волнистой» или многоузловой. Такая же корреляция характерна для одномерных континуальных объектов механики сплошной среды конечных размеров [5, 6]. Проверим, является ли отмеченная корреляция атрибутивным свойством протяженных линейно-упругих систем или возможны ситуации, когда такая каноническая корреляция не соблюдается.

2. Твердотельная цепочка с безынерционными моментными связями.

Рассмотрим твердотельную цепочку, состоящую из N твердых тел, взаимодействующих друг с другом посредством безынерционных моментных связей. Индивидуальный инерционный элемент рассматриваемой регулярной структуры имеет только одну степень свободы (рис. 4).

Центры масс однотипных одинаковым образом ориентированных в пространстве твердых тел размещаются на опорах типа неподвижного цилиндрического шарнира. Оси шарниров ортогональны плоскости рисунка и параллельны орту \mathbf{b} . Одна из главных центральных осей инерции каждого тела совпадает с осью шарнира, вокруг которого телу разрешено вращение. Соответствующие моменты инерции каждого тела одинаковы и равны J_b . Шарниры размещаются на равных расстояниях друг от друга вдоль орта \mathbf{b} .

Тела связаны друг с другом безынерционными связями, обеспечивающими системе наличие так называемой натуральной конфигурации. Связи между телами упруго сопротивляются любым отклонениям отдельного инерционного элемента структуры от состояния равновесия. Эти связи будем считать препятствующими изменению ориентации инерционных элементов в пространстве, то есть моментными.

Указанному условию полностью удовлетворяет связь в виде безынерционной нерастяжимой балки Бернулли—Эйлера длины l , торцы которой жестко заземлены в соседних инерционных элементах. Жесткость упругой связи на изгиб в плоскости

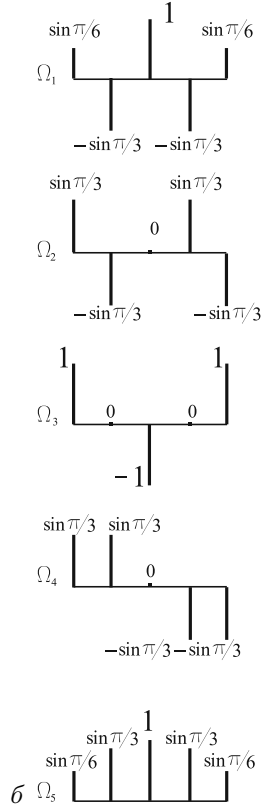
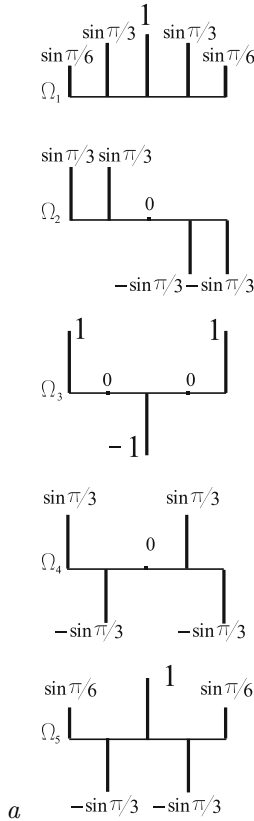
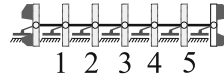
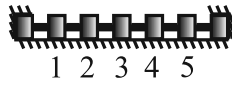


Рис. 3. Формы колебаний цепочки Ньютона (а) и формы колебаний твердотельной цепочки с моментными связями (б) для пяти инерционных элементов.

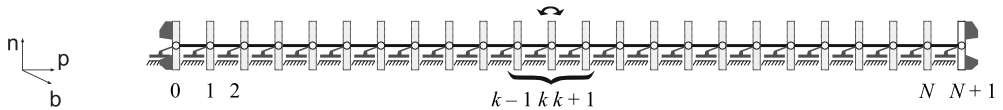


Рис. 4. Твердотельная цепочка из N элементов с безынерционными моментными связями, имеющая N степеней свободы.

(\mathbf{p}, \mathbf{n}) обозначим C_b . Очевидно, что описанная система является в самом строгом смысле гамильтоновой. Функцию, описывающую малые повороты отдельного тела с номером k вокруг орта \mathbf{b} , обозначим Ψ_k .

Для получения дифференциальных уравнений движения цепочки, изображенной на рис. 4, рассмотрим изображенную на рис. 5, а вспомогательную систему из трех связанных тел. Центр масс каждого тела свободно и без трения насажен на непо-

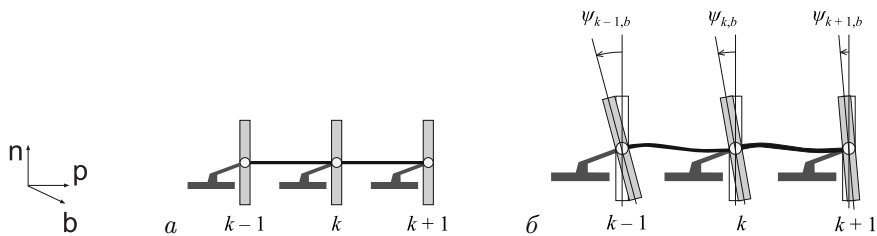


Рис. 5. Система трех упруго связанных твердых тел в отсчетной (а) и деформированной (б) конфигурациях.

движный цилиндрический шарнир, ось которого направлена вдоль орта \mathbf{b} . Соседние тела связаны между собой идентичными первоначально прямолинейными безынерционными балками Бернулли—Эйлера с длиной l и изгибной жесткостью в плоскости рисунка C_2 . Торцы каждой балки неподвижно защемлены в соседних телах. Возможным движением твердого тела, обозначенного на рис. 5 индексом k , является малый поворот $\psi_{k,b}$ вокруг неподвижной оси, параллельной орту \mathbf{b} . Уравнение данного движения имеет вид

$$J_k^b \ddot{\psi}_{k,b} = M_b^{k,k+1}(0) - M_b^{k-1,k}(l). \quad (2)$$

Здесь J_k^b — главный момент инерции тела относительно оси, параллельной орту \mathbf{b} , $M_b^{k,k+1}(0)$ — момент, действующий на рассматриваемое тело с индексом k со стороны упругого стержня, соединяющего тела, снабженные индексами k и $k+1$; $M_b^{k-1,k}(l)$ — момент, действующий на тело с индексом k со стороны упругого стержня, соединяющего тела, снабженные индексами $k-1$ и k . Значение дуговой координаты $s=0$ отвечает левому торцу соединительного стержня, значение $s=l$ — правому.

В учебниках по строительной механике приводится связь между распределением по длине стержня угла поворота нормали к упругой линии $\gamma_b(s)$ и поперечного прогиба $w_n(s)$ для упругой линии типа балки Бернулли—Эйлера, нагруженной только на торцах. Предположив каждое тело системы повернутым в плоскости рисунка на произвольный малый угол $\Psi_{i,b}$, где $i = k-1, k, k+1$, вокруг неподвижной оси (рис. 5, б), имеем

$$\begin{aligned} \gamma_b(s) &= \gamma_b(0) + \left(\frac{s}{C_2} M_b(0) - \frac{s^2}{2C_2} N_n(0) \right), \\ w_n(s) &= w_n(0) + s\gamma_b(0) + C_2^{-1} \frac{s^2}{2} M_b(0) - C_2^{-1} \frac{s^3}{6} N_n(0). \end{aligned} \quad (3)$$

Силы и моменты, действующие слева и справа на твердотельный элемент цепочки с номером k со стороны соседних стержней, связаны со смещениями и поворотами двух соседних тел. Для определения этой связи уравнение упругой линии типа балки Бернулли—Эйлера интегрируется при условии, что перемещения и повороты двух торцевых сечений стержня принимают заданные значения (рис. 6, а, б).

Положив в (3) $s=l$ и приняв $w_n(0)=w_n(l)=0$, $\gamma_b(0)=\Psi_{k-1,b}$, $\gamma_b(l)=\Psi_{k,b}$ для связи, расположенной левее тела с индексом k (рис. 6, а) и используя баланс моментов, получаем систему уравнений для определения значения момента $M_b^{k-1,k}(l)$, действующего на тело с индексом k слева. Приняв $w_n(0)=w_n(l)=0$, $\gamma_b(0)=\Psi_{k,b}$, $\gamma_b(l)=\Psi_{k+1,b}$ для связи, расположенной правее тела с индексом k (рис. 6, б), получаем систему уравнений для определения значения момента $M_b^{k,k+1}(0)$, действующего на тело с индексом

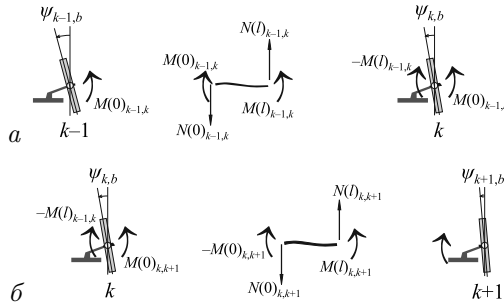


Рис. 6. Деформирование сегментов вспомогательной системы.

k справа. Опуская рутинные вычисления, связанные с реализацией данной процедуры, запишем полную систему уравнений движения инерционных элементов цепочки, включив в эту систему так называемые краевые уравнения, то есть уравнения для элементов цепочки с номерами $k=1$ и $k=N$:

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}_1 &= -\mu^2 (4\Psi_1 + \Psi_2), & \mu^2 &= \frac{2C_b}{J_b l}, \\ \dots & \dots & & \\ \ddot{\Psi}_k &= -\mu^2 (\Psi_{k-1} + 4\Psi_k + \Psi_{k+1}), & & \\ \dots & \dots & & \\ \ddot{\Psi}_N &= -\mu^2 (\Psi_{N-1} + 4\Psi_N). \end{aligned} \quad (4)$$

Найдем точное аналитическое решение задачи (4) о частотах и формах свободных колебаний гамильтоновой системы типа твердотельной цепочки (рис. 4).

3. Построение частот и форм свободных колебаний цепочки твердых тел с безынерционными моментными связями. Подстановкой в (4) решения в виде $\Psi_k = \Phi_k \exp i\omega t$ после сокращения на экспоненциальный множитель получаем алгебраическую систему уравнений в конечных разностях для определения амплитуд движения каждого тела:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Omega^2 - 4)\Phi_1 - \Phi_2, \\ \dots & \dots \\ 0 &= -\Phi_{k-1} + (\Omega^2 - 4)\Phi_k - \Phi_{k+1}, \\ \dots & \dots \\ 0 &= -\Phi_{N-1} + (\Omega^2 - 4)\Phi_N. \end{aligned} \quad (5)$$

Положительная величина $\Omega^2 = \omega^2/\mu^2$ представляет собой квадрат безразмерной частоты собственных колебаний рассматриваемой линейной системы. Матрица системы (5) является циклической [7], получившей название *матрицы Теллица*. Аналитическое решение системы с такой матрицей ищется в виде

$$\Phi_k = \Phi \lambda^k, \quad \Phi = \text{const}, \quad |\lambda| = 1. \quad (6)$$

Из условия существования нетривиального решения (5) получается выражение для $\Omega^2 = \Omega^2(\lambda)$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda^{-1} - (\Omega^2 - 4) + \lambda)\Phi, \\ \lambda^2 - (\Omega^2 - 4)\lambda + 1 &= 0, \quad \Omega^2 = 4 + \lambda^{-1} + \lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение для λ дает два корня: λ_1 и λ_2 . Если $\lambda_1 = \lambda$ — корень данной системы, то $\lambda_2 = \lambda^{-1}$ — тоже корень. Таким образом, решение (5) имеет вид

$$\Phi_k = A\lambda_1^k + B\lambda_2^k, \quad (8)$$

где A и B — произвольные константы. Решение (8) подставляется в краевые уравнения системы (5). Значения λ_1 и λ_2 выбираются такими, чтобы краевые уравнения выполнялись при $A \neq 0$ и $B \neq 0$. Подстановка (8) в краевые уравнения (5) и группировка слагаемых приводит к системе линейных однородных уравнений относительно констант A и B , которая, с использованием (7), принимает вид

$$0 = A + B, \quad 0 = \lambda_1^{N+1}A + \lambda_2^{N+1}B. \quad (9)$$

Условие существования нетривиального решения (9):

$$\lambda_1^{N+1} = \lambda_2^{N+1} \implies \lambda^{2(N+1)} = 1. \quad (10)$$

Система (5) имеет нетривиальные решения для двух наборов значений λ

$$\begin{aligned} \lambda_{I,s}^{N+1} = 1 = e^{i2\pi s}, \quad s = 0, 1, \dots, N &\implies \lambda_{I,s} = e^{i\frac{2\pi s}{N+1}}, \\ \lambda_{II,s}^{N+1} = -1 = e^{i(\pi+2\pi s)}, \quad s = 0, 1, N &\implies \lambda_{II,s} = e^{i\left(\frac{\pi(2s+1)}{N+1}\right)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Найденным значениям λ_s отвечают два набора квадратов частот, которые находятся из (7):

$$\begin{aligned} \Omega_I^2 &= 4 + \lambda_I + \lambda_I^{-1} = 4 + 2 \cos \frac{2\pi s}{N+1}, \\ \Omega_{II}^2 &= 4 + \lambda_{II} + \lambda_{II}^{-1} = 4 + 2 \cos \frac{\pi(2s+1)}{N+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отвечающие этим решениям формы свободных колебаний таковы:

$$\begin{aligned} \Phi_k^I &= A(\lambda_{I,s}^k - \lambda_{I,s}^{-k}) = A\left(e^{\frac{i2\pi ks}{N+1}} - e^{-\frac{i2\pi ks}{N+1}}\right) = 2iA \sin \frac{2\pi ks}{N+1}, \\ \Phi_k^{II} &= A(\lambda_{II,s}^k - \lambda_{II,s}^{-k}) = A\left(e^{ik\left(\frac{\pi}{N+1} + \frac{2\pi s}{N+1}\right)} - e^{-ik\left(\frac{\pi}{N+1} + \frac{2\pi s}{N+1}\right)}\right) = 2iA \sin \frac{\pi k(1+2s)}{N+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Число решений характеристического уравнения превосходит число степеней свободы исследуемой системы. Среди «лишних» частот (12) оказываются совпадающие частоты, нулевые частоты и частоты, отвечающие нулевым формам колебаний, находящимся среди даваемых соотношениями (13). Они должны быть отброшены. В результате такой фильтрации соотношения (12) дают ровно N различных значений квадратов частот, которым отвечают N различных взаимно ортогональных ненулевых форм свободных колебаний.

Из (12) следует, что при любом числе инерционных элементов N цепочки (рис. 4) квадраты частот ее свободных колебаний снизу отделены от нуля и ограничены сверху:

$$2 \leq \Omega_{I,II}^2 \leq 6 \quad \text{для} \quad 1 \leq N < \infty. \quad (14)$$

Формы собственных колебаний, отвечающие каждому набору корней (12):

<p>квадрат частоты:</p> $\Omega_{I,s}^2 = 4 + 2 \cos \frac{2\pi s}{N+1}$ $\Omega_{II,s}^2 = 4 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{N+1} + \frac{2\pi s}{N+1} \right)$	<p>форма:</p> $\Phi_k^{I,s} = \beta_I \sin \frac{2\pi ks}{N+1}$ $\Phi_k^{II,s} = \beta_{II} \sin \left\{ \frac{\pi k(1+2s)}{N+1} \right\}$
---	--

Здесь $\beta_I = \text{const}$ и $\beta_{II} = \text{const}$. Соотношения (15) позволяют найти все частоты свободных колебаний и отвечающие им формы для цепочки (рис. 4) при любом конечном значении N . Приведем безразмерные частоты Ω_K^2 колебаний цепочки (рис. 4), полученные на основании (15) для случая, когда число ее подвижных инерционных элементов $N = 5$:

K	1	2	3	4	5
Ω_K^2	$4 - 2 \sin 2\pi/6$	$4 - 2 \sin \pi/6$	4	$4 + 2 \sin \pi/6$	$4 + 2 \sin 2\pi/6$

Формы колебаний, отвечающие частотам (16), приведены на рис. 3, б, где они изображены рядом с соответствующими формами колебаний канонической цепочки Ньютона. В решениях для твердотельной цепочки обращает на себя внимание следующая корреляция: формы, отвечающие низшим частотам регулярной дискретной твердотельной системы, оказываются наиболее знакопеременными.

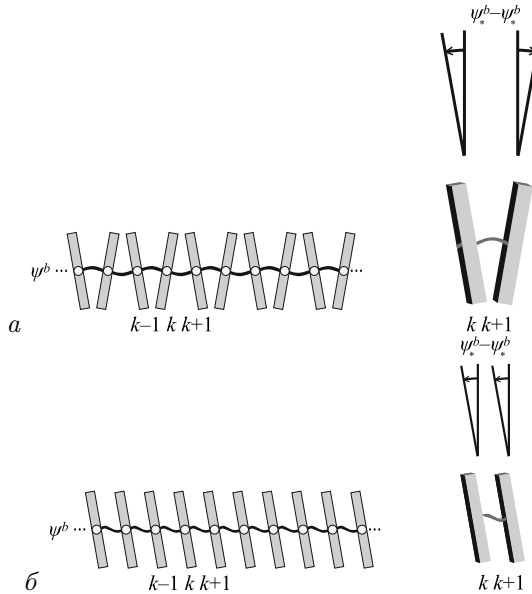


Рис. 7. Форма колебаний, отвечающая нижней частоте собственных колебаний твердотельной цепочки с безынерционными моментными связями (а); форма колебаний, отвечающая ее высшей частоте собственных колебаний (б).

С ростом значения частоты собственных колебаний у соответствующей ей формы колебаний количество перемен знаков уменьшается. Формы становятся все более

«плавленными». Форма, отвечающая высшей частоте, знакопостоянна. Констатированная на основе точных аналитических решений корреляция между частотами и формами собственных колебаний абсолютно атипична для одномерных континуальных объектов механики сплошной среды конечных размеров [5, 6].

Для выяснения причин такой нестандартной корреляции сравним энергию упругой деформации индивидуальной связи в случае, когда амплитуды перемещений соседних инерционных элементов одинаковы, но происходят либо «в противофазе» как на рис. 7, а, либо «в фазе» — как на рис. 7, б. Непосредственными вычислениями устанавливается, что при « \sim »-образной и при « \wedge »-образной конфигурации упругая связь между двумя соседними твердыми телами запасает потенциальную энергию, соответственно,

$$U_{\sim} = \frac{2C_2\psi_*^{b2}}{l} \quad \text{и} \quad U_{\wedge} = \frac{6C_2\psi_*^{b2}}{l}. \quad (17)$$

Выражения (17) показывают, что индивидуальная энергия упругой деформации связи в исследуемой дискретной структуре U_{\sim} , отвечающая высшей форме колебаний такой структуры, в три раза превосходит энергию такой связи для низшей формы колебаний U_{\wedge} .

4. Заключение. Таким образом, строго показано, что корреляция между свойствами частот и форм свободных колебаний, характерная для классических одномерных континуумов механики сплошных сред, абсолютно нетипична для протяженных регулярных дискретных цепочечных структур с безынерционными моментными связями между твердотельными инерционными элементами. Данный факт не вступает в противоречие ни с одной из известных строго доказанных теорем теории колебаний систем с дискретными параметрами [6]. Тем не менее, он явным образом указывает на то, что использование обобщенного термина «степень свободы колебательной системы» требует в ряде случаев доопределения характера ее природы. Для спектральных методов исследования динамики той или иной многоэлементной структуры оказывается нетривиальным вопрос о том, имеет ли учитываемая степень свободы индивидуального твердотельного инерционного элемента конкретной колебательной системы трансляционный характер (движение типа поступательного перемещения) или спиновый характер (движение типа поворотов и вращений).

Обнаруженное обстоятельство входит в противоречие с рядом рабочих гипотез, по существу используемых теоретической физикой в классических работах по динамике кристаллической решетки и теории теплоемкости твердых тел. Рассмотрение так называемого длинноволнового приближения при моделировании низкочастотных колебаний твердотельной кристаллической решетки [4, 8] требует уточнения. Цепочка, представленная на рис. 4, вполне подходит на роль дискретной модели одномерного кристалла в качестве альтернативы цепочки Ньютона (рис. 1) или ее расширения. Известно, что так называемая низкочастотная длинноволновая динамика цепочки Ньютона аппроксимируется волновым уравнением с достаточной для многих прикладных и теоретических целей точностью [2]. Однако свойства рассмотренной в работе цепочечной структуры таковы, что ни при каком значении $N \rightarrow \infty$ ее так называемая низкочастотная динамика не может быть смоделирована уравнениями простого однородного континуума. Этим она принципиально отличается от цепочки Ньютона. Данный факт показывает, что перенесение на твердотельную цепочечную структуру с безынерционными моментными связями подходов к анализу волновых процессов, применяемых при рассмотрении канонических континуумов типа цепочки Ньютона, оказывается требующим дополнительного исследования. Так, например, встает

вопрос корректности определения дебаевской температуры на основании фазовых скоростей распространения волн в кристаллической решетке в заданном направлении [3], так как в твердотельной решетке с моментными связями из-за нестандартной корреляции между частотами и формами свободных колебаний возникает проблема с интерпретаций оптического и акустического спектров колебаний кристаллической решетки.

Авторы считают преждевременным давать оценки масштабам изменений, которые необходимо внести в общие положения динамики распространения волновых возмущений в твердотельных структурах. Однако, по нашему мнению, некоторым разделам физики твердого тела, связанным с исследованиями в области динамики кристаллических структур, в свете вновь обнаруженных фактов может потребоваться существенная ревизия.

Литература

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
2. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 457 с.
3. *Борн М., Кунь Х.* Динамическая теория кристаллических решеток. М.: ИЛ, 1972.
4. *Марадудин А., Мотролл Э., Вейсс Дж.* Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М.: Наука, 1965. СПб., 1995. 158 с.
5. *Бидерман В. Л.* Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. школа, 1972. 416 с.
6. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физ. матгиз, 1959.
7. *Блейх Ф., Мелан Е.* Уравнения в конечных разностях статики сооружений. Харьков, 1936.
8. *Косевич А. М.* Теория кристаллической решетки. М.: Наука, 1988.

Статья поступила в редакцию 4 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Индейцев Дмитрий Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор;
Dmitry.Indeitsev@gmail.com

Сергеев Александр Диевич — доктор физико-математических наук; dievich@rambler.ru

CORRELATION BETWEEN PROPERTIES OF EIGENFREQUENCIES AND EIGENMODES IN A CHAIN OF RIGID BODIES WITH INERTIALESS MOMENT CONNECTIONS

Dmitry A. Indeitsev, Aleksander D. Sergeev

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; Dmitry.Indeitsev@gmail.com, dievich@rambler.ru

A regular chain of N rigid bodies is under consideration. Each body has one degree of freedom: rotation along the axis, orthogonal to the chain axis. Bodies of the chain are connected by means of elastic inertialless Bernoulli-Euler beams. We build the analytical solution of eigenvalue problem for the chain if N is arbitrary. The properties of eigenfrequencies and eigenmodes of the chain are compared with analogical properties of the canonical Newton chain. It is shown that the correlation between properties of eigenfrequencies and eigenmodes in a rigid body chain with inertialess torque connections and the same correlation in the canonical Newton chain is principally different. The eigenmodes, corresponding to the lowest eigenfrequencies of the rigid body chain, have maximal number of nodes. The eigenmodes, corresponding to the highest eigenfrequencies of this chain are most smooth. The nontypical correlation, obtained as a result of the precise solution, goes in contradiction to the states, putted by physics into the foundation of theoretical investigations devoted to various dynamical phenomena in crystal lattices. Refs 8. Figs 7.

Keywords: chains of rigid bodies, non typical eigenmodes.

References

1. Mandelstam L. I., *Lectures on vibration theory* (Moscow, Nauka, 1972. 470 p.) [in Russian].
2. Brillouin L., Parodi M., *Wave Propagation in Periodic Structures* (Dover, New York, 1953).
3. Born M., Kun H., *Dynamical Theory of Crystal Lattices* (Oxford University Press, Amen House, London E.C.4, 1954, 420 p.).
4. Maradudin A. A., Montroll E. W., Weiss G. H. *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation*, Supplement 3, Solid State Physics (Academic Press, New York 1963-1964).
5. Biderman V. L., *Applied theory of mechanical oscillations* (Moscow, Vysshaya shkola, 1972, 416 p.).
6. Timoshenko S., *Vibration problems in engineering* (D. van Nostrand Company, Inc., Toronto, New York, London, 1955).
7. Bleich F., Mellan E., *Finite-difference equations of statics of structures* (Kharkov, 1936, 384 p.).
8. Kosevich A. M., *The crystal lattice* (WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005).

Для цитирования: Индейцев Д. А., Сергеев А. Д. Корреляция между свойствами частот и форм свободных колебаний твердотельной цепочки с моментными связями // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 281–290. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.212

For citation: Indeitsev D. A., Sergeev A. D. Correlation between properties of eigenfrequencies and eigenmodes in a chain of rigid bodies with inertialess moment connections. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 281–290. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.212

ХРОНИКА

26 октября 2016 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступили доктор физ.-мат. наук, профессор В. Г. Вильке и аспирант Г. В. Гусак (МГУ им. М. В. Ломоносова) с докладом на тему «Изучение деформирования протектора колеса с использованием стержневой модели».

Краткое содержание доклада:

Изучается конструкция шины, которая моделируется твердым диском и деформируемым протектором, представленным множеством упругих стержней, равномерно распределенных по внешней стороне диска. Предполагается, что стержни жестко закреплены на ободе колеса, контакт с дорогой происходит на концах стержней. В зависимости от вертикальной нагрузки, приложенной к центру колеса, определена зона контакта и условия возникновения в ней областей проскальзывания. Найдены оптимальные геометрические параметры стержней протектора, обеспечивающие отсутствие проскальзывания при любом коэффициенте трения, что позволяет уменьшить износ протектора шины. Определены силы реакции, возникающие в зоне контакта, в зависимости от вертикального перемещения центра колеса и горизонтальных смещений концов стержней. Получены уравнения качения колеса с деформируемой периферией по шероховатой плоскости под действием сил и момента, приложенных к центру диска. Найдены условия существования стационарных движений.